表現論の方法と考え方

2000 年度 名古屋大学集中講義 (自然数理特論 1)

西山 享 (京大総合人間学部)

2000/11/20 – 11/24　Ver. 1.0 [00/11/24 23:40]

Contents

Abstract

表現論は数学・物理学のさまざまな分野で道具として開発され、かつ有効に使われてきた。特に量子力学への応用、超対称性など素粒子論の分野や、あるいは整数論 (保型形式の理論)、組み合わせ論、不変式論や特殊函数論などに大きな影響を与えている。

この講義では、そのような分野に表現論がどのように応用されているかは**解説しない**。さまざまな分野で表現論が使われてきて、表現論独特の (数学的) 世界の見方や考え方がある。それを基本的な有限群の場合から解説を始めて、具体的な行列群の場合に解説してみたいと思う。

具体的なプランは以下の通りである。

まず有限群の場合に、群の作用、群環の表現、誘導表現、intertwining 作用素の作り方、フロベニウスの相互律などを解説する。これらはすべて (コンパクト) リー群の場合にも意味を持ち、かつその設定の下でより強力な道具となりうる。しかし有限群の場合に解説することで、あまり本質的でない証明の細部に立ち入ることなく、本質的な考え方のみを伝えたい。これらの概念は 3 年次に既習であると思うが、たぶんその時とはまったく異る導入と証明が行なわれる。

次に行列群として、一般線型群 (代数群の代表選手として) と、直交群 (実 Lie 群の代表選手として) の表現論を扱う。もちろんこの二つの群を同列に扱うことも可能だが、敢えて二つの異るアプローチを行なう。

$GL(n, \mathbb{C})$ については行列環上のさまざまな作用を考え、行列の要素のなす多項式環上の表現を分解したり、あるいは対称行列への作用を考えて同じようにこの表現を分解したりする方法を学ぶ。その過程で $GL(m, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$-duality とか Schur の双対律などにも触れる予定である。

$SO(n)$ については球面上の関数空間への表現を考え、その既約分解が球面調和関数や、球面のラプラシアンの固有値問題とどのように関わっているかを解説する。時間が許せば、不定計量の直交群 $SO(p, q)$ や、量子力学との関係についても簡単に解説したい。

参考書など

この講義に参考になりそうな文献をあげておこう。まず、有限群の表現については、セールの本 [24] が定番である。しかし体が一般であることや、記述が整理され過ぎていることなどから、若干取っつきにくい部分があるかも知れない。「群論」と名前がついてはいるが、寺田/原田 [27] にも詳しく解説されている。少し変ったところでは、Terras の本 [15] も面白いだろう。

対称群の表現に関してはたくさんの文献があるが、この講義のように一般線型群の表現論と関係させて書いてあるものとしては岩堀 [18] や英語だが Fulton [2] がよいだろう。古典代数群の有理表現については、和書ではあまりよい本はない[1]。小林/大島 [21] は参考になるかも知れない。洋書では Fulton/Harris [3] や Goodman/Wallach [4] など多数ある。

不変式論では、Howe [10] がよい。絶対にお勧め。ここでの議論のほとんどは多かれ少なかれこの本を源泉としている。また 向井 [31] もその続編と合わせて興味深い。先にあげた Goodman/Wallach [4] は少々分厚すぎるが、定評はあるようだ。異色の本として、有限群の不変式を論じた Smith [7] も面白いかも知れない。

また、この講義を少し簡単にした拙著 [28] も参考にしていただけると幸いである。

[1]なぜだろう? 研究者にとっては常識であるにしても、入門者にとってはかなり高いハードルである。最近、名古屋大学の岡田聡一さんがその分野の本を執筆中ということなので、期待して待とう。

Part I

群の作用

1 群とその作用

Definition 1.1 (群の作用) 群 G と集合 X に対して、写像$\varphi : G \times X \to X$ が与えられていて、次の条件を満たすとき、G は X に**作用する**、あるいは**働く**という。

(1) $\varphi(e, x) = x$ ただし $e \in G$ は単位元を表す。

(2) $\varphi(g, \varphi(g', x)) = \varphi(gg', x) \quad (g, g' \in G, x \in X)$

この二つの条件より、 $g \in G$ に対して $x \mapsto \varphi(g, x)$ は X 上の変換 (可逆な写像) を引き起こすことがわかる。そこで $\varphi(g, x)$ を $g \cdot x$ とか、あるいは $\cdot$ さえも省略して gx などとと書く。$x \in X$ に対して、$\mathbb{O}_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ を x を通る G **軌道**と呼ぶ。

作用とは、つまり X 上の変換全体のなす群を $\mathrm{Aut}\,(X)$ と書くならば、単に群準同型 $G \to \mathrm{Aut}\,(X)$ を与えることに過ぎない。

Remark 1.2 写像 $\varphi : G \times X \to X$ は何らかのよい性質を持つと仮定することが多い。たとえば、連続写像とか可微分写像、あるいは多項式写像など。むつかしく言えば G, X が属するあるカテゴリーの morphism であることが暗黙のうちに了解されていることがある。そのような設定の下で、 $\mathrm{Aut}\,(X)$ は X の自己同型群と呼ばれる。

Example 1.3 (1) G は G 自身に、群の積を左 (あるいは右) から取ることによって作用する。つまり、$L(g, x) = gx$ と $R(g, x) = xg^{-1}$ である。R では逆元を取らなければならないことに注意せよ[2]。(その理由を考えよ。) この作用をそれぞれ、**左移動**、**右移動**と呼ぶ。どちらの作用でも G 全体がただ一つの G 軌道になっている。

(2) G は G 自身に、$\mathrm{Ad}\,(g)x = gxg^{-1}$ とおくことによっても作用する。この作用を**随伴作用**と呼ぶ。随伴作用の軌道 $\mathbb{O}_x$ は $x \in G$ の共役類に他ならない。

さて、作用の大きさと無駄の無さを測るには次のような定義をしておくのが便利である。

Definition 1.4 群 G の X への作用が**推移的**とは、$\forall x_1, x_2 \in X$ に対して、$gx_1 = x_2$ となるような $g \in G$ が存在するときに言う。また G の作用が**効果的**とは、$gx = x \quad (\forall x \in X)$ なら $g = e$ となるときに言う。$x \in X$ に対して、$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ を x の**固定部分群**と呼ぶ。もし $G_x = \{e\}$ が任意の $x \in X$ について成り立つなら、この作用は**自由**であるという。

この定義において、推移的とは、作用している群がかなり大きいことを意味する。実際次の演習問題でもわかるように、X の一点を G で動かすことによって X 全体になる (つまり X は一つの G 軌道である)。また効果的とはその作用には無駄がないことを意味している。

[2]逆元を取らないですむように、群の「右からの作用」というものを考えることもあるが、ここでは考えない。この講義では群はほとんどの場合左から作用する。

Exercise 1.5 次の各主張を示せ。

(1) 推移的とは $x \in X$ に対して、写像 $G \ni g \mapsto gx \in X$ が全射になること、また効果的とは、準同型 $G \to \mathrm{Aut}\,(X)$ が単射であることと同値である。

(2) 作用が推移的であっても、準同型 $G \to \mathrm{Aut}\,(X)$ が全射であるとは限らない。

(3) 上の例であげた、G の G 自身への左右の移動による作用は推移的かつ自由である。一方、随伴作用は G が自明な群でなければ推移的でも自由でもあり得ない。

(4) $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ を固定部分群とする。作用が効果的であることと、$\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$ は同値であることを示せ。したがって自由なら効果的である。一般にこの逆は成り立たない。

(5) X への G の作用が推移的であるとする。このとき G の作用が効果的であることと、ある $x \in X$ に対して $\bigcap_{g \in G} gG_xg^{-1} = \{e\}$ であることとは同値である。さらにこれは任意の $x \in X$ についても成り立つ。

Exercise 1.6 G が X に作用しているとする。$x \in X$ を一つ選び、その固定部分群を G_x と書こう。

(1) G が X に推移的に作用しているとする。$G \in g \mapsto g \cdot x \in X$ は右剰余類の空間 G/G_x を経由することを示せ。つまり次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
g \in G \arrow[d, "\text{projection}"'] \arrow[dr, "\text{全射}"] & \\
gG_x \in G/G_x \arrow[r, "\sim", "\text{同型}"'] & X \ni g \cdot x
\end{tikzcd}$$

(2) G を有限群としよう。このとき $\#\mathbb{O}_x = \#(G/G_x) = \#G/\#G_x$ が成り立つことを示せ。さらにこれを利用して、作用が随伴作用であるとき、

$$\#(x \text{ の共役類}) = \#\mathbb{O}_x = \frac{\#G}{\#Z_G(x)}$$

が成り立つことを示せ。ただし $Z_G(x)$ は x の G における**中心化部分群**である。

Example 1.7 (正多面体群) 正多面体 P を不変にするような 3 次元ユークリッド空間の合同変換の全体を**正多面体群**という。正 n 面体群を G とおこう $(n = 4, 6, 8, 12, 20)$。もちろん定義により G は P に作用している。

さて、正多面体の面、辺、頂点の集合をそれぞれ F, E, V と書こう。ただし、面はそれに属する辺・頂点を含み、辺はその端点を含んでいるとしておく。このとき

$$\mathbb{B} = \{(a, b, c) \in V \times E \times F \mid a \subset b \subset c\}$$

の元を**旗**と呼ぶ。もちろん G は旗の集合に自然に作用する。次の命題は直感的には明らかだろう。

Proposition 1.8 G の旗への作用は推移的、かつ自由である。特に P の各面が正 k 角形とすると $\#G = \#\mathbb{B} = 2nk$ が成り立つ。

さて、

$$\mathbb{B}' = \{(b, c) \in E \times F \mid b \subset c\}$$

の元のことを**部分旗**と呼ぼう。また、正多面体群の中で、空間の向きを保つような変換 (つまり回転移動) 全体のなす部分群を H と書く。このとき、次の命題も、各辺の垂直二等分面に関する鏡映が辺の端点を入れ換えるように働くということに注意すれば、やはり直感的にほぼ明らかかもしれない。

Proposition 1.9 H の部分旗 $\mathbb{B}'$ への作用は推移的、かつ自由である。特に P の各面が正 k 角形とすると $\#H = \#\mathbb{B}' = nk$ が成り立つ。したがって $G/H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

正多面体群は結局たった 5 種類しかないので、その構造はすでによくわかっている。ここでは単にその結果を述べるにとどめる。これを調べるのは演習問題としておこう (その時には上の二つの命題は役に立つはずである)。なお、[17] および [29] 参照。

n	k	G	$\#G$	H	$\#H$
4	3	$\mathfrak{S}_4$	24	$\mathfrak{A}_4$	12
6	4	$\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{S}_4$	48	$\mathfrak{S}_4$	24
8	3	$\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{S}_4$	48	$\mathfrak{S}_4$	24
12	5	$\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{A}_5$	120	$\mathfrak{A}_5$	60
20	3	$\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{A}_5$	120	$\mathfrak{A}_5$	60

[ヒント： 正 6 面体の場合は頂点の対を結ぶ軸が 4 本あり、これを入れ換えることで H が働く。G は H と ± 1 で生成されるから $G = \mathbb{Z}_2 \times H$ である。正 8 面体は正 6 面体の双対多面体だから、働いている群は同じ。
正 20 面体の場合には各辺の中点 (30 個ある) を考え、これを組み合わせて正 8 面体を 5 つ作る ($30 = 6 \times 5$!)。この 5 つの正 8 面体の入れ換えで G が働く ([20])。やはり ± 1 が正 20 面体を不変にしていることに注意する。また、正 12 面体群は正 20 面体群と等しい。]

似たような例を、も一つあげておこう。

Example 1.10 (n 次対称群) $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ と置くとき、X から X への全単射全体に写像の合成によって積を定義した群を n 次**対称群**と呼んで、$\mathfrak{S}_n$ で表す。つまり $\mathfrak{S}_n = \operatorname{Aut} X$ である。もちろん $\mathfrak{S}_n$ は X に推移的かつ効果的に作用している。

この作用は自由ではないが、次のように"旗"を考えることによって自由な作用を構成することができる。

まず X のすべての部分集合 2^X を考え、さらに

$$\mathbb{B} = \{(F_0, F_1, \ldots, F_n) \mid F_k \in 2^X, \#F_k = k, F_i \subset F_{i+1}\}$$

の元を**旗**と呼ぶ。もちろん $\mathfrak{S}_n$ は $\mathbb{B}$ に自然に作用するが、この作用は推移的かつ自由である。このようにして $\#\mathfrak{S}_n = \#\mathbb{B} = n!$ がわかる。

Exercise 1.11 部分的な旗を考えることによって、もっと豊富な構造を考えることもできる。たとえば次のような (部分) 旗の集合を考えてみよう。

$$\mathbb{B}' = \{(F_0, F_k, F_n) \mid F_i \in 2^X, \#F_i = i, F_0 \subset F_k \subset F_n\}$$

これは、まぁ F_k だけを考えるといっても同じことではあるが、一番簡単な旗になっている。

(1) $\mathbb{B}'$ への $\mathfrak{S}_n$ の作用は推移的か? また、効果的か? 自由であるか?

(2) $F \in \mathbb{B}'$ を任意に取るとき、F における固定部分群を求めよ。このことから $\#\mathbb{B}'$ はどのようにして計算できるか?

(3) もっと一般の部分旗を定義して、同様の問題を考えてみよ。

Exercise 1.12 ”旗”という概念はもっと一般的な枠組みで考えることができる。たとえば $G = GL(n, \mathbb{C})$ が $V = \mathbb{C}^n$ に自然に (行列のかけ算によって) 作用している場合を考えよう。

(1) V への G の作用は推移的か? また、効果的か? 自由であるか?

(2) 次のようにして V の**旗**を考えよう。

$$\mathbb{B} = \{F = (F_0, F_1, \ldots, F_n) \mid F_k \text{ は } V \text{ の部分空間}, \dim F_k = k, F_i \subset F_{i+1}\}$$

G は $\mathbb{B}$ に推移的かつ効果的に作用している。しかしこの場合作用は自由ではない。任意の旗における固定部分群を求めよ。

(3) 部分的な旗について考察せよ。

Exercise 1.13 G が X に効果的に作用しているとする。また $X^n = X \times \cdots \times X$ (n 個の直積) とおき、G の X^n 上の対角線的な作用を考える。すなわち $g(x_1, \ldots, x_n) = (gx_1, \ldots, gx_n)$ と決める。

(1) G の X への作用が推移的であっても、 X^n への作用は推移的とは限らないことを示せ。

(2) G の X への作用が自由であることと、X^n への作用が自由であることは同値である。

(3) G を有限群とする。十分大きな n に対して、X^n の適当な部分集合 Y を取ると、G の Y への作用は自由であるようにできる。

Exercise 1.14 $\mathbb{F}_p$ を標数 p の素体とする。$GL_2(\mathbb{F}_p)$ の射影空間 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ への作用と固定部分群を考えることにより、$\#GL_2(\mathbb{F}_p)$ を求めよ。このことから、$\mathbb{F}_p$ の元で、$ad - bc = 0$ を満たす組み (a, b, c, d) の個数を求めよ。また $\#SL_2(\mathbb{F}_p)$ を求めよ。

Part II

有限群の表現

2　有限群の表現

以下第一部 (§2 – §10) においては G は有限群とする。

しかしここで定義したり、あるいは問題にしたりする性質は、本来有限群とは限らずに、一般の群に対して考察すべき性質である。またここでの議論のほとんどは、素性の良い群に対しては適切な修正の下に通用する。したがって、厳密には対象は有限群ではあるが、後の話の展開のためには、一般の群を想定して考えてもらうことが望ましい。実際、ここで挙げるような事項については (有限群に対しては) 既知の事項がほとんどであろう。復習をかねて、これらの事実、あるいは性質が、どのような群に対して一般化できるのかを考えながら読んでいただけると嬉しい。

Definition 2.1 (表現) V をベクトル空間とし、$GL(V)$ で V 上の可逆な線形写像の全体を表す。このとき、群の準同型 $\rho : G \to GL(V)$ を G の V 上の**表現**と呼ぶ。V を**表現空間**と呼び、時として V_ρ とか $V(\rho)$ などのように書くこともある。また ρ を省略して V を表現と呼ぶことも多い。

V の部分空間 U であって、$\rho(G)$ で不変になるようなものを G **不変部分空間**、あるいは V の**部分表現**と呼ぶ。明らかに $\{0\}$ または V それ自身は部分表現である。これを自明な部分表現と呼ぶ。V の部分表現が自明なものしかないとき、V を**既約**であるという。

$g \in G$ に対して $\rho(g) \in GL(V)$ のことを**表現の作用素**と呼んだりする。これを用いて表現である、ということを書き下せば、

$$\rho(e) = \mathrm{id}_V, \quad \rho(g)\rho(g') = \rho(gg') \quad (g, g' \in G)$$

となる。これはすなわち G が V に作用していることにほかならない。単なる「作用」と違うのは、作用のもたらす変換 $\rho(g)$ が線形作用素である点だけである。

Definition 2.2 (商表現) (ρ, V) が G の表現であって、$U \subset V$ が不変部分空間 (部分表現) であるとき、商ベクトル空間 V/U に次のように線型写像 $\tau(g)$ を定義する。

$$\tau(g)(v + U) = \rho(g)v + U \qquad (g \in G, v \in V)$$

これはまた G の表現になるので、この表現 $(\tau, V/U)$ を V の U による**商表現**と呼ぶ。表現の作用素 $\tau(g)$ を単に $\rho(g)$ で代用することも多い。

さて、次の補題は既約表現の有限次元性について述べていて、結論は、コンパクト群の表現に対して正しい。

Lemma 2.3 有限群 G の既約表現 V は有限次元である。

PROOF. $\forall v \in V, \neq 0$ を取り、$\{gv \mid g \in G\}$ より張られた部分空間 U を考える。明らかにこの部分空間は有限次元であって、しかもゼロではない不変部分空間になっているから、V に一致する。したがって、$V = U$ は有限次元。[3] Q.E.D.

Example 2.4 $V = \mathbb{C}$ として、$\rho(g) = 1$ とおくと、$(\rho, \mathbb{C})$ は既約表現になる。これを**自明な表現**と呼ぶ。

Definition 2.5 (不変元) V を G の表現とする。このとき $v \in V$ が G **不変元**である[4] とは、$\rho(g)v = v$ が成り立つことを言う。V の G 不変元の全体を V^G で表す。

不変元とは、つまりそのベクトルが生成する一次元の部分空間が G の自明な表現になっているということに他ならない。したがって、V^G は V の中の自明な部分表現をすべて集めてきたようなものと思ってよい。もちろん自明な表現それ自身はつまらないが、しばしば不変元の全体 V^G は表現論において重要な役割を果たす。それは後ほど明らかになるだろう。

Example 2.6 (有限) 集合 X に G が作用していたとし、

$$\mathbb{C}X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}x = \Big\{ \sum_{x \in X} a_x x \mid a_x \in \mathbb{C} \Big\}$$

で X の元を基底とするような形式的な一次結合の全体のなすベクトル空間を表す。このとき、$\rho(g)x = gx$ とおいてこれを線型に拡張すれば、$(\rho, \mathbb{C}X)$ は G の表現になる。これを**置換表現**と呼ぶ。

Exercise 2.7 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ と置き、$G = \mathfrak{S}_n$ を自然に X に作用させる。

(1) 上で定義した置換表現 $(\rho, \mathbb{C}X)$ の自然な基底 $\{1, 2, \ldots, n\}$ に関する行列表示 (表現の作用素) を求めよ。このような行列は、各行各列に 1 が一つだけあり、残りは全てゼロになるような $n \times n$ 行列である。これを**置換行列**と呼ぶ。

(2) G 不変元をすべて求めよ。(つまり $(\mathbb{C}X)^G$ を求めよ。)

(3) 置換表現 $(\rho, \mathbb{C}X)$ は既約ではないことを示せ。また、商表現 $\mathbb{C}X/(\mathbb{C}X)^G$ は既約になることを示せ。

Definition 2.8 (双対表現) (ρ, V) が G の表現であるとき、V の双対空間 $V^* = \{\psi : V \to \mathbb{C} : \text{線型}\}$ は自然に G の表現の構造を持つ。それは次のように定義される。

$$(\rho^*(g)\psi)(v) = \psi(\rho(g^{-1})v) \qquad (g \in G, \psi \in V^*, v \in V)$$

つまり $\rho^*(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$ である。この表現 (ρ^*, V^*) を (ρ, V) の**双対表現**と呼ぶ。

Exercise 2.9 既約表現の双対表現が既約であることを証明せよ。

---

[3] 証明より $\dim V \leq \#G$ がわかるが、後でもっと強力な定理を証明するので、これはまぁどうでもよい。

[4] 不変部分空間とまぎらわしい用語なので注意せよ。不変元と不変部分空間は本質的に異なる概念である。

Example 2.10 X に G が作用していたとする。$L(X)$ で X 上の複素数値関数の全体を表す。このとき $L(X) = (\mathbb{C}X)^*$ である。実際、$f(x) \in L(X)$ に対して、

$$\langle f, \sum_x a_x x \rangle = \sum_x a_x f(x)$$

とおけば、これが $\mathbb{C}X$ 上の線型形式を与える。このとき置換表現の双対表現は、

$$(\rho^*(g)f)(x) = f(g^{-1}x) \qquad (\text{これを } L_g f(x) \text{ と書く})$$

で与えられる。この表現を G の $L(X)$ 上の**左正則表現**と呼ぶ。

置換表現にせよ、正則表現にせよ、ある空間への群の作用があれば、それを線型化して表現が構成できることを示している。この方法は非常に強力で、表現論では基本的なものである。特に左正則表現は、G が連続群で、空間 X に位相構造や可微分構造、あるいは代数幾何的な構造などが入っているとき、それに対応する関数空間を考えることでさまざまなヴァリエーションを持つ。後ですべての既約表現は正則表現を経由して得られることを示す。

Definition 2.11 (テンソル積と Hom) $(\rho, V), (\sigma, W)$ を G の二つの表現とする。これから、次のようにして新しい表現を作り出すことができる。まず V と W のテンソル積 $V \otimes W$ を考え、表現の作用素 $\tau(g) = \rho(g) \otimes \sigma(g)$ を次のように定義する。

$$\tau(g)(\sum v \otimes w) = \sum \rho(g)v \otimes \sigma(g)w \qquad (v \in V, w \in W)$$

これが表現になることはほぼ明らかであろう。また $\mathrm{Hom}\,(V, W)$ には次のようにして表現の作用素を定義することができる。$\psi \in \mathrm{Hom}\,(V, W)$ に対して、

$$(\tau'(g)\psi)(v) = \sigma(g)\big(\psi(\rho(g)^{-1}v)\big) \qquad (v \in V)$$

と決める。これが表現になることは、簡単な計算で確かめられる。

Exercise 2.12 (1) $V^* = \mathrm{Hom}\,(V, \mathbb{C})$ であるが、 $\mathbb{C}$ を G の自明な表現とみなしたとき、双対表現は上で与えた $\mathrm{Hom}\,(V, \mathbb{C})$ 上の表現に一致する。

(2) $\mathrm{Hom}\,(V, W) \simeq V^* \otimes W$ と同一視したとき、これらは G の同じ表現を与えている。

さて、この演習問題でも出てきたが、二つの表現を「同じ」だと判断するような局面が以後頻出する。これは何も表現に限ったことではなく、何かを同一視して考えるということは数学の根底に横たわっている基本的な営みの一つである。

一見異なるように見える表現もその本質は同じであったり、あるいは二つの表現が全く一致しているわけではないが、共通の成分を含んでいたりする。このような二つの表現の関係を記述するのが、表現の間の準同型、あるいは intertwining 作用素と呼ばれている写像である。そこで、表現同志の間の準同型を定義しておこう。

Definition 2.13 (intertwiner) $(\rho, V), (\sigma, W)$ を G の二つの表現とする。このとき、線型写像 $T : V \to W$ が (G) **準同型**、あるいは **intertwinig 作用素**であるとは、

$$T \circ \rho(g) = \sigma(g) \circ T \qquad (g \in G)$$

が成り立つときに言う。また T が可逆であるなら、V と W は**同値な表現**であるといい、$V \simeq W$ と表す。intertwining 作用素の全体を $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ で表す。

簡単だが、以下本質的に使われる次の補題に注意しておこう。

Lemma 2.14 (ρ, V) および (σ, W) を G の有限次元表現とする。このとき $\mathrm{Hom}_G(V, W) \simeq (V^* \otimes W)^G$ が成り立つ。

Proof. 当たり前!! かなぁ。各自納得するまで考えてみること。 Q.E.D.

次の補題は Schur の補題と呼ばれる非常に有名、かつ有用な補題である。いろいろなヴァリエーションが知られているが、ここでは古典的な形で述べておこう。

Lemma 2.15 (Schur) (ρ, V) および (σ, W) を G の有限次元既約表現とする。このとき

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) \simeq \begin{cases} \mathbb{C} & V \simeq W \text{ のとき} \\ 0 & V \not\simeq W \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ。

Proof. まず $V = W$ のときに $\mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}1_V$ であることを示そう。実際 $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$ とすると、φ は固有値 λ に属する固有空間 $V_\lambda \neq 0$ を持つ。この固有空間は明らかに不変部分空間であるから、$V_\lambda = V$ である。つまり $\varphi = \lambda 1_V$ となる。

次に、$T : V \to W$ を intertwiner とすると、$\ker T$ および $\mathrm{Im}\, T$ はそれぞれ V および W の不変部分空間となる。これから、もし $T \neq 0$ なら、$\ker T = 0$ であって、しかも $\mathrm{Im}\, T = W$ となることがわかる。つまり T は同型である。このとき必然的に $V \simeq W$ でなければならない。

そこで $T, S \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ をどちらも零ではない元とすると、$S^{-1}T \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$ である。したがって $S^{-1}T = \lambda 1_V,\ T = \lambda S$ となって、$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = 1$ であることがわかる。 Q.E.D.

Corollary 2.16 (ρ, V) および (σ, W) を G の有限次元既約表現とする。このとき次が成り立つ。

$$(V^* \otimes W)^G \simeq \begin{cases} \mathbb{C} & V \simeq W \text{ のとき} \\ 0 & V \not\simeq W \text{ のとき} \end{cases}$$

3 表現の分解と完全可約性

表現論の目標の一つは次の問題である。

Problem 3.1 G のすべての表現を同値を除いて分類せよ。さらに、表現の同値類に対して、「よい」実現を与えよ。

有限群の場合には、この問題は「既約表現」に対してのみ考えればよい。その理由を以下で考えよう。

Definition 3.2 (直和) (ρ, V) と (σ, W) を二つの表現とするとき、ベクトル空間の直和 $V \oplus W$ に次のように G を作用させる。

$$\tau(g)(v \oplus w) = \rho(g)v \oplus \sigma(g)w \qquad (v \in V, w \in W)$$

これを二つの表現の**直和**と呼び、$(\rho \oplus \sigma, V \oplus W)$ で表す。

ある表現が部分表現の直和として表されるとき、その表現は部分表現の**直和に分解する**という。有限次元表現を部分表現の和にどんどん分解していくと、もうこれ以上分解できない表現に到達する (これは表現の有限次元性からの帰結である)。このような表現を**分解不能な表現**と呼ぶ。しかしそれは既約表現とは限らない。

Definition 3.3 (完全可約) G の表現 V が**完全可約**であるとは、V の任意の部分表現 U に対して、ある部分表現 U' が存在して、$V \simeq U \oplus U'$ となることを言う。

Lemma 3.4 有限次元表現 V が完全可約であることと、いくつかの既約表現の直和であることは同値である。

PROOF. $\dim V$ に関する帰納法で証明する。

まず V が完全可約であるとしよう。もし V 自身が既約であれば、何も証明することはない。既約でなければ、既約な部分表現 U が存在する。完全可約性により、$V \simeq U \oplus U'$ だが、$\dim U' < \dim V$ なので、帰納法の仮定により、U' は既約表現の直和である。

次に V が既約表現 $\{W_i \mid 1 \le i \le l\}$ の直和だったとしよう。

$$V \simeq \sum_{i=1}^{l}{}^{\oplus} W_i$$

任意の部分表現 U に対して、もし $U = W_1$ なら証明することはない。商表現 V/W_1 を考えると、これは既約表現の直和であって、しかも次元が真に小さいから、帰納法の仮定により完全可約である。したがって、$U' \subset V/W_1$ が存在して、$V/W_1 \simeq U/W_1 \oplus U'$ である。ただし U' は V の W_1 を含むような部分空間と同一視している。ここで $U \cap W_1$ はゼロまたは W_1 に一致することに注意すると、

$$\begin{aligned} U \cap W_1 = 0 &\Rightarrow V \simeq U \oplus U' \\ U \cap W_1 = W_1 &\Rightarrow V \simeq U \oplus U'' \qquad (U' = W_1 \oplus U'') \end{aligned}$$

となり、証明が完了する。ここで U' にも帰納法の仮定を適用した。 Q.E.D.

Lemma 3.5 G の有限次元表現 V が完全可約であれば、その既約分解は順序を除いて一意的である。

PROOF. $V = \sum_{i=1}^{\oplus r} m_i W_i$ と分解していたとする。ただし、$\{W_i \mid 1 \le i \le r\}$ は互いに同値でないような既約表現とし、m_i は W_i が V の分解に何度現れたかを示す非負整数である。(便宜的に W_i が分解に現れないときは $m_i = 0$ と決めておこう。) このとき、

$$m_j = \dim \mathrm{Hom}_G(W_j, V)$$

が成り立つ。もしこれが示されれば、主張は自ずと明らかである。

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(W_j, V) &= (W_j^* \otimes V)^G = (\sum_i^{\oplus} m_i W_j^* \otimes W_i)^G \\ &= \sum_i^{\oplus} m_i (W_j^* \otimes W_i)^G = \sum_i^{\oplus} m_i \delta_{ij} \mathbb{C} = \mathbb{C}^{m_j}\end{aligned}$$

この式の両辺の次元を比較すればよい。 Q.E.D.

Exercise 3.6 上の補題の証明では、暗黙のうちに $(U \oplus W)^G = U^G \oplus W^G$ であることを用いた。ただし、もちろん U, W は V の不変部分空間である。これを証明せよ。

Definition 3.7 (重複度) 完全可約な (有限次元) 表現 V の既約分解に現れる既約表現 W の回数を、W の V における**重複度**と呼び、記号で $[V : W]$ と表す。

上の補題の証明より、重複度は

$$[V : W] = \dim \mathrm{Hom}_G(W, V)$$

で与えられることがわかる。そこで、V が有限次元でなくても、また、W が既約でなくても同じ式で、形式的に重複度 $[V : W]$ を定義しておくと便利である。

以上をまとめて次の定理を得る。この定理は、有限次元表現の既約分解の最終的な結論である。それだけでなく、後で道具としても非常に役に立つ、表現論のもっとも重要な定理 (あるいは認識) の一つといえる。

Theorem 3.8 G を有限群とする。W を G の有限次元表現とするとき、その既約分解は次のように与えられる。

$$W \simeq \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)}^{\oplus} \mathrm{Hom}_G(V_\pi, W) \otimes V_\pi$$

ここで、$\mathrm{Hom}_G(V_\pi, W)$ は既約表現 π の W における重複度を表し、$\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V_\pi, W), v \in V_\pi$ に対して同型は$\varphi \otimes v \mapsto \varphi(v)$ で与えられる。また、$\mathrm{Irr}(G)$ は G の既約表現の同値類の全体を表す。

Remark 3.9 以下の注意は、初心者は当面気にしないほうがよかろう: 実は有限群に対しては W を特に有限次元としなくてもよい。しかし、一般にコンパクト群や代数群の正則表現を考えるときには、W を局所有限と仮定しなければ、この定理は正しくない。(補題 11.3 参照)

Proof. W が完全可約であると仮定して以下証明しよう。実は有限群の任意の有限次元表現は完全可約であるが、この事実はのちほど定理 4.6 で証明される。

右辺が W の既約分解を与えていることはすでに証明されている。問題は、定理中に与えられた写像が実際の同型を導くという部分である。そこで、この写像を T と書こう。つ

まり、単項のテンソルに対しては $T(\varphi \otimes v) = \varphi(v)$ であって、あとはこれを線型に拡張したものである。

まず T が intertwining 作用素になっていることはほぼ明らかであろう。ただし、重複度の空間 $\mathrm{Hom}_G(V_\pi, W)$ には G が自明に作用していることに注意しておく。

次に T がベクトル空間としての同型を導くことを見よう。そこで T が全射ではなかったとする。W は完全可約だから、$W = (\mathrm{Im}\, T) \oplus U$ となる不変部分空間 $U \neq \{0\}$ が存在するが、U の既約成分の一つを V_π としよう。もちろん V_π は W の既約成分でもある。また、$U = V_\pi \oplus U'$ と書いたとき、写像 $\varphi : V_\pi \hookrightarrow U \hookrightarrow W$ はもちろん $\mathrm{Hom}_G(V_\pi, W)$ のゼロでない元である。ところが、$\varphi(V_\pi) \subset (\mathrm{Im}\, T) \cap U = \{0\}$ となって矛盾である。W は有限次元で、W と定理の式の右辺の次元は等しいから、T の単射性が従う。 Q.E.D.

4 有限群の群環

さて、群の表現 V を時として G 加群と呼ぶ。これは環論的な用語を借用していると思ってもよいが、次のようにして群環を定義し、V を群環の環論的な意味での「加群」と思うことができるのである。

Definition 4.1 (群環) G の元の (複素係数の) 形式的な一次結合全体を考え、和は形式的な和、積は G の積を元ごとに行なって (非可換) 代数の構造を入れる。これを G の**群環**と呼び、$\mathbb{C}G$ と書く。[5]

G は群環の可逆元からなる群の部分群になっていることに注意しよう。つまり $G \subset (\mathbb{C}G)^\times$ である。

Lemma 4.2 V を G の表現とするとき、これを自然に $\mathbb{C}G$ の表現に拡張することができる。また $\mathbb{C}G$ の表現 $\mathcal{V}$ に対して、作用を G に制限したものは G の表現となる。この二つの対応は互に他の逆を与え、G の表現の圏と、$\mathbb{C}G$ 加群の圏は自然に同値になる。

Remark 4.3 ここでいきなり圏 (category) が出てくるが、そのためには対象 (object) 間の準同型 (morphism) が定義されていなければならない。表現の間の準同型は intertwining 作用素、加群の間の準同型は $\mathbb{C}G$ 線型写像である。圏というと少し難しそうに聞こえるが、この講義ではあまり圏的な話は登場しないので、ま、無視してもよい。

Proof. 明らかなので省略する。 Q.E.D.

さて、群環というのは、G の各元に係数を掛けて和をとったものである。これは、見方を少し変えると、G の各元に対してある値を対応させる、つまり G 上の関数を考えること

[5] もちろん基礎体は複素数でなくてもよいし、「群環」という以上、係数は $\mathbb{Z}$ に取るというのが正しいかもしれない。ここでは $\mathbb{C}G$ は $\mathbb{C}$ 代数なのだが、慣例にしたがって群**環**と呼ぶ。

に他ならない (実はこの二つは双対的な概念ではあるが ...)。さて、G 上の関数 $f(g)$ に対して、その積分を定義しておくと便利である。

$$\int_G f(g)dg = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} f(g)$$

この積分を**不変積分**と呼ぶ。もちろん L^2 内積もこの積分に関して考えることができるし[6]、あるいは合成積や積分変換も定義できる。単なる和ではあるがこのように積分の形に書いておくと、後でコンパクト群や一般のリー群を考えるときに便利である。

群環と G 上の関数のなす空間との関係は、次の定理で与えられる。

Theorem 4.4 G 上の関数全体 $L(G)$ に合成積で積を定義したものと群環は、環として同型である。

Proof. δ_g で、g において $\#G$、その他の点では 0 になるような関数を表わそう[7]。このとき $\mathbb{C}G \ni g \mapsto \delta_g \in L(G)$ (を線型に拡張したもの) が定理における同型を与える。実際、線型空間としての同型になるのは明らかだから、積を保つことを見ればよい。

$$\begin{aligned}\delta_g \circ \delta_{g'}(x) &= \frac{1}{\#G}\sum_{h\in G}\delta_g(h)\delta_{g'}(h^{-1}x)\\ &= \delta_{g'}(g^{-1}x) = \delta_{gg'}(x)\end{aligned}$$

Q.E.D.

Remark 4.5 もし G が有限群でなくても、上の証明の一部は意味を持つ。たとえば、証明の最後の式は、一般の関数 f に対して

$$\delta_g \circ f(x) = f(g^{-1}x) = L_g f(x)$$

となることを示している。通常の関数空間 (たとえば連続関数とか、正則関数、あるいは L^p 関数など) にはもちろんデルタ関数は含まれていないが、この式は δ_g を掛けるということが、関数空間において左正則表現として解釈できることを意味している。もっともこれが合成積の本来の意味であった。

さて、G 上の不変積分の応用の一つとして、G の表現の完全可約性を示しておこう。

Theorem 4.6 G の有限次元表現 V は G 不変な Hermite 内積を持つ。つまり V 上の G の表現は**ユニタリ**である。したがって、V は完全可約となる。

[6]関数空間 L^p はこの場合、すべての関数のなす空間に一致する。さらに G に離散位相を入れておくと、これは連続関数の全体とも一致する。

[7]δ_g は本質的には **Dirac のデルタ関数**であるが、G の全体積を 1 に規格化したために、その値が $\#G$ となっている。

Proof. V 上の任意の非退化 Hermite 内積 $(\ ,\ )_0$ を取り、これを使って、新しい内積を

$$(v,w) = \int_G (gv, gw)_0 dg$$

で定義する。新しい内積が Hermite 内積であることは、非退化性を除いて簡単にわかる。非退化であることは、$(v,v) = 0$ とすると、$(gv,gv)_0 = 0$ $(\forall g)$ であることと、$(\ ,\ )_0$ の非退化性よりわかる。

またユニタリ表現では、不変部分空間の直交補空間がまた不変部分空間になっているので、完全可約である。ユニタリなら完全可約であることの証明には、V の有限次元性を使っていないことに注意しておく。 Q.E.D.

Corollary 4.7 G,H を二つの有限群とし、W を直積群 $G\times H$ の既約表現とする。このとき G の既約表現 V_π と H の既約表現 U_σ が存在して、$W = V_\pi \boxtimes U_\sigma$ と書ける。ここで $V_\pi \boxtimes U_\sigma$ は**外部テンソル積表現**を表し、 表現空間は $V_\pi \otimes U_\sigma$、表現の作用素は $(\pi\boxtimes\sigma)(g,h)\, v\otimes u = \pi(g)v\otimes\sigma(h)u$ で与えられる。

Proof. 定理 3.8 によって、W は G の表現として、

$$W\!\downarrow_G \simeq \sum_{\pi\in\mathrm{Irr}(G)}^{\oplus} \mathrm{Hom}_G(V_\pi, W)\otimes V_\pi$$

と分解される。各重複度の空間 $\mathrm{Hom}_G(V_\pi, W)$ は H の表現になるから、W の既約性によって、$\mathrm{Hom}_G(V_\pi, W) \neq 0$ となるただ一つの $\pi\in\mathrm{Irr}(G)$ が存在する。もし $U_\sigma = \mathrm{Hom}_G(V_\pi, W)$ が H の表現として既約でないならば、完全可約性より U_σ を二つ以上の既約成分に分解できることになる。しかしこれは W の既約性に反する。 Q.E.D.

Exercise 4.8 $(\pi,V),(\sigma,U)$ を G の表現とする。直積群 $G\times G$ の外部テンソル積表現 $\pi\boxtimes\sigma$ を考え、それを**対角型部分群** $\Delta G = \{(g,g) \mid g\in G\}\subset G\times G$ に制限したものが G の表現の**(内部) テンソル積表現** $\pi\otimes\sigma$ である。これを確認せよ。

さて、いよいよ群環の構造の一番重要な性質を証明しよう。まず群環 $\mathbb{C}G$ は左右からの G の元のかけ算によって G 加群と思えることに注意しよう。つまり、$\mathbb{C}G$ は G の表現空間である。しかも左からのかけ算と右からのかけ算は互いに可換であるから、これを $G\times G$ の表現であると思ってよい。

Theorem 4.9 $\mathbb{C}G$ は $G\times G$ の表現として、

$$\mathbb{C}G \simeq \sum_{\pi\in\mathrm{Irr}(G)}^{\oplus} V_\pi \boxtimes V_\pi^*$$

と分解する。

Proof. G 上の関数の空間 $L(G)$ が

$$L(G) \simeq \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)}^{\oplus} V_\pi^* \boxtimes V_\pi$$

と分解することを示そう。$\mathbb{C}G$ は $L(G)$ の双対空間だから (例 2.10 参照)、これから定理は従う。

そこでまず**右正則表現として** $L(G)$ を既約分解すれば

$$L(G) \simeq \sum_{\pi}^{\oplus} \mathrm{Hom}_G(V_\pi, L(G)) \otimes V_\pi$$

であることに注意しよう。このとき $\mathrm{Hom}_G(V_\pi, L(G))$ が G の**左正則表現として** V_π^* と同型であることを示せばよい。同型は具体的に次の写像で与えられる。

$$T : \mathrm{Hom}_G(V_\pi, L(G)) \ni \psi \longmapsto \psi(\cdot)(e) \in V_\pi^*$$

ただし $e \in G$ は単位元である。これを示せば証明は完結する。

まずこの写像が G-intertwiner であることを示そう。実際 $g \in G, v \in V_\pi$ とすれば、

$$T(g \cdot \psi)(v) = \big((g \cdot \psi)(v)\big)(e) = \psi(v)(g^{-1} \cdot e) = \psi(g^{-1}v)(e) = T(\psi)(g^{-1}v)$$

であるから intertwining 作用素になっている。

次に T の単射性を見よう。実際 $T(\psi) = 0$ とすると、$\psi(v)(e) = 0$ ($\forall v \in V_\pi$) だが、これより、$\psi(v)(g) \equiv 0$、$\psi = 0$ がわかる。全射性は $V_\pi^* \ni v^*$ に対して、$\psi(v)(g) = \langle v^*, gv \rangle$ とおくと、定義より $T(\psi) = v^*$ となることからわかる。 Q.E.D.

Corollary 4.10 $G \times G$ の表現として、$\mathbb{C}G \simeq L(G)$ である。いま、$G \overset{\Delta}{\hookrightarrow} G \times G$ を対角線埋め込みとして、この埋め込みで $\mathbb{C}G$ および $L(G)$ を G 加群と思うと、その不変元は

$$(\mathbb{C}G)^{\Delta G} \simeq L(G)^{\Delta G} \simeq \mathbb{C}^{\#\mathrm{Irr}(G)}$$

となる。ΔG の G への作用は随伴作用に他ならないので、$L(G)^{\Delta G}$ は各共役類上の特性関数を基底に持つ。したがって

$$\#\mathrm{Irr}(G) = \#(G \text{ に含まれる共役類})$$

が成り立つ。

さて、定理 4.9 の証明を詳細に眺めると、次の系が得られる。

Corollary 4.11 次の写像 T_π (を線型に拡張したもの) は、$G \times G$ の表現として $V_\pi^* \otimes V_\pi$ の $L(G)$ への埋め込みを与える。

$$T_\pi : V_\pi^* \otimes V_\pi \ni v^* \otimes v \mapsto \langle v^*, \pi(g)v \rangle \in L(G)$$

PROOF. 一応 intertwiner になっているかどうかだけを確認しておこう。

$$\begin{aligned}T_\pi(\pi^*(g_L)v^* \otimes \pi(g_R)v) &= \langle \pi^*(g_L)v^*, \pi(g)\pi(g_R)v\rangle \\ &= \langle v^*, \pi(g_L^{-1}gg_R)v\rangle = L(g_L)R(g_R)\langle v^*, \pi(g)v\rangle\end{aligned}$$

Q.E.D.

この関数 $\langle v^*, \pi(g)v\rangle$ を表現 π の**行列要素**と呼ぶ。定理 4.9 は結局、$L(G)$ が行列要素で生成されていることを主張しているのである。

5 指標と行列要素

表現の行列要素はいわば表現そのものであるから、表現の性質を研究する際には一番基本的な対象である。また、リー群の表現であれば、行列要素が何らかの興味深い特殊関数になっていることも少なくない。この節では行列要素と、その特別な場合である指標について基本的な事項を紹介しよう。まず、次の行列要素の直交関係式から始める。

Theorem 5.1 (行列要素の直交関係式) 二つの既約表現 $\pi, \sigma \in \mathrm{Irr}(G)$ を考える。このとき、$v \in V_\pi$, $v^* \in V_\pi^*$ と $u \in V_\sigma$, $u^* \in V_\sigma^*$ に対して、

$$\int_G \langle v^*, \pi(g^{-1})v\rangle\langle u^*, \sigma(g)u\rangle \, dg = \begin{cases} 0 & \pi \not\simeq \sigma \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{\dim V_\pi}\langle u^*, v\rangle\langle v^*, u\rangle & \pi = \sigma \text{ のとき}\end{cases}$$

が成り立つ。

PROOF. まず $\pi \not\simeq \sigma$ と仮定しよう。このとき、

$$\int_G \pi^*(g)v^* \otimes \sigma(g)u \, dg \in (V_\pi^* \otimes V_\sigma)^G = \{0\}$$

だから、

$$\begin{aligned}0 &= \langle v \otimes u^*, \int_G \pi^*(g)v^* \otimes \sigma(g)u \, dg\rangle \\ &= \int_G \langle v, \pi^*(g)v^*\rangle\langle u^*, \sigma(g)u\rangle \, dg = \int_G \langle v^*, \pi(g^{-1})v\rangle\langle u^*, \sigma(g)u\rangle \, dg\end{aligned}$$

である。

次に $\pi = \sigma$ とする。このときは

$$\int_G \pi^*(g)v^* \otimes \pi(g)u \, dg \in (V_\pi^* \otimes V_\pi)^G = \mathbb{C}\mathbf{1}_\pi \tag{5.1}$$

となる。ここで、$\mathbf{1}_\pi$ は $(V_\pi^* \otimes V_\pi)^G \simeq \mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\pi)$ の恒等写像に対応する元である。そこで、左辺を $\lambda \mathbf{1}_\pi$ とおき、$\mathrm{Hom}\,(V_\pi, V_\pi)$ の元とみなしてその trace をとろう。このとき $\mathrm{trace}\,(v^* \otimes u) = \langle v^*, u\rangle$ であることに注意しておく (演習問題)。すると、

$$\lambda \dim V_\pi = \int_G \langle \pi^*(g)v^*, \pi(g)u\rangle\, dg = \int_G \langle v^*, u\rangle\, dg = \langle v^*, u\rangle$$

であることがわかる。また $\langle v \otimes u^*, \mathbf{1}_\pi\rangle = \mathrm{trace}\,(v \otimes u^*) = \langle u^*, v\rangle$ なので (これも演習問題)、(5.1) の左辺を $\lambda \mathbf{1}_\pi$ とおいたものと $v \otimes u^*$ との pairing をとれば、

$$\begin{aligned}
\lambda \langle u^*, v\rangle &= \langle v \otimes u^*, \lambda \mathbf{1}_\pi\rangle \\
&= \int_G \langle v \otimes u^*, \pi^*(g)v^* \otimes \pi(g)u\rangle\ dg \\
&= \int_G \langle \pi^*(g)v^*, v\rangle \langle u^*, \pi(g)u\rangle\ dg \\
&= \int_G \langle v^*, \pi(g^{-1})v\rangle \langle u^*, \pi(g)u\rangle\ dg
\end{aligned}$$

一方において、$\lambda = \langle v^*, u\rangle / \dim V_\pi$ なのであった。 Q.E.D.

この定理は、正則表現 $L(G) = L^2(G)$ の分解において、各既約成分 $V_\pi^* \otimes V_\pi$ は、L^2 内積について直交していることを示している。コンパクト群の表現論では特にこの直交性がよく利用される。

Exercise 5.2 同型 $T : V^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}\,(V, V)$ を $T(v^* \otimes v)(u) = \langle v^*, u\rangle v$ となるようなものとして定める (線型に拡張する)。このとき次を示せ。

(1) $\mathrm{trace}\, T(v^* \otimes v) = \langle v^*, v\rangle$

(2) $\langle u \otimes u^*, T^{-1}(\mathrm{id}_V)\rangle = \mathrm{trace}\, T(u^* \otimes u) = \langle u^*, u\rangle$

次に、行列要素の中でも特別な意味を持つ指標を導入しよう。

Definition 5.3 (指標) (π, V_π) を G の有限次元表現とする。このとき

$$\chi_\pi(g) = \mathrm{trace}\, \pi(g) \qquad (g \in G)$$

を表現 π の**指標**と呼ぶ。 とくに、π が既約のとき、χ_π を既約指標と呼ぶ。

指標は G 上の**類関数**、つまり $L(G)^{\Delta G}$ の元である。

Exercise 5.4 V_π の基底を $\{v_i\}_{i=1}^d$ として、その双対基底を $\{v_i^*\}_{i=1}^d \subset V_\pi^*$ とする。このとき、

$$\chi_\pi(g) = \sum_{i=1}^d \langle v_i^*, \pi(g)v_i\rangle$$

であることを示せ。このことから、π が既約のときには、

$$T_\pi : V_\pi^* \otimes V_\pi \ni \sum_{i=1}^{d} v_i^* \otimes v_i \longmapsto \chi_\pi \in L(G)$$

となることがわかる。ここで T_π は系 4.11 で定義された写像である。

既約指標 χ_π はこの後の話でもわかるように、表現 π そのものを決定してしまう。その意味で χ_π には π の情報が全てつまっていると考えてもよい。可約な表現の指標についても同様で、完全可約性のおかげで、やはり表現の同型類は指標によって決まってしまうのである。以下にすでに出てきた表現の間の操作と指標との関係を述べておく。どれも簡単なので、証明は省略する。

恒等表現	$\chi_{\mathbf{1}}(g) = 1$ (定数関数)
直和	$\chi_{\pi\oplus\rho} = \chi_\pi + \chi_\rho$
テンソル積	$\chi_{\pi\otimes\rho} = \chi_\pi \cdot \chi_\rho$
商表現	$\chi_{\pi/\rho} = \chi_\pi - \chi_\rho$
制限	$\chi^H_{\pi\downarrow_H} = \chi^G_\pi\downarrow_H$
双対表現	$\chi_{\pi^*}(g) = \chi_\pi(g^{-1})$

簡単だが重要な例を挙げる。

Example 5.5 G の $\mathbb{C}G$ 上の左正則表現を考えるとき、$\chi_{(L,\mathbb{C}G)} = \delta_e$ が成り立つ。ここで、$e \in G$ を単位元として、δ_e は、単位元で $\#G$、その他の点でゼロとなるような関数を表す。つまり δ_e は単位元における Dirac **のデルタ関数**である。

Example 5.6 $\mathbb{C}G$ を $G \times G$ の表現と考えるとき、

$$\chi_{(L\times R,\mathbb{C}G)}(g_1, g_2) = \begin{cases} \#Z_G(g_2) & g_1 \sim g_2 \text{ 共役のとき} \\ 0 & g_1 \not\sim g_2 \text{ 共役でないとき} \end{cases}$$

となる。実際、$\chi_{(L\times R,\mathbb{C}G)}(g_1, g_2)$ の値は、$\mathbb{C}G$ の基底を G の元で取ればわかるように、

$$\#\{x \in G \mid g_1 x g_2^{-1} = x\} = \#\{x \in G \mid g_1 = x g_2 x^{-1}\}$$

であって、これは $g_1 \not\sim g_2$ ならゼロ、g_1, g_2 が共役のときには中心化群 $Z_G(g_2)$ の位数に一致する。

異なる表現に属する行列要素は L^2 内積に関して直交しているので、指標についても同様の事実が成り立つ。

Theorem 5.7 (指標の直交関係) $(\pi, V_\pi), (\sigma, V_\sigma)$ を G の二つの既約表現とする。このとき、次の関係式が成り立つ。

$$\int_G \chi_\pi(g^{-1})\chi_\sigma(g)\,dg = \begin{cases} 0 & \pi \not\simeq \sigma \text{ のとき} \\ 1 & \pi = \sigma \text{ のとき} \end{cases}$$

Proof. 演習 5.4 と定理 5.1 より明らか。 Q.E.D.

Corollary 5.8 $(\pi, V_\pi), (\sigma, V_\sigma)$ を G の既約表現とすると、

$$\int_G \chi_\pi(g^{-1})\sigma(g)\,dg = \begin{cases} 0 & \pi \not\simeq \sigma \text{ のとき} \\ \dfrac{1}{\dim V_\pi}\,\mathrm{id}_{V_\pi} & \pi = \sigma \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ。

Proof. 左辺の積分が σ から自分自身への intertwiner であることがすぐにわかる。したがって、左辺は $\lambda\,\mathrm{id}_{V_\sigma}$ と書けているが、両辺の trace を取って、指標の直交関係を用いると、$\lambda \dim V_\sigma = \delta_{\pi,\sigma}$ (Kronecker の δ) であることがわかる。 Q.E.D.

Corollary 5.9 (π, V_π) を G の既約表現、(ρ, U) を有限次元表現とすると、

$$P_\pi = \dim V_\pi \int_G \chi_\pi(g^{-1})\rho(g)\,dg : U \to U$$

は、U の π 成分への射影作用素になる。

Proof. U の π 成分とは、$\mathrm{Hom}_G(V_\pi, U) \otimes V_\pi \ni \varphi \otimes v \mapsto \varphi(v) \in U$ の像のことを指す。あるいは

$$\sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V_\pi, U)} \mathrm{Im}\,\varphi$$

のことであると言ってもよい。特に始めの方の表示から、P_π が π 成分への射影であることは明らかであろう。 Q.E.D.

Exercise 5.10 $L(G) \simeq \sum^{\oplus}{}_{\pi} V_\pi^* \otimes V_\pi$ であった。このとき、$f(g) \in L(G)$ に対して、

$$\dim V_\pi \int_G \chi_\pi(x^{-1}) f(gx)\,dx = \dim V_\pi \int_G \chi_\pi(x) f(x^{-1}g)\,dx$$

は $V_\pi^* \otimes V_\pi$ 成分への射影を表すことを示せ。特に、

$$\dim V_\pi \int_G \chi_\pi(x)\chi_\pi(gx^{-1})\,dx = \chi_\pi(g)$$

が成り立つ。したがって $\chi_\pi / \dim V_\pi$ は $L(G)$ において、合成積に関して**べき等元**になる。

Exercise 5.11 $e \in G$ を単位元として、δ_e で Dirac のデルタ関数を表す。このとき、

$$\delta_e = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)} \dim V_{\pi^*} \cdot \chi_\pi$$

であることを示せ。例 5.5 と指標の直交関係より、このことから

$$\mathbb{C}G \simeq \sum_{\pi}^{\oplus} \dim \pi^* \cdot \pi$$

であることが再確認される。

6 誘導表現と Frobenius の相互律

群の表現に対する操作として、様々なものを見てきた。復習しておくと、次のようなものがあった。

部分表現、商表現、双対表現、テンソル積、Hom 、直和

また、表現を構成する手段としては、

置換表現、(左) 正則表現、テンソル積の分解

などが考えられる。この節では、その延長として、G の部分群 H の表現から G の表現を作り出すこと、つまり表現の誘導を考えよう。誘導表現を代数的に手っ取り早く定義するには群環を使うのがよい。

Definition 6.1 (誘導表現・その 1) (τ, U_τ) を H の表現とするとき、τ の H から G への**誘導表現**を、表現空間としては、

$$\mathrm{ind}_H^G \tau = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} U_\tau$$

と置き、表現の作用素としては $\mathbb{C}G$ への左からの積を考えることで定義する。

Example 6.2 (置換表現) X に G が推移的に作用している場合を考える。このとき $x \in X$ に対して、$H = G_x$ (x における固定部分群) とおくと、G の $\mathbb{C}X$ への置換表現は

$$\mathbb{C}X \simeq \mathrm{ind}_H^G \mathbf{1}_H$$

と同型である。ただし $\mathbf{1}_H$ は H の自明な表現を表す。特に $\mathbb{C}G$ 上の G の左からの積で定義される左正則表現は $\mathrm{ind}_{\{e\}}^G \mathbf{1}_{\{e\}}$ に等しい。

Exercise 6.3 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ を n 変数の多項式環とする。このとき k $(1 \leq k \leq n)$ を固定して、$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n)$ の形の単項式全体で生成される有限次元部分空間を W で表すと、変数の置換による $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ への作用によって、W は不変部分空間となる。このとき、

$$W \simeq \operatorname{ind}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}}^{\mathfrak{S}_n} \mathbf{1}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}}$$

であることを示せ。W の Grassmann 多項式版を定式化して、それを誘導表現の形に表せ。

表現の既約分解は表現論において一番基本的な問題の一つである。誘導表現の既約分解を与えるのが次の定理であるが、同時にこの定理は表現の誘導と制限が互いに双対な概念であることを示している。

Theorem 6.4 (Frobenius の相互律) 誘導表現は次のように分解する。

$$\operatorname{ind}_H^G \tau \simeq \sum_{\pi \in \operatorname{Irr}(G)}^{\oplus} \operatorname{Hom}_H(\pi\downarrow_H, \tau) \otimes V_\pi$$

あるいはこれは次のように書き表してもよい。

$$\operatorname{Hom}_G(\pi, \operatorname{ind}_H^G \tau) \simeq \operatorname{Hom}_H(\pi\downarrow_H, \tau) \qquad (\forall \pi \in \operatorname{Irr}(G))$$

Remark 6.5 誘導表現や、**表現の制限**は G の表現の圏から H の表現の圏への関手と思うことができる。このように思うとき、定理の第 2 式は、表現の誘導と制限が互いに随伴的になっていることを示している。

Proof.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_G(\pi, \operatorname{ind}_H^G \tau) &= \Big(V_\pi^* \otimes \big(\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} U_\tau\big)\Big)^G \\
&= \sum_{\sigma \in \operatorname{Irr}(G)}^{\oplus} (V_\pi^* \otimes V_\sigma)^G \otimes \big(V_\sigma^* \otimes_{\mathbb{C}H} U_\tau\big) \\
&= (V_\pi^* \otimes U_\tau)^H = \operatorname{Hom}_H(V_\pi, U_\tau)
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Exercise 6.6 誘導表現と表現の制限を G の表現の圏から H の表現の圏への関手と思うとき、表現間の準同型に対してどのように誘導や制限を定めたらよいか考えよ。

Exercise 6.7 (群環の既約分解と Frobenius の相互律) 本文では、$G \times G$ の表現としての、群環 $\mathbb{C}G$ の分解より Frobenius の相互律を導いているが、逆に Frobenius の相互律を仮定するならば、$\mathbb{C}G$ の分解が次のようにして得られる。つまりこの二つは同値な命題である。

(1) $\Delta G \hookrightarrow G \times G$ を対角埋め込みとし、ΔG を $G \times G$ の部分群とみなす。このとき、次の同型を示せ。

$$\mathbb{C}G \simeq \operatorname{ind}_{\Delta G}^{G \times G} \mathbf{1}_{\Delta G}$$

(2) $(V_\pi \otimes V_\sigma^*)^G$ は $\pi \not\simeq \sigma$ ならゼロ、$\pi = \sigma$ なら $\mathbb{C}$ であること (Schur の補題) と Frobenius の相互律を用いて $\mathbb{C}G$ を既約分解せよ。

群環の双対空間である関数空間 $L(G)$ を用いて誘導表現を定義することもできる。この二つの定義は G が有限群でない場合には全く異なった結果を与えることになる。有限群以外では、この関数空間を用いた定義の方が自然で、しかも関数空間を取り替えることにより、様々なヴァリエーションを持つので便利である。

Definition 6.8 (誘導表現・その 2) H の表現 (τ, U_τ) に対して、$L_\tau(G)$ を

$$L_\tau(G) = \{f : G \to U_\tau \mid f(gh) = \tau(h)^{-1} f(g) \quad (h \in H, g \in G)\}$$

で定める。この空間に G の表現を左正則移動 $L_g f(x) = f(g^{-1}x)$ で定めよう。この表現を τ の G への誘導表現と呼び、$\mathrm{Ind}\,_H^G\tau$ で表す。

Lemma 6.9 $\mathrm{ind}\,_H^G\tau \simeq \mathrm{Ind}\,_H^G\tau$ が成り立つ。

Proof. $T : L_\tau(G) \to \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} U_\tau$ を $f \in L_\tau(G)$ に対して、

$$T(f) = \int_G g \otimes f(g)\, dg \in \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} U_\tau$$

と決めよう。これが intertwiner になることはすぐに確認できる。また $S : \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} U_\tau \to L_\tau(G)$ を

$$S(g \otimes u)(x) = \int_H \tau(h)^{-1} u \delta_{gh}(x)\, dh$$

で定義する。左辺が $L_\tau(G)$ に入っていることは容易に確かめることができ、これも intertwiner になっている。(演習問題)

そこで、T と S が互に逆写像であることが確かめられれば、補題の主張どおり、二つの表現は同型となる。実際それは次のように計算される。

$$\begin{aligned} S(T(f))(x) &= S(\int_G g \otimes f(g)\, dg)(x) = \int_G \int_H \tau(h)^{-1} f(g) \delta_{gh}(x)\, dhdg \\ &= \int_H \int_G f(gh) \delta_{gh}(x)\, dgdh = \int_G f(g) \delta_g(x) dg = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(S(g \otimes u)) &= T(\int_H \tau(h)^{-1} u \delta_{gh}\, dh) = \int_G x \otimes \int_H \tau(h)^{-1} u \delta_{gh}(x)\, dhdx \\ &= \int_H \int_G xh^{-1} \otimes \delta_g(xh^{-1}) u\, dxdh = \int_G x \otimes \delta_g(x) u\, dx = g \otimes u \end{aligned}$$

Q.E.D.

Proof. (第二の抽象的な証明)

$L_\tau(G) \simeq (L(G) \otimes \tau)^H$ (ただし、$L(G)$ は右移動によって H 加群と思う) が容易にわかる。ところが、$L(G) \simeq \mathbb{C}G$ であって、$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} U_\tau \simeq (\mathbb{C}G \otimes \tau)^H$ だから、両者は明らかに同型である。 Q.E.D.

もちろん第二の証明の方が簡明ではあるが、単に抽象的な同型がある、ということを述べているだけであって、具体的な同型写像は与えられない。一方最初の方の証明では、具体的な同型が積分作用素で与えられていることに注意したい。一方は議論を見通し良くし、他方は具体的な計算や、あるいは有限群以外の群の表現の場合への拡張などに役に立つ。

Exercise 6.10 π_1, π_2 を G の既約表現とする。また $H \subset G$ を部分群としよう。このとき、次の同型を示せ。

$$\mathrm{Hom}_G((\mathrm{Ind}_H^G \mathbf{1}) \otimes V_{\pi_1}, V_{\pi_2}) \simeq (V_{\pi_1}^* \otimes V_{\pi_2})^H$$

Definition 6.11 (誘導表現・その 3) ベクトル束の切断として実現する。本質的にはその 2 の定義と同じこと。余裕がないので省略する。

7 誘導表現と球関数

G を有限群、H, K をそれぞれ G の部分群としよう。さらに $(\sigma, U_\sigma), (\tau, W_\tau)$ でそれぞれ H, K の既約表現を表す。この節では、二つの誘導表現の間の intertwiner

$$T : \mathrm{Ind}_H^G \sigma \longrightarrow \mathrm{Ind}_K^G \tau$$

について調べてみよう。まずはこのような intertwiner を積分作用素の形で求めることから話をはじめる。そこで、

$$\alpha : g \to \mathrm{Hom}\,(U, W)$$

を積分核として、$f \in \mathrm{Ind}_H^G \sigma$ に対し、

$$T_\alpha(f)(g) = \int_G \alpha(x^{-1}g) f(x)\, dx \quad (g \in G) \tag{7.1}$$

の形で、 intertwiner を求めることにする。しかし、同時にこの段階では、T_α は 線型写像 $T_\alpha : L(G, U) \to L(G, W)$ を定めているに過ぎないことに注意しておく。ただし $L(G, U) =$ (G 上の U-値関数全体) などと書いた。

まず、$T_\alpha(f) \in \mathrm{Ind}_K^G \tau$ でなければならない。このための条件を調べよう。

Lemma 7.1 式 (7.1) で定義された積分作用素 $T_\alpha : L(G, U) \to L(G, W)$ の像が $\mathrm{Ind}_K^G \tau$ に属するための必要十分条件は、

$$\alpha(gk) = \tau(k)^{-1} \alpha(g) \qquad (g \in G, k \in K) \tag{7.2}$$

が成り立つことである。

PROOF. $k \in K$ に対して、$T_\alpha(f)(gk) = \tau(k)^{-1} T_\alpha(f)(g)$ でなければならない。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \int_G \alpha(x^{-1}gk) f(x)\,dx \\ &= (\text{右辺}) = \int_G \tau(k)^{-1}\alpha(x^{-1}g) f(x)\,dx\end{aligned}$$

これがすべての $f \in L(G, U)$ に対して成り立つから、(7.2) が従う。 Q.E.D.

次に、$f \in \operatorname{Ind}_H^G \sigma$ ならば、$f(gh) = \sigma(h)^{-1} f(g)$ を満たしているが、両者は $g \in G$ の関数として、同じものを表しているから、T_α はこれらの関数に対して同じ像をとるべきである。

$$\begin{aligned}T_\alpha(f)(g) &= \int_G \alpha(x^{-1}g) f(x)\,dx \\ &= \int_G \alpha((xh)^{-1}g) f(xh)\,dx \\ &= \int_G \alpha(h^{-1}x^{-1}g)\sigma(h)^{-1} f(x)\,dx\end{aligned}$$

これより、

$$\alpha(h^{-1}g) = \alpha(g)\sigma(h) \qquad (g \in G, h \in H) \tag{7.3}$$

であるべきである[8]。

Definition 7.2 (球関数) 条件 (7.2) 及び (7.3) を満たすような α の全体を H, K の表現に関して同変な**球関数**と呼び、$\mathcal{H}(H\backslash G/K; \sigma, \tau)$ で表す。つまり

$$\mathcal{H}(H\backslash G/K; \sigma, \tau) = \{\alpha : G \to \operatorname{Hom}(U_\sigma, W_\tau) \mid \alpha(hgk) = \tau(k)^{-1}\alpha(g)\sigma(h)^{-1}\}$$

である。特に σ, τ が自明な表現の時には、

$$\mathcal{H}(H\backslash G/K) = \{\alpha : G \to \mathbb{C} \mid \alpha(hgk) = \alpha(g)\}$$

と書いて、単に球関数と呼ぶ。

以下 α には条件 (7.2) 及び (7.3) を課して考えることにしよう。

Theorem 7.3 H, K-同変な球関数 $\alpha \in \mathcal{H}(H\backslash G/K; \sigma, \tau)$ に対して、$T_\alpha \in \operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G \sigma, \operatorname{Ind}_K^G \tau)$ である。さらに、この対応は同型

$$T_\bullet : \mathcal{H}(H\backslash G/K; \sigma, \tau) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G \sigma, \operatorname{Ind}_K^G \tau)$$

を与える。

[8] T_α が intertwiner であるためには、この要請は必要無い。しかし、この要請をしなければ、$\alpha \neq \alpha'$ であるにもかかわらず $T_\alpha = T_{\alpha'}$ となる場合が生じてしまう。

Proof. まず T_α が intertwiner であることを示す。

$$\begin{aligned} T_\alpha(L_g f)(x) &= \int_G \alpha(y^{-1}x) L_g f(y)\, dy \\ &= \int_G \alpha(y^{-1}x) f(g^{-1}y)\, dy \\ &= \int_G \alpha(y^{-1}g^{-1}x) f(y)\, dy = T_\alpha(f)(g^{-1}x) = \big(L_g T_\alpha(f)\big)(x) \end{aligned}$$

したがって、最初の主張は定理の直前の考察と合わせて証明された。

次に $T_\bullet$ が同型であることを示そう。それには $T_\bullet$ の逆写像 S を構成すればよい。そこで、まず $u \in U_\sigma$ に対して、$\delta_u \in \mathrm{Ind}\,_H^G \sigma$ を次のように定義する。

$$\delta_u(g) = \begin{cases} \dfrac{\#G}{\#H} \sigma(h)^{-1} u & g = h \in H \text{ のとき} \\ \qquad 0 & \text{その他} \end{cases}$$

さらに $A \in \mathrm{Hom}\,_G(\mathrm{Ind}\,_H^G \sigma, \mathrm{Ind}\,_K^G \tau)$ に対して、$S(A) : G \to \mathrm{Hom}\,(U_\sigma, W_\tau)$ を

$$\big(S(A)(g)\big)(u) = A(\delta_u)(g)$$

で定義する。このとき、容易に $S(A) \in \mathcal{H}(H\backslash G/K; \sigma, \tau)$ であることが示せる。

Exercise 7.4 上記設定の下で、次のことを示せ。

(1) $h \in H$ に対して、$\delta_{\sigma(h)u} = L_h \delta_u$ が成り立つ。

(2) $h \in H, k \in K$ に対して、$S(A)(hgk) = \tau(k)^{-1} S(A)(g) \sigma(h)^{-1}$ である。すなわち、$S(A) \in \mathcal{H}(H\backslash G/K; \sigma, \tau)$ が成り立つ。

この S が T の逆になっていることを示そう。

まず $S(T_\alpha) = \alpha$ であること。

$$\begin{aligned} \big(S(T_\alpha)(g)\big)(u) &= \big(T_\alpha(\delta_u)\big)(g) \\ &= \int_G \alpha(x^{-1}g) \delta_u(x)\, dx \\ &= \int_H \alpha(h^{-1}g) \sigma(h)^{-1} u\, dh = \alpha(g) u \end{aligned}$$

次に $T_{S(A)} = A$ となることを示そう。このためには、まず、$\mathrm{Ind}\,_H^G \sigma$ の (ベクトル空間としての) 生成系として、$L_y \delta_u$ $(y \in G/H, u \in U_\sigma)$ の形のものが取れることに注意しよう。したがって、$T_{S(A)}(L_y \delta_u) = A(L_y \delta_u)$ を示せば充分である。さらに、この両辺が intertwiner であることから、$y = e$ として十分である。

$$\begin{aligned} T_{S(A)}(\delta_u)(g) &= \int_G S(A)(x^{-1}g) \delta_u(x)\, dx \\ &= \int_H S(A)(h^{-1}g) \sigma(h)^{-1} u\, dh \\ &= \int_H S(A)(g) u\, dh = S(A)(g) u = A(\delta_u)(g) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Exercise 7.5 抽象的な形で、上の定理 7.3 を考えてみよう。Ind ではなく、ind で考えるほうがこの場合わかりやすいので、そうすることにする。

(1) $\mathrm{ind}\,_H^G\sigma = \mathbb{C}G \otimes_H U_\sigma$ であったことを思い出して、次の同型を示せ。ただし $\otimes_H$ は $\otimes_{\mathbb{C}H}$ を示すものとする。

$$\Big((\mathrm{ind}\,_H^G\sigma)^* \otimes (\mathrm{ind}\,_K^G\tau)\Big)^G \simeq U_\sigma^* \otimes_H \mathbb{C}G \otimes_K W_\tau$$

(2) 上式右辺と球関数の空間が同型であることを示せ。

$$U_\sigma^* \otimes_H \mathbb{C}G \otimes_K W_\tau \simeq \mathcal{H}(H\backslash G/K;\sigma,\tau)$$

(3) $\mathrm{Hom}\,_G(\mathrm{ind}\,_H^G\sigma, \mathrm{ind}\,_K^G\tau) \simeq \mathcal{H}(H\backslash G/K;\sigma,\tau)$ を結論せよ。

8 球関数の構成

この節では、具体的に $\mathcal{H}(H\backslash G/K;\sigma,\tau)$ の元をすべて構成することを考えよう。

まず G の (H,K)-両側分解を

$$G = \coprod_{g\in H\backslash G/K} HgK$$

と書いておこう。このとき $\alpha \in \mathcal{H}(H\backslash G/K;\sigma,\tau)$ は、各 $\alpha\big\downarrow_{HgK}$ を決めれば決まるが、さらに (H,K)-同変性により $A_g = \alpha(g)$ を決めれば決まる。ここで $A_g : U_\sigma \to W_\tau$ であることに注意しよう。

Lemma 8.1 両側剰余類 HgK 上の関数 α を、

$$\alpha(hgk) = \tau(k^{-1})A_g\sigma(h^{-1})$$

で矛盾なく決定できることと、

$$A_g\sigma(gkg^{-1}) = \tau(k)A_g \qquad (\forall k \in g^{-1}Hg \cap K) \tag{8.1}$$

が成り立つこととは同値である。

Proof. 矛盾なく決まっていたとする。すると、

$$\tau(k)^{-1}A_g\sigma(gkg^{-1}) = \alpha(gk^{-1}g^{-1}gk) = \alpha(g) = A_g$$

だから、証明すべき関係式 (8.1) が成り立っている。

逆に、関係式 (8.1) の方が成り立っていたとしよう。$h_1gk_1 = h_2gk_2$ と二通りの表し方があったとして、この両者に対して α が同じ値を与えることを示せばよい。これを少し変形すると、$g^{-1}h_2^{-1}h_1g = k_2k_1^{-1} \in K$ だから、

$$A_g\sigma(g(g^{-1}h_2^{-1}h_1g)g^{-1}) = \tau(k_2k_1^{-1})A_g, \quad \tau(k_2)^{-1}A_g\sigma(h_2)^{-1} = \tau(k_1)^{-1}A_g\sigma(h_1)^{-1}$$

となり、これは α が矛盾なく決定できることを示している。 Q.E.D.

いま、$N = g^{-1}Hg \cap K \subset K$ とおくと、これは K の部分群である。しかし、同時に N を抽象的な群と考えると、$H \cap gKg^{-1} \subset H$ とも同型である。この同型を通して、(σ, U_σ) を N の表現と考え、それを σ^g であらわそう。つまり

$$\sigma^g(k) = \sigma(gkg^{-1}) \quad (k \in N = g^{-1}Hg \cap K)$$

である。すると、上の補題の関係式 (8.1) は、A_g が σ^g と τ の間の intertwiner になっていることを示している。したがって

$$\{\alpha \in \mathcal{H}(H\backslash G/K; \sigma, \tau) \mid \operatorname{supp}\alpha \subset HgK\} \simeq \operatorname{Hom}_N(\sigma^g\big\downarrow_N, \tau\big\downarrow_N)$$

が成り立っている。以上をまとめて、

Theorem 8.2 球関数の空間は次の空間と同型である。

$$\mathcal{H}(H\backslash G/K; \sigma, \tau) \simeq \sum_{g \in H\backslash G/K}^{\oplus} \operatorname{Hom}_{g^{-1}Hg\cap K}(\sigma^g\big\downarrow_{g^{-1}Hg\cap K}, \tau\big\downarrow_{g^{-1}Hg\cap K})$$

特に $H = K$ が G の正規部分群のときを考えると、この場合には $KgK = gK$ かつ $g^{-1}Kg \cap K = K$ なので、上の定理より、

$$\mathcal{H}(H\backslash G/K; \sigma, \tau) \simeq \sum_{g \in G/K}^{\oplus} \operatorname{Hom}_K(\sigma^g, \tau)$$

が成り立つ。

Corollary 8.3 $K \subset G$ を正規部分群とし、τ を K の既約表現とする。$g \notin K$ に対して $\tau \not\simeq \tau^g$ が成り立っていることと、$\operatorname{Ind}_K^G\tau$ が G の既約表現であることは同値である。

この系を標語的に言い換えると次のようになる。商群 G/K が $\operatorname{Irr}(K)$ に $\tau^g(k) = \tau(gkg^{-1})$ で作用している。このとき、$\tau \in \operatorname{Irr}(K)$ を通る G/K-軌道が自由であることと、$\operatorname{Ind}_K^G\tau$ が既約であることは同値である。

Exercise 8.4 $\operatorname{Ind}_H^G\mathbf{1}$ が既約であることと、$H = G$ であることは同値であることを示せ。

Exercise 8.5 $H, K \subset G$ を部分群とするとき、$\operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G\mathbf{1}, \operatorname{Ind}_K^G\mathbf{1}) \neq 0$ (常に) である。また、$\operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G\mathbf{1}, \operatorname{Ind}_K^G\mathbf{1}) \simeq \mathbb{C}$ であることと、$G = H \cdot K$ であることとは同値である。この二つを示せ。一般に $G = H \cdot K$ のとき、$\operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G\sigma, \operatorname{Ind}_K^G\tau)$ はどのように記述されるだろうか?

球関数と intertwiner の対応のうち非常に特殊なものを考えてみよう。いま、$\alpha \in \mathcal{H}(H\backslash G/K;\sigma,\tau)$ であって、$\operatorname{supp}\alpha \subset H\cdot K$ であるようなものを考えよう。α はこの場合 $\alpha(e) = A : U_\sigma \to W_\tau$ によって決まる。ここで、上の考察により、

$$A \in \operatorname{Hom}_{H\cap K}(\sigma{\downarrow}_{H\cap K}, \tau{\downarrow}_{H\cap K}) \simeq (U_\sigma^* \otimes W_\tau)^{H\cap K}$$

であったことに注意しておく。

さて、α に対応する intertwiner $T_\alpha : \operatorname{Ind}_H^G\sigma \to \operatorname{Ind}_K^G\tau$ は

$$\begin{aligned} T_\alpha f(g) &= \int_G \alpha(x^{-1}g)f(x)\,dx \\ &= \int_G \alpha(x)f(gx^{-1})\,dx \quad (x^{-1}g \text{ を改めて } x \text{ と置いた}) \\ &= \int_{H\cdot K} \alpha(x)f(gx^{-1})\,dx \end{aligned} \tag{8.2}$$

ここで、α の同変性により、

$$\alpha(hx)f(g(hx)^{-1}) = \alpha(x)\sigma(h)^{-1}f(gx^{-1}h^{-1}) = \alpha(x)f(gx^{-1})$$

だから、上の積分は本質的には $H\backslash H\cdot K \simeq H\cap K\backslash K$ 上で行なえばよい。したがって、

$$\begin{aligned} (8.2) &= \frac{\#K}{\#G\cdot\#H\cap K}\int_{H\cap K\backslash K} \alpha(k)f(gk^{-1})\,dk \\ &= \frac{\#K}{\#G\cdot\#H\cap K}\int_{H\cap K\backslash K} \tau(k)^{-1}Af(gk^{-1})\,dk \\ &= \frac{\#K}{\#G\cdot\#H\cap K}\int_{K/H\cap K} \tau(k)Af(gk)\,dk \end{aligned}$$

となる。ただし、積分は次の意味に解釈する。$f(kn) = f(k)$ $(n \in N)$ となるような f に対して、

$$\int_{K/N} f(k)\,dk = \frac{\#N}{\#K}\sum_{k\in K/N} f(k) = \int_K f(k)\,dk$$

最初の定数倍は intertwiner としては別に影響がないから、まとめると次の定理を得る。

Theorem 8.6 $A \in \operatorname{Hom}_{H\cap K}(\sigma{\downarrow}_{H\cap K}, \tau{\downarrow}_{H\cap K}) \simeq (U_\sigma^* \otimes W_\tau)^{H\cap K}$ に対して、次の積分作用素

$$T_A f(g) = \int_{K/H\cap K} \tau(k)Af(gk)\,dk$$

は $\operatorname{Ind}_H^G\sigma$ から $\operatorname{Ind}_K^G\tau$ への intertwiner を与える。この対応 $A \to T_A$ は単射である。

Remark 8.7 積分作用素がいったん具体的に上のように与えられてしまえば、これが intertwiner であることを確認することは造作もないことである。したがって、これは G, H, K が例えばリー群でも成り立つ (ただし積分の収束性は問題となる)。積分の収束性を考えるときには、積分する空間を比較的小さな空間 $K/H\cap K$ に取る方が処理しやすい。このような積分作用素の具体的な応用例が [16, Lecture 6, p. 129] にある。

9　誘導表現と Hecke 環

Definition 9.1 (Hecke 環) 球関数の空間 $\mathfrak{H} = \mathcal{H}(K\backslash G/K)$ に、次のように合成積で積を定義する。

$$\alpha \circ \beta(g) = \int_G \alpha(x^{-1}g)\beta(x)\,dx \qquad (\alpha, \beta \in \mathfrak{H})$$

$\alpha \circ \beta \in \mathfrak{H}$ であることは容易に確認できる。$\mathfrak{H}$ を**(岩堀) Hecke 環**と呼ぶ。

Theorem 9.2 Hecke 環 $\mathfrak{H} = \mathcal{H}(K\backslash G/K)$ と intertwiner のなす環 $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_K^G \mathbf{1}, \mathrm{Ind}_K^G \mathbf{1})$ は同型である。

Proof. ベクトル空間としての同型はすでに証明されている。後は、この同型が積を保つことを言えばよいが、そもそも $T_\alpha(f) = \alpha \circ f$ が合成積で定義されているから、これは単に合成積の結合法則を主張しているに過ぎない。念のため、等式による確認を行なっておこう。

$$\begin{aligned}
T_\alpha\big(T_\beta(f)\big)(g) &= \int_G \alpha(x^{-1}g)T_\beta(f)(x)\,dx \\
&= \int_G \alpha(x^{-1}g)\int_G \beta(y^{-1}x)f(y)\,dy\,dx \\
&= \int_G \Big(\int_G \alpha(x^{-1}g)\beta(y^{-1}x)\,dx\Big) f(y)\,dy \\
&= \int_G \Big(\int_G \alpha(x^{-1}y^{-1}g)\beta(x)\,dx\Big) f(y)\,dy \\
&= \int_G \alpha \circ \beta(y^{-1}g) f(y)\,dy = T_{\alpha\circ\beta}(f)(g)
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Exercise 9.3 τ を K の有限次元既約表現として、$\mathfrak{H}_\tau = \mathcal{H}(K\backslash G/K; \tau, \tau)$ とおく。

(1) $\mathfrak{H}_\tau$ には上と全く同様にして合成積による積が定義できることを示せ。

(2) 次の環としての同型が存在することを示せ。

$$\mathfrak{H}_\tau \simeq \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_K^G \tau, \mathrm{Ind}_K^G \tau)$$

Hecke 環の表現論への応用[9]として、 Gelfand 対あるいは球部分群を考えよう。

Definition 9.4 (Gelfand 対) G とその部分群 K の組 (G, K) が **Gelfand 対**であるとは、両側 K-不変球関数の空間が合成積に関して可換環になるときに言う。つまり、 Hecke 環 $\mathfrak{H} = \mathcal{H}(K\backslash G/K)$ が可換であるとき、Gelfand 対と呼ぶのである。

[9]表現論の Hecke 環への応用?

定理 9.2 によって、(G, K) が Gelfand 対であることと、$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_K^G \mathbf{1}, \mathrm{Ind}_K^G \mathbf{1})$ が可換であることは同値である。

Theorem 9.5 (G, K) が Gelfand 対であるための必要十分条件は、$\mathrm{Ind}_K^G \mathbf{1}$ を G の表現として分解したとき、各既約成分の重複度が 1 (以下) であることである。

Proof. $\rho = \mathrm{Ind}_K^G \mathbf{1}$ のある既約成分が重複度 2 以上を持てば、その自己 intertwiners のなす環は非可換となる。したがって、$\mathrm{Hom}_G(\rho, \rho) = \mathfrak{H}$ が可換であれば、各既約成分の重複度は 1 以下である。

一方、もし各既約成分の重複度が 1 以下ならば、自己 intertwiners はすべて互いに可換である。実際それは Schur の補題より従う。 Q.E.D.

定理に現れるような、重複度が 1 以下という表現は重要であって、比較的よく現れる。そこでこのような表現に名前を付けておこう。

Definition 9.6 (重複度自由) G の表現 (ρ, U_ρ) を既約成分に分解したとき、その既約成分の重複度が 1 (以下) であるならば、ρ は**重複度自由**であると言われる。

Example 9.7 $L(G) = \mathbb{C}G = \mathrm{ind}_{\Delta G}^{G \times G} \mathbf{1}$ は、$G \times G$ の表現と考えるならば、重複度自由である。

定理 9.5 の証明で示したことを一般的な形でまとめておこう。

Lemma 9.8 ρ を G の表現とするとき、ρ が重複度自由であることと、$\mathrm{Hom}_G(\rho, \rho)$ が可換であることは同値である。

Frobenius の相互律と上の定理 9.5 を合わせて考えると、ただちに次の系を得る。

Corollary 9.9 (G, K) が Gelfand 対であるための必要十分条件は、任意の G の既約表現 V_π に対して、その K-不変元 V_π^K の次元が 1 以下であることである。

Definition 9.10 (球部分群) K を G の部分群とする。任意の G の既約表現 V_π に対して、$\dim V_\pi^K \leq 1$ となるとき、K を G の**球部分群**と呼ぶ。Frobenius の相互律により、これは $\mathrm{Ind}_K^G \mathbf{1}$ が重複度自由であることと同値である。

つまり上の系は、(G, K) が Gelfand 対であることと、K が球部分群であることが同値であることを示している。

10 誘導表現の指標

この節では、誘導表現の指標を求めよう。G が有限群なので、具体的に基底を取って表現の作用素 (左正則表現) の trace を求めることもそう難しくはないが、ここでは別のアプローチを試みる。

まず $\Xi = \mathrm{Ind}\,{}_H^G\sigma$ と書いておこう。すると Frobenius の相互律によって、

$$\begin{aligned}
\chi_\Xi(g) &= \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)} \dim(V_\pi^* \otimes \sigma)^H \chi_\pi(g) \\
&= \sum_\pi \int_H \chi_\pi^G(h^{-1})\chi_\sigma^H(h)\,dh\ \chi_\pi^G(g) \\
&= \int_H \sum_\pi \chi_\pi^G(g)\chi_\pi^G(h^{-1})\chi_\sigma^H(h)\,dh
\end{aligned}$$

ここで、$\sum_\pi \chi_\pi^G(g)\chi_\pi^G(h^{-1}) = \chi_{(L\times R, \mathbb{C}G)}(g,h)$ だから、

$$= \int_H \chi_{(L\times R,\mathbb{C}G)}(g,h)\chi_\sigma^H(h)\,dh$$

となっている。ここで例 5.6 を思い出すと、

$$\chi_{(L\times R,\mathbb{C}G)}(g,h) = \begin{cases} \#Z_G(g) & g \sim h : \text{共役のとき} \\ 0 & g \not\sim h : \text{共役でないとき} \end{cases}$$

だから、上の計算結果と合わせて、

$$\chi_\Xi(g) = \begin{cases} 0 & g \notin \bigcup_{x\in G} xHx^{-1} \\ & \\ (*) & g = x^\exists h_0 x^{-1} \text{ のとき} \end{cases}$$

である。ここで $(*)$ は上記積分の値を意味する。指標は類関数だから、結局この式より、$g = h_0 \in H$ の場合に $\chi_\Xi(h_0)$ が分かればよい。上記計算により、

$$\begin{aligned}
\chi_\Xi(h_0) &= \int_H \chi_{(L\times R,\mathbb{C}G)}(h_0,h)\chi_\sigma^H(h)\,dh \\
&= \frac{1}{\#H}\#Z_G(h_0) \sum_{\substack{x\in G/Z_G(h_0) \\ xh_0x^{-1}\in H}} \chi_\sigma^H(xh_0x^{-1}) \\
&= \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{x\in G \\ xh_0x^{-1}\in H}} \chi_\sigma^H(xh_0x^{-1}) \\
&= \frac{\#Z_G(h_0)}{\#H} \sum_{h\in \mathbb{O}_{h_0}\cap H} \chi_\sigma^H(h)
\end{aligned}$$

となる。ここで $\mathbb{O}_{h_0} = \mathrm{Ad}\,(G)\cdot h_0$ は h_0 を通る G 軌道、つまり h_0 の G 共役類全体を表わす。

以上をまとめておこう。

Theorem 10.1 (誘導表現の指標) G の部分群 H の表現 σ に対して、その指標を χ_σ^H と書いておく。このとき誘導表現 $\Xi = \mathrm{Ind}\,_H^G\sigma$ の指標は

$$\chi_\Xi(g) = \int_H \chi_{(L\times R,\mathbb{C}G)}(g,h)\chi_\sigma^H(h)\,dh$$

で与えられる。この値は $g \notin \bigcup_{x\in G} xHx^{-1}$ ならゼロであって、さらに、$g = h_0 \in H$ での値は、

$$\chi_\Xi(h_0) = \frac{1}{\#H}\sum_{\substack{x\in G\\ xh_0x^{-1}\in H}} \chi_\sigma^H(xh_0x^{-1}) = \frac{\#Z_G(h_0)}{\#H}\sum_{h\in\mathbb{O}_{h_0}\cap H}\chi_\sigma^H(h)$$

で与えられる。

Part III
一般線型群の表現

11 一般線型群の有理表現

この節では、一般線型群 $G = GL(n, \mathbb{C})$ の局所有限な有理表現について考えることにする。

G 上の (代数的な) 正則関数のなす環を $\mathbb{C}[G]$ で表す。これは有限群では $L(G)$ と書いていたものに相当するが、ここでは群環が登場しないので、群環の記号 $\mathbb{C}G$ と紛れることはないだろう。$GL(n, \mathbb{C})$ を $n \times n$ の行列群として表すとき、その (i, j) 行列成分を取り出す関数を $x_{i,j}$ と書く[10]。すると、$\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[x_{i,j}, \det^{-1}]$ である。ただしこの式の右辺は、括弧の中の関数で生成される多項式環を表している。また、もちろん det は行列式 (を正則関数と思ったもの) であり、これは G 上でゼロにならないので、$\det^{-1}$ が意味を持つ。

Definition 11.1 (局所有限性・有理性) (ρ, V) を G の表現とする。このとき、

(1) $\forall v \in V$ に対して、$\dim\langle\rho(G) \cdot v\rangle < \infty$ が成り立つならば、(ρ, V) を**局所有限**という。ここで、$\langle\rho(G) \cdot v\rangle$ は $\rho(G)v$ で生成されたベクトル空間を表わす[11]。

(2) V^* を V の代数的な双対空間としよう。このとき、$\forall v^* \in V^*, \forall v \in V$ に対して、$\langle v^*, \rho(g)v\rangle$ が G 上の正則関数になるとき、つまり、$\langle v^*, \rho(g)v\rangle \in \mathbb{C}[G]$ であるとき、(ρ, V) を G の**有理表現**と呼ぶ。

以下 $G = GL(n, \mathbb{C})$ の表現を考えるときには、(特に断らない限り)常に局所有限な有理表現を考えることにする。局所有限な表現が既約ならば、それは明らかに有限次元表現である。

Remark 11.2 局所有限な表現の直和、テンソル積、部分表現、商表現は局所有限である。しかし、双対表現は局所有限とは限らない。同様に、(局所有限な) 有理表現の直和、テンソル積、部分表現、商表現は有理的であるが、双対表現はやはり有理的とは限らない。

以下で、G の表現の完全可約性が本質的な役割を果たす。G の有限次元有理表現が完全可約であることはよく知られているが、証明はあまり易しくないのでここではこれを認めることにする[12]。ここでは、有限次元の場合に完全可約性を認めたうえで、局所有限な有理表現の完全可約性を証明する。しかしこれも面白いとはとても言えないから、結果を認めて先に進むのがよかろう。

[10] しばしば (i, j) 要素そのものも $x_{i,j}$ と書く。これは相当混乱した使い方になってしまうので注意を要するが、非常に便利なのでやめられない (笑)。

[11] 双対空間との pairing も同じ記号で表わしたので、少々紛わしいが、ご勘弁願いたい

[12] ただし、$n = 1$ のとき、つまり $G = \mathbb{C}^\times$ の時にはあとで証明の方針を述べ、演習問題とする。群論の方からの証明としては、コンパクトな実形 $U(n)$ (ユニタリ群) を考え、その上の不変積分を用いて、有限群の場合と同様にして証明する方法がよく知られている。代数的に証明するには、リー環の表現に帰着して、カシミール作用素を用いる方法がある ([12, §6.3])。別のアプローチとして、[31] も参照するとよい。

Lemma 11.3 G の局所有限な有理表現 (ρ, W) は完全可約である。さらに、次の同型が成り立つ。

$$W \simeq \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)}^{\oplus} \mathrm{Hom}_G(V_\pi, W) \otimes V_\pi \tag{11.1}$$

Proof. W 自身が既約なら、何も証明することはないから、既約でないとして、ゼロではない不変部分空間 $U \subsetneqq W$ を勝手に取る。このとき、不変部分空間 $\exists U' \neq 0$ であって、$U \oplus U' \subset W$ となるようなものが存在することをまず示そう。

実際、$v \notin U$ を取ると、v の生成する不変部分空間 $\langle G \cdot v \rangle$ は有限次元である。したがって、既約分解を持つ (ここで、有限次元の場合の完全可約性を使った)。各既約成分と、U との共通部分は、それ自身かゼロである。しかし、そのすべてが U に含まれていることはないから、ある既約成分 U' であって、$U \cap U' = 0$ となるものが存在する。これが望むものである。

さて、このような不変部分空間 U' の全体は、包含関係に関して空でない帰納的順序集合を為す。実際、$\{U'_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を全順序部分集合とするとき、$U'_A = \bigcup_{\alpha \in A} U'_\alpha$ とおけば、これが上界を与えることはすぐにわかる。したがって、Zorn の補題から、このような部分空間の中に極大なものが存在する。それを $U'_{\max}$ とおこう。

ここで $U \oplus U'_{\max} \subsetneqq W$ なら、上の議論から、さらに $U'_{\max}$ を大きく取ることができるので、$W = U \oplus U'_{\max}$ でなければならない。以上で W が完全可約であることがわかった。

次に (11.1) を示そう。$T : \sum^{\oplus}_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)} \mathrm{Hom}_G(V_\pi, W) \otimes V_\pi \to W$ を、単項のテンソル積に対して $T(\varphi \otimes v) = \varphi(v)$ で定義し、これを線型に拡張しよう。もちろん T は intertwiner である。このとき、W が有限次元であれば、証明は定理 3.8 と全く同様にできることに注意しよう。また一般の (無限次元の) W に対しても、T の全射性は同じように証明できる。そこで、以下 T の単射性を示そう。

$T(f) = 0$ とする。f より生成された部分空間 $U = \langle G \cdot f \rangle$ を考えると、これは明らかに有限次元である。したがって、T を U に制限して考えると、これは W が有限次元の場合の証明から、単射になる。したがって $f = 0$ であることがわかる。 Q.E.D.

Example 11.4 (1) $\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[x_{i,j}, \det^{-1}]$ は局所有限かつ有理的な表現である。このとき、$G \times G$ の表現として、

$$\mathbb{C}[G] \simeq \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)}^{\oplus} V_\pi^* \boxtimes V_\pi \tag{11.2}$$

が成り立つ。また、V_π の基底を $\{v_1, \ldots, v_{d_\pi}\}$ ($d_\pi = \dim V_\pi$)、その双対基底を $\{v_1^*, \ldots, v_{d_\pi}^*\}$ とすると、π, i, j を動かしたとき、行列要素 $\langle v_i^*, \pi(g) v_j \rangle$ が $\mathbb{C}[G]$ の基底をなすことがわかる。証明は有限群の場合 (定理 4.9) と全く同様なので省略する。

(2) $M_n = M_n(\mathbb{C})$ を $n \times n$ の正方行列の全体とする。$S(M_n)$ を M_n の元から生成される対称代数とすると、$S(M_n) = \mathbb{C}[M_n^*] = \mathbb{C}[E_{i,j}]$ である。ここで $E_{i,j}$ は行列単位を表す。G は M_n に自然に左右からのかけ算で働く。したがって、$S(M_n)$ は $G \times G$ の表現である。

このときには $\langle v^*, gv\rangle \in \mathbb{C}[x_{i,j}]$ となるので、このような表現を**多項式表現**と呼ぶ。多項式表現はもちろん有理表現である。この場合、局所有限性も明らかで、$G \times G$ の表現としての既約分解は

$$S(M_n) \simeq \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(G)_{\mathrm{pol}}}^{\oplus} V_\pi \boxtimes V_\pi^* \tag{11.3}$$

ただし、$\mathrm{Irr}(G)_{\mathrm{pol}}$ は既約多項式表現の同値類を表す[13]。

(3) $G = GL(n, \mathbb{C})$ の $V = \mathbb{C}^n$ への通常の行列としての作用を考えると、これは既約多項式表現である。さらに $S^k(V) =$ (対称代数 $S(V)$ の k 次斉次部分) とおき、これを k 次**対称テンソル積表現**と呼ぶ。$S^k(V)$ も G の既約多項式表現である。

Proof. 後にもっと一般的な主張の証明を行なうが、この場合は議論が簡単で、理解の助けにもなるだろう。

ゼロでない $f \in S^k(V)$ を取り、それを次のように書き表しておく。

$$f = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha v^\alpha, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, \quad c_\alpha \in \mathbb{C}, \quad v^\alpha \overset{\mathrm{put}}{=} v_1^{\alpha_1} \cdots v_n^{\alpha_n}$$

T を G の対角行列全体のなす部分群 (**カルタン部分群**と呼ばれる) として、$t = \mathrm{diag}\,(t_1, \ldots, t_n) \in T$ をとる。すると、その定義より、

$$\rho(t)f = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha t^\alpha v^\alpha$$

だが、t は自由なので、$\forall c_\alpha v^\alpha \in \langle \rho(G)f\rangle \overset{\mathrm{put}}{=} U$ であることがわかる (演習 11.5 参照)。したがって $c_\alpha \neq 0$ ならば、$v^\alpha \in U$ である。次に、$u_{i,j} = 1_n + sE_{i,j} \in G$ とおくと ($E_{i,j}$ は行列単位)、

$$\rho(u_{i,j})v^\alpha = \sum_{l=0}^{\alpha_j} \binom{\alpha_j}{l} s^l v^{\alpha + l\varepsilon_{i,j}} \ \in U, \qquad \varepsilon_{i,j} = (0, \ldots, \overset{i}{\smile}\!\!\!\!1, \ldots, \overset{j}{\smile}\!\!\!\!-1, \ldots, 0)$$

であって、$s \in \mathbb{C}$ は任意だから、$v^{\alpha+l\varepsilon_{i,j}} \in U \ (0 \leq \forall l \leq \alpha_j)$ である (再び演習 11.5 参照)。これを i, j を変えて何度か繰り返せば、$\forall v^\alpha \in U$ となり、$U = S^k(V)$ がわかる。つまり任意のゼロでない不変部分空間は全体に一致するから、$S^k(V)$ は既約表現。 Q.E.D.

Exercise 11.5 W をベクトル空間で、U をその部分空間、$v_l \in W \ (0 \leq l \leq \alpha)$ とする。このとき、$\forall s \in \mathbb{C}$ に対して、$\sum_{l=0}^{\alpha} s^l v_l \in U$ ならば、$v_l \in U \ (\forall l)$ であることを示せ。

Exercise 11.6 $\mathbb{C}^\times$ 上で定義された、複素解析関数の全体には $GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ が自然に左移動で作用する。具体的に書くと、$L_t f(z) = f(t^{-1}z)$ である。この表現は、局所有限ではないことを示せ。

[13] $G \times G$ のうち、第二成分の G については、表現は多項式表現ではなく、有理表現である。こちらも多項式表現にしたい場合には、$g \in G$ の右からの作用を $X^t g \ (X \in M_n)$ と定義すればよい。実際、後の節ではそのように考える。

12 最高ウェイト表現

この節では $G = GL(n, \mathbb{C})$ の有限次元の有理既約表現を分類する。各既約表現は最高ウェイトによってパラメータ付されることを示すのが目標である。

Definition 12.1 (ボレル部分群) T を G の対角行列全体のなす部分群、U を対角成分がすべて 1 であって、しかも上半三角行列になっているようなもの全体のなす部分群とする。このとき $B = T \ltimes U =$ (上半三角行列全体) を G の**ボレル部分群**、T を**カルタン部分群**と呼ぶ[14]。

Lemma 12.2 $T \simeq (\mathbb{C}^\times)^n$ をカルタン部分群 (あるいは単に n 次元複素トーラス群) とする。

(1) T の有限次元表現は完全可約である。(従って、局所有限表現も完全可約)

(2) T の有限次元既約有理表現は一次元であって、$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して、

$$T \ni t \longmapsto t^\lambda = t_1^{\lambda_1} \cdots t_n^{\lambda_n} \in \mathbb{C}^\times$$

で与えられる。

Proof. $\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\text{第 } i \text{ 成分}} T \longrightarrow GL(W)$ を考えれば、$T = \mathbb{C}^\times$ つまり $n = 1$ の場合に示せば十分であることが分かる。

まず、$T = \mathbb{C}^\times$ の既約表現を考えよう。T は可換なので、Schur の補題により、それは一次元表現である。$f : T \to \mathbb{C}^\times = GL(1, \mathbb{C})$ を表現の作用素とすると、有理表現であるから、$x \in \mathbb{C}^\times = T$ に対して、$f(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ である。複素平面において、内部に原点を含み、原点のまわりを正の方向に一周するような閉曲線を C とすると、$m \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\int_C z^{-m} f(z) dz = \begin{cases} 0 & f \not\simeq \rho_m \\ 1 & f \simeq \rho_m \end{cases}$$

が成り立つ。ただし $\rho_m(z) = z^m$ と書いた。もし $f \not\simeq \rho_m$ $(\forall m \in \mathbb{Z})$ なら、

$$\int_C z^{-m} f(z) dz = 0 \quad (\forall m \in \mathbb{Z})$$

だが、これは $f(z) = 0$ を意味し、表現の作用素であったことに矛盾する。したがって、$f(z) = z^m = \rho_m(z)$ $(\exists m)$ である。

完全可約性については演習問題 12.3 を参照のこと。 Q.E.D.

Exercise 12.3 $T = \mathbb{C}^\times$ の有限次元有理表現 (ρ, W) の完全可約性を次のようにして証明せよ。$\rho(z)$ を行列表示すると、各成分は z のローラン多項式になっている。C を複素平面にお

[14] ボレル部分群は極大な可解部分群、カルタン部分群は極大な複素トーラスのことを言う。したがって、この他にも多数のボレル部分群、カルタン部分群が存在するが、それらはすべて G の随伴作用で共役となる。これについては例えば、[1], [13] 参照。

いて、内部に原点を含み、原点のまわりを正の方向に一周するような閉曲線として、$m \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$P_m = \int_C z^{-m} \rho(z) dz$$

とおく。

(1) $P_l P_m = \delta_{l,m} P_m$ であることを示せ。つまり $\{P_m\}$ は直交射影の族である。

(2) $\sum_m P_m = \mathrm{id}_W$ であることを示せ。

(3) $W_m = P_m W$ とおくと、$W = \sum^{\oplus}{}_m W_m$ であって、$\rho(z)\downarrow_{W_m} = z^m \,\mathrm{id}_{W_m}$ となることを示せ。すなわちこれが W の既約分解を与え、既約表現の和として表わせるから W は完全可約である。

(π, V) を $G = GL(n, \mathbb{C})$ の表現とすると、上の補題によって、T への制限は 完全可約である。

Definition 12.4 (ウェイト分解) (π, V) を $G = GL(n, \mathbb{C})$ の表現とする。$\mu \in \mathbb{Z}^n$ に対して、部分空間 $V_\mu = \{v \in V \mid \pi(t)v = t^\mu v\}$ がゼロでなければ、μ を V の**ウェイト**、V_μ を**ウェイト空間**と呼ぶ[15]。この空間は T の表現として V を既約分解したときの、表現 t^μ に属する成分のなす部分空間にすぎない。したがって、

$$V = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^n}^{\oplus} V_\mu, \qquad V_\mu = \{v \in V \mid \pi(t)v = t^\mu v\}$$

であるが、これを V の**ウェイト空間分解**、あるいは略して**ウェイト分解**と呼ぶ。

V のウェイトの全体を $\textsc{wt}(V)$ と書いておこう。$\mathbb{Z}^n$ に辞書式順序を入れ、$\textsc{wt}(V)$ の中で最大のものを λ としよう。これを V の**最高ウェイト**と呼ぶ。またゼロでない $v_\lambda \in V_\lambda$ をひとつ取り、これを**最高ウェイトベクトル**と呼ぶ。

最高ウェイトの満たすべき条件を求めることと、既約表現そのものが最高ウェイトによって決まることを示すことがこれからの目標となる。その過程で明らかになるが、(π, V) が既約表現ならば、最高ウェイトベクトルは定数倍を除いて一意的に決まる。(π, V) は以下既約とし、今は定数倍を除く一意性は証明されていないが、とにかくゼロでない最高ウェイトベクトルを一つ取り、それを $v_\lambda \in V_\lambda$ で表わしておこう。

Lemma 12.5 最高ウェイトベクトルは U 不変元である。したがって、$V_\lambda \subset V^U$ が成り立つ。

Proof. $u \in U$ に対して、$\pi(u)v_\lambda$ をウェイト分解し、

$$\pi(u)v_\lambda = \sum_\mu w_\mu \qquad (w_\mu \in V_\mu)$$

[15] $V_\mu = 0$ の時にも便宜的に μ をウェイトということもままある。状況によって、判断されたい。

と書いておこう。この両辺に $t \in T$ を作用させると、

$$tuv_\lambda = (tut^{-1})tv_\lambda = t^\lambda (tut^{-1})v_\lambda = \sum_\mu t^\mu w_\mu$$

が成り立っている。したがって、

$$(tut^{-1})v_\lambda = \sum_{\mu \in \mathrm{WT}(V)} t^{\mu - \lambda} w_\mu \tag{12.1}$$

である。ここで、うまく $s \in T$ を選んで、$t = s^{-m}, m \to \infty$ とすれば、

$$tut^{-1} \to 1_n \quad \text{かつ} \quad \mu - \lambda < 0 \Rightarrow t^{\mu-\lambda} \to +\infty$$

となるようにできる (演習問題 12.6 参照)。したがって、(12.1) の両辺を比較すれば、$w_\mu \neq 0$ ならば、$\mu \geq \lambda$ でなければならない。しかし λ は最高ウェイトだったので、これは $\mu = \lambda$ しか起り得ない。このときは、$m \to \infty$ とした式 (12.1) の両辺は $v_\lambda = w_\lambda$ となり、結局、$uv_\lambda = w_\lambda = v_\lambda$ であったことが分かる。 Q.E.D.

Exercise 12.6 $s = (s_1, \ldots, s_n) \in (\mathbb{R}^\times)^n \subset (\mathbb{C}^\times)^n$ とする。

(1) $s_1 > s_2 > \cdots > s_n > 0$ ならば、任意の $u \in U$ に対して、$\mathrm{Ad}\,(s^{-m})u = s^{-m}us^m \to 1_n$ $(m \to \infty)$ が成り立つことを示せ。ただし 1_n は単位行列を表わす。

(2) $\mathbb{Z}^n$ の有限部分集合 $N \subset \mathbb{Z}^n$ が与えられたとき、$s_1 > s_2 > \cdots > s_n > 0$ かつ、$\nu \in N$ に対して、$\nu > 0$ (辞書式順序) ならば、$s^{-m\nu} \to 0$ $(m \to \infty)$ が成り立つように s を選べることを示せ。

Lemma 12.7 V の U 不変元全体は、最高ウェイト λ のウェイト空間に一致する。つまり $V^U = V_\lambda$ である。

Proof. U^- を下半三角行列で、対角線がすべて 1 であるような行列全体のなす部分群とする。また $U^+ = U,\ B^\pm = T \ltimes U^\pm$ と書く。このとき $U^-TU^+ = B^-B^+ \subset G$ は G の中で、開かつ稠密になる (下記演習問題 12.9 参照)。

さて、V^U は T で不変だから、T の作用でウェイト分解できる。そこで、$v_\mu \in V^U$ をウェイトベクトルとしよう。このとき、

$$u^- t u^+ v_\mu = t^\mu u^- v_\mu \qquad (u^\pm \in U^\pm, t \in T)$$

であることと、$U^-TU^+ \subset G$ が稠密であることから、$\exists u_1^-, \ldots, u_k^- \in U^-$ が存在して、任意のウェイトベクトル v_ν は

$$v_\nu = \sum_{i=1}^k c_i u_i^- v_\mu \qquad (c_i \in \mathbb{C})$$

と表される。そこで、両辺に $t \in T$ を作用させて、

$$t^{\nu} v_{\nu} = \sum_i c_i (t u_i^- t^{-1}) t^{\mu} v_{\mu},$$
$$t^{\nu-\mu} v_{\nu} = \sum_i c_i (t u_i^- t^{-1}) v_{\mu} \tag{12.2}$$

ここで、$s \in T$ を適当にとって、$t = s^m,\ m \to \infty$ とすれば、

$$t u_i^- t^{-1} \to 1_n \quad \text{かつ} \quad \nu - \mu > 0 \Rightarrow t^{\nu-\mu} \to +\infty$$

となるようにできる (演習 12.6 参照[16])。したがって、式 (12.2) の両辺を比較して、$\nu - \mu \leq 0$ でなければいけないことがわかる。特に $\nu = \lambda$ を最高ウェイトに取れば、$\lambda \leq \mu$ であるが、これが成り立つのは $\lambda = \mu$ の時に限る。 Q.E.D.

次に最高ウェイトベクトルが本質的に一意であることを示そう。

Lemma 12.8 λ を最高ウェイトとすると、$\dim V_\lambda = 1$ である。つまり最高ウェイトベクトルは定数倍を除いて一意的。

Proof. V にウェイトベクトルからなる基底を取り、V^* にはその双対基底を取ろう。いま、$v_\mu \leftrightarrow v^* \in V^*$ を対応する基底とすれば、v^* はウェイト $-\mu$ のウェイトベクトルである。実際、基底の一つ v_ν を任意にとると

$$\langle \pi^*(t) v^*, v_\nu \rangle = \langle v^*, \pi(t)^{-1} v_\nu \rangle = t^{-\nu} \langle v^*, v_\nu \rangle = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & v_\nu \neq v_\mu \text{ のとき} \\ t^{-\mu} & v_\nu = v_\mu \text{ のとき} \end{array} \right. = \langle t^{-\mu} v^*, v_\nu \rangle$$

だから、 $\pi^*(t) v^* = t^{-\mu} v^*$ が成り立つ。

そこで、最高ウェイトベクトル v_λ に対応する双対基底の元を $v^*_{-\lambda} \in V^*_{-\lambda}$ と書こう。λ は最高ウェイトだから、$-\lambda$ は V^* の最低ウェイトである。したがって、補題 12.7 と同様にして、$v^*_{-\lambda} \in (V^*)^{U^-}$ であることがわかる。

このとき、$f(g) = \langle v^*_{-\lambda}, \pi(g) v_\lambda \rangle$ とおくと、$f(g)$ は、左 U^- 不変、かつ右 U^+ 不変である。実際、

$$f(u^- g u^+) = \langle v^*_{-\lambda}, \pi(u^- g u^+) v_\lambda \rangle = \langle \pi^*(u^-)^{-1} v^*_{-\lambda}, \pi(g) \pi(u^+) v_\lambda \rangle = \langle v^*_{-\lambda}, \pi(g) v_\lambda \rangle = f(g)$$

となる。したがって、$t \in T$ に対して、

$$f(u^- t u^+) = f(t) = \langle v^*_{-\lambda}, t v_\lambda \rangle = t^\lambda \langle v^*_{-\lambda}, v_\lambda \rangle = t^\lambda$$

f は G 上の有理関数だから、稠密開集合 $U^- T U^+ \subset G$ 上の値で決まる。したがって、このような f はただ一つである。一方、$V^* \otimes V \ni v^* \otimes v \to \langle v^*, g v \rangle \in \mathbb{C}[G]$ は中への埋めこみだったから、このような $v^*_{-\lambda} \otimes v_\lambda$ も本質的に一つしかないことがわかる。したがって $\dim V_\lambda = 1$ である。 Q.E.D.

[16] 演習では $U = U^+$ についてしか述べられていないが、U^- に対しても同様の主張が成り立つ。

Exercise 12.9 $g \in G = GL(n, \mathbb{C})$ に対して、最初の k 行、k 列をとって作った小行列式を k 次**主対角小行列式**と呼び、$\Delta_k(g)$ で表す。このとき、下半三角行列 b^- と上半三角行列 b^+ を取って、$g = b^- b^+$ $(\exists b^{\pm} \in B^{\pm})$ と表わせることと、$\Delta_k(g) \neq 0$ $(\forall k = 1, 2, \ldots, n)$ であることとは同値である。これを証明せよ[17]。このことから、$B^- B^+ = U^- T U^+ \subset G$ が開かつ稠密な部分集合であることを結論せよ。

[ヒント：行列のサイズに関する帰納法を用いよ。下半三角行列と上半三角行列を $(n-1) \times 1$ にブロック分けして、実際に計算してみるとよい。]

これで、既約表現に対して最高ウェイト λ を対応させることができたが、上の補題の証明から、逆に最高ウェイトが既約表現を決めてしまうことも分かる。それは、最高ウェイトが決まると、行列要素としての G 上の関数 $f(u^- t u^+) = t^{\lambda}$ が決まり、そのような関数は、既約表現と一対一に対応していることからわかる (式 (11.1) 参照)。

あとは、最高ウェイトになるためにはどのような条件を満たすべきかを調べることだけが残っている。簡単に分かることとして、まず次の補題を示そう。

Lemma 12.10 $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n$ を既約表現 (π, V) のウェイトとすると、各成分を置換したもの $(\mu_{\sigma(1)}, \ldots, \mu_{\sigma(n)})$ $(\sigma \in \mathfrak{S}_n)$ もまた V のウェイトである。つまり $\mathrm{wt}(V)$ には各成分の置換として自然に対称群 $\mathfrak{S}_n$ が作用する。

Proof. w を各行各列に一つづつ 1 があり、残りは全てゼロであるような $n \times n$ 行列としよう。このような行列は置換行列と呼ばれる (演習 2.7 参照) 。このとき、$t \in T$ に対して、$wtw^{-1} \in T$ は、t の各成分を適当に置換したものになっている。しかも、成分の任意の置換がこのようにして引き起こされる (下記演習 12.12 参照)。

さて、$\rho^w(g) = \rho(wgw^{-1})$ とおくと、これは ρ と同型な表現である。μ を ρ のウェイト、v_μ をウェイトベクトルとすると、

$$\rho^w(t) v_\mu = \rho(wtw^{-1}) v_\mu = (wtw^{-1})^{\mu} v_\mu = t^{w^{-1}\mu} v_\mu \qquad (t \in T)$$

であるから、$w^{-1}\mu = (\mu$ を置換 w^{-1} によって並べ替えたもの$)$ は、$\rho^w \simeq \rho$ のウェイトになることが分かる。 Q.E.D.

Corollary 12.11 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ を既約表現 (π, V) の最高ウェイトとすると、$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ が成り立つ。

Proof. λ が最高ウェイトだとすると、その成分を並べ替えたものはまた V のウェイトである。λ はそのどれよりも大でなければならないから、各成分は上の不等式を満たす。Q.E.D.

Exercise 12.12 W で置換行列の全体を表わす。

(1) $W \subset N_G(T)$ であることを示せ。ただし、$N_G(T)$ は G における T の正規化部分群を表わす。つまり $w \in W$ に対して、$wtw^{-1} \in T$ $(\forall t \in T)$ が成り立つ。さらにこの作用は t の成分の間の置換を引き起こすことを確認せよ。

[17] 本質的にはこれはガウスの消去法である。対応する分解 $g = b^- b^+$ を**ガウス分解**と呼ぶこともある。

(2) $Z_G(T) = T$ であることを示せ。ここに $Z_G(T)$ は T の中心化部分群を表わす。

(3) $N_G(T) = W \ltimes T$ であることを示せ。したがって、$W \simeq N_G(T)/T$ である。一般にカルタン部分群に対して $N_G(T)/T$ で定義された有限群を (G, T) の**ワイル群**と呼ぶ。

(4) G の元で、相異なる固有値を持つもの全体を G' で表わし、$T' = G' \cap T$ と書く。$\mu : G \times T' \to G'$ を $\mu(g, t) = gtg^{-1}$ で定めよう。このとき、μ は全射であり、各点のファイバーは $gN_G(T)$ の形に書けていることを示せ。

(5) $\tilde{\mu} : G/T \times T' \to G'$ を $\tilde{\mu}(gT, t) = \mu(g, t)$ で定めるとこれは矛盾なく定義できており、G' の、被覆群を W とする被覆写像になることを示せ。

さて、後は上の条件を満たす $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ がすべて最高ウェイトとして実現できることを示せば、既約表現と最高ウェイトとの対応が完全に分かったことになる。このことは後でより深く考えるが、今は次のことにだけ注意しよう。

Lemma 12.13 $\Delta_k(g)$ を k 次の主小行列式としよう。このとき、

$$f_\lambda(g) = \prod_{k=1}^{n} \Delta_k(g)^{\lambda_i - \lambda_{i+1}} \qquad (\text{ただし } \lambda_{n+1} = 0 \text{ とおく}) \tag{12.3}$$

とおけば、$f_\lambda(u^- t u^+) = t^\lambda$ $(u^\pm \in U^\pm, t \in T)$ を満たす。$f_\lambda \in \mathbb{C}[x_{i,j}, \det^{-1}]$ (正則関数) となるのは $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ の場合である。また、これが $\mathbb{C}[x_{i,j}]$ に属する (多項式になる) のは、これに加えて、$\lambda_n \geq 0$ の時である。

この補題の証明は、具体的に計算してみれば分かるので、省略する (線型代数のちょうどよい演習問題である)。

補題で与えられた関数 f_λ から生成された表現を考え、それを既約分解すると (実はそれ自身既約なのであるが)、その既約分解には、最高ウェイト λ の表現が現れなければならない。

以上をまとめておく。

Theorem 12.14 $G = GL(n, \mathbb{C})$ の有限次元、既約有理表現 (π, V) に対して、カルタン部分群 T への制限を分解して得られたウェイトの全体を $\textsc{wt}(V) \subset \mathbb{Z}^n$ とし、辞書式順序に関する $\textsc{wt}(V)$ の最大元を $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ と書く (最高ウェイト)。また、ウェイト μ のウェイト空間を V_μ で表わす。

(1) $V_\lambda = V^U$ (U 不変元の空間) であって、$\dim V_\lambda = 1$ が成り立つ。

(2) $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ は $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ を満たす。また V が多項式表現であるための必用十分条件は $\lambda_n \geq 0$ となることである。

(3) 逆に $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ が条件 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ を満たせば、λ はある既約有理表現の最高ウェイトである。この条件を満たすようなウエイト $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ を**優ウェイト**という。

(4) f_λ を式 (12.3) で与えるとき、$G \times G$ の表現として、$\mathbb{C}[G]$ において f_λ が生成する表現は $V^* \boxtimes V$ と同型である。

以下、最高ウェイト λ の $G = GL(n, \mathbb{C})$ の表現を $(\tau(\lambda), V(\lambda)) = (\tau^{(n)}(\lambda), V^{(n)}(\lambda))$ で表わすことにする。(この書き方はあまり標準的でないかも?) また $P^+ \subset \mathbb{Z}^n$ で優ウェイト全体 (あるいは最高ウェイトの全体) をあらわそう。

Corollary 12.15 $(\tau(\lambda), V(\lambda))$ を最高ウェイトが λ の既約表現とする。

(1) 双対表現 $(\tau(\lambda)^*, V(\lambda)^*)$ の最高ウェイトは $-w_0\lambda$ で与えられる。ここに w_0 は置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を表す[18]。あるいは、$\tau(\lambda)$ の最低ウェイトは $w_0\lambda$ であることに注意すると、$(\tau(\lambda)^*, V(\lambda)^*)$ の最低ウェイトは $-\lambda$ であると言ってもよい。記号で書くと、$\tau(\lambda)^* \simeq \tau(-w_0\lambda)$ である。

(2) 表現空間は $V(\lambda)$ そのままにして、$\tau(\lambda)({}^t g^{-1})$ で表現の作用素を決めると、これは双対表現 $(\tau(\lambda)^*, V(\lambda)^*)$ と同型である。

Proof. 最初の主張は既に補題 12.8 の証明中で示されている。

第二の主張は、$\tau(\lambda)({}^t t^{-1}) v_\mu = t^{-\mu} v_\mu$ となり、ウェイトの分布が $-\mathrm{WT}(V(\lambda))$ となることに注意する。これより、最高ウェイトが $-w_0\lambda$ であることがわかる。 Q.E.D.

13 誘導表現と Borel-Weil の定理

この節では、$G = GL(n, \mathbb{C})$ の場合に誘導表現を定義して、Frobenius の相互律を証明しよう。その応用として、Borel-Weil の定理を示す。

Definition 13.1 (誘導表現) $G = GL(n, \mathbb{C})$ の部分 (代数) 群 $K \subset G$ とその有限次元 (有理) 表現 (σ, W) を考える。このとき、

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_K^G \sigma = \{ f : G \to W \mid & \langle w^*, f(g) \rangle \in \mathbb{C}[G] \quad (w^* \in W), \\ & f(gk) = \sigma(k)^{-1} f(g) \quad (g \in G, k \in K) \}\end{aligned}$$

とおき、これを (σ, W) から (代数的に) **誘導された表現**と呼ぶ。表現の作用素は、左移動で与える。$\mathrm{Ind}_K^G(\sigma, W) = L(G \times_K \sigma) = \mathbb{C}[G] \otimes_K \sigma$ などとも書く。

この定義は要するに、

$$\mathrm{Ind}_K^G(\sigma, W) = (\mathbb{C}[G] \otimes W)^K \qquad (K \text{ 不変元全体})$$

と置くということに他ならない。ただし、K の $\mathbb{C}[G]$ への作用は右移動で与える。実際、

$$\begin{aligned}&\sum f(gk) \otimes \sigma(k) w = \sum f(g) \otimes w \quad (\forall g \in G) \\ &\qquad \Longleftrightarrow \sum f(g') \otimes \sigma(k) w = \sum f(g' k^{-1}) \otimes w \quad (\forall g' \in G)\end{aligned}$$

だから、これは明らかであろう。表現の分解などを考えるときにはこちらの定式化の方が都合がよいこともあるので、こちらの形でもしばしば利用する。

[18] しばしば、ワイル群の**最長元**と呼ばれる元である。今は、ワイル群がちょうど対称群になっている。

Example 13.2 $K \subset G$ を部分代数群とする。すると、G/K は準射影多様体になる[19]が、G/K 上の正則関数環を $\mathbb{C}[G/K]$ で表す。このとき、G 同変な代数としての同型 $\mathbb{C}[G/K] \simeq \mathbb{C}[G]^K$ が成り立つ。K の自明な表現からの誘導表現を考えると、

$$\operatorname{Ind}_K^G \mathbf{1} = \mathbb{C}[G]^K \simeq \mathbb{C}[G/K]$$

が成り立っている。

Theorem 13.3 (Frobenius の相互律) (σ, W) を部分群 $K \subset G$ の有限次元表現、(ρ, V) を G の有限次元表現とする。このとき、

$$\operatorname{Hom}_G(\rho, \operatorname{Ind}_K^G \sigma) \simeq \operatorname{Hom}_K(\rho\big\downarrow_K, \sigma)$$

が成り立つ。

Proof. G の表現は完全可約であるから、ρ を既約としてよい。すると

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_G(\rho, \operatorname{Ind}_K^G \sigma) &\simeq (V_\rho^* \otimes (\mathbb{C}[G] \otimes W)^K)^G \\ &\simeq \sum_{\pi \in \operatorname{Irr}(G)}^{\oplus} (V_\rho^* \otimes V_\pi)^G \otimes (V_\pi^* \otimes W)^K \\ &\simeq (V_\rho^* \otimes W)^K \simeq \operatorname{Hom}_K(V_\rho, W) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Frobenius の相互律と、最高ウェイトによる表現の分類を組み合わせると次の結果を得る。$B = T \ltimes U$ は上半三角行列全体のなすボレル部分群であったことに注意しよう。

Corollary 13.4 G の G/U への左からの作用は重複度自由である。さらに、もっと詳しく、次の同型が成り立つ。

$$\operatorname{Ind}_U^G \mathbf{1} \simeq \mathbb{C}[G/U] \simeq \sum_{\lambda \in P^+}^{\oplus} \tau(\lambda)$$

等質空間 G/U は準アフィン多様体 (つまりアフィン多様体の開部分多様体) だが、その正則関数環上には G のすべての既約表現がちょうど一つづつ実現できるのである! Gelfand はこのような空間 $\mathbb{C}[G/U]$ を表現のモデルと呼んでいる。

では、一つ一つの表現を抽出するにはどうしたらよいだろうか? 次にそれを考えてみる。$\mu \in \mathbb{Z}^n$ に対して、$\mathbb{C}_\mu$ で $B = T \ltimes U$ の一次元既約表現 $b^\mu = t^\mu$ $(b = tu \in T \cdot U)$ を表わそう。つまり

$$B \xrightarrow{\text{projection}} B/U = T \xrightarrow{t^\mu} \mathbb{C}^\times$$

[19] K が reductive なら G/K はアフィン代数多様体になる。また、K が Grosshans 部分群であれば、G/K は準アフィン多様体 (アフィン多様体の開部分多様体) になることが知られている。$U \subset G$ は Grosshans 部分群である。

を続けて行なったものである。この表現 $\mathbb{C}_\mu$ の誘導表現について述べたものが次に挙げる Borel-Weil の定理である[20]。

Corollary 13.5 (Borel-Weil) 最高ウェイト λ の既約表現 $\tau(\lambda)$ は

$$\tau(\lambda) \simeq \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C}_{w_0\lambda} \qquad (\lambda \in P^+)$$

と表される。ここに w_0 は置換$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$を表す。$-w_0\lambda \in P^+$ であって、これは $\tau(\lambda)^*$ の最高ウェイトになっていることに注意せよ。また、$-\mu \notin P^+$ なら、$\mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C}_\mu = 0$ である。

Proof. 誘導表現の定義により、

$$\mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C}_\mu = (\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}_\mu)^B = \sum_{\lambda \in P^+}^{\oplus} \tau(\lambda)^* \otimes (\tau(\lambda) \otimes \mathbb{C}_\mu)^B$$

だが、

$$(\tau(\lambda)) \otimes \mathbb{C}_\mu)^B = ((\tau(\lambda) \otimes \mathbb{C}_\mu)^U)^T = (\mathbb{C}_\lambda \otimes \mathbb{C}_\mu)^T = \begin{cases} \mathbb{C} & \mu = -\lambda \\ 0 & \mu \neq -\lambda \end{cases}$$

であるから、$-\mu \notin P^+$ なら $\mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C}_\mu = 0$ である。また $-\mu = \lambda \in P^+$ なら、上の計算から、

$$\mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C}_{-\lambda} = \tau(\lambda)^* = \tau(-w_0\lambda)$$

ここで、λ の代わりに $-w_0\lambda$ を考えれば、最初の主張が得られる。 Q.E.D.

Exercise 13.6 G/B は**旗多様体**と呼ばれ、射影多様体である。G/B がコンパクトであることを以下のようにして示せ。

$K = U(n)$ (ユニタリ群) とおく[21]。このとき、$G = K \cdot B$ が成り立つ。また、$K \cap B = \{\mathrm{diag}\,(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_n}) \mid \theta_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{T}$ はコンパクト・トーラスだから、$G/B \simeq K/\mathbb{T}$ であって、したがって、G/B はコンパクトである。

14 双対性

この節では $GL(n, \mathbb{C})$ の代わりに GL_n などと書くことにする。

[20] ここでは Borel-Weil の定理を純粋に代数的に述べてあるのでここまで簡単になっている。実際このような形で Borel-Weil の定理を述べることに疑問をいだく方がいるかもしれないが、ご勘弁願いたい。

[21] $U(n)$ は $GL(n, \mathbb{C})$ の極大コンパクト部分群である。

14.1　$GL_n \times GL_m$ 双対

$M_{n,m} = M_{n,m}(\mathbb{C})$ を $n \times m$ の複素行列全体として、$M_{n,m}$ への、群 $\mathbb{G} = GL_n \times GL_m$ の作用を

$$(g, g') \cdot X = {}^t g^{-1} X {g'}^{-1} \qquad ((g, g') \in GL_n \times GL_m = \mathbb{G},\ X \in M_{n,m})$$

で定義する。このとき、多項式環 $\mathbb{C}[M_{n,m}] = \mathbb{C}[x_{i,j}]$ には左右の移動で $\mathbb{G}$ が働いているが、この作用は局所有限かつ有理的である。したがって、$\mathbb{C}[M_{n,m}]$ は $\mathbb{G}$ の表現として既約分解できる。

Theorem 14.1 ($GL_n \times GL_m$ 双対定理) $n \leq m$ として、$\mathcal{P}_n = \{\lambda \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}$ と置く。$\lambda \in \mathcal{P}_n$ は第 $(n+1)$ 成分以降にゼロを付け加えて、$\lambda \in \mathcal{P}_m$ とも思うことにする。このとき、$\mathbb{C}[M_{n,m}]$ は $\mathbb{G} = GL_n \times GL_m$ の表現として次のように既約分解する。

$$\mathbb{C}[M_{n,m}] \simeq \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n}^{\oplus} \tau^{(n)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(m)}(\lambda)$$

したがって、$M_{n,m}$ 上の $\mathbb{G}$ の作用は重複度自由である。

Proof.　$n = m$ の場合にはすでにこの既約分解は得られていることに注意しておく (式 (11.3) を参照)。ここでは、最高ウェイトを用いた証明を与えるが、その考え方は既出であるから、証明はとばしてもよかろう。

GL_n のボレル部分群を $B_n^{\pm} = T_n \ltimes U_n^{\pm}$ などと、下付き添え字に n をつけて表すことにしよう。最高ウェイトの理論を認めると、結局 $\mathbb{C}[M_{n,m}]$ に含まれる、$U_n^+ \times U_m^+$ 不変元をすべて求め、その $T_n \times T_m$ ウェイト (これが最高ウェイトになる) をすべて決定すればよい。そこで、$f(X) \in \mathbb{C}[M_{n,m}]$ を $U_n^+ \times U_m^+$ 不変なウェイトベクトルとしよう。

すると、$u \in U_n^+, u' \in U_m^+$ に対して、$f(X) = L_{(u,u')} f(X) = f({}^t u X u')$ であるが、

$$\begin{aligned} U_n^- \begin{pmatrix} T_n & 0_{n,m-n} \end{pmatrix} U_m^+ &= U_n^- T_n \begin{pmatrix} 1_n & 0_{n,m-n} \end{pmatrix} U_m^+ \\ &= U_n^- \begin{pmatrix} 1_n & 0_{n,m-n} \end{pmatrix} T_m U_m^+ \subset M_{n,m} : \text{開かつ稠密} \end{aligned}$$

であること (演習 12.9 参照) に注意すれば、結局 f は $f((t\ 0_{n,m-n}))$ $(t \in T_n)$ の値で完全に決まることになる。ところが、f はウェイトベクトルなので、そのウェイトを (λ, μ) とすれば、

$$\begin{aligned} f((t\ 0_{n,m-n})) &= f(t(1_n\ 0_{n-m})) = t^{-\lambda} f((1_n\ 0_{n-m})) \\ &= f((1_n\ 0_{n-m}) \cdot \operatorname{diag}(t, 1_{m-n})) = t^{-\mu} f((1_n\ 0_{n-m})) \end{aligned}$$

である。したがって、$\lambda = \mu$ でなければならない。またこれらは最高ウェイトであること、$\mathbb{C}[M_{m,n}]$ には多項式表現しか現れないこと (もっと直接に、ウェイトはすべて非負整数しか取り得ないことがすぐに示せるが)、を考え合わせると、f のウェイトは (λ, λ) $(\lambda \in \mathcal{P}_n)$ でなければならないことがわかる。また、これによって関数 f は完全に決定されてしまうので、このような最高ウェイトを持つベクトルは定数倍を除いて一意的である (つまり対応する既約表現の重複度は 1 である) ことが容易にわかる。

一方、k 次主小行列式から式 (12.3) のようにして構成した f は明らかにこの最高ウェイトを持つから、最高ウェイト (λ, λ) $(\lambda \in \mathcal{P}_n)$ を持つ既約表現はすべて現れる。以上で定理は証明された。 Q.E.D.

Exercise 14.2 $\mathbb{C}[M_{n,m}] \simeq \sum^{\oplus}_{\lambda} \tau^{(n)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(m)}(\lambda)$ の分解において、既約成分 $\tau^{(n)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(m)}(\lambda)$ は、斉次 $|\lambda|$ 次式の空間に実現されていることを示せ。ここに $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ は λ の**サイズ**と呼ばれる。したがって、k 次斉次式全体の空間を $\mathbb{C}[M_{n,m}]_k$ と書くと、

$$\mathbb{C}[M_{n,m}]_k \simeq \sum^{\oplus}_{\lambda \in \mathcal{P}_n,\, |\lambda| = k} \tau^{(n)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(m)}(\lambda)$$

である。[ヒント：$\gamma = \mathrm{diag}\,(z, \ldots, z) = z 1_n \in T$ の作用を考えよ。γ の固有値 z^k の空間が、ちょうど斉次 k 次式の空間にあたる。]

定理 14.1 はあまりに特殊な場合なので、応用が効かないと考えるかもしれないが、それは大きな間違いである。実際、これは群上の正則関数環の分解をいくぶん拡張した格好になっており、GL_n の表現の情報はほとんどここに含まれていると考えてさしつかえない。非常にたくさんの応用が考えられるが、ほんの少しだけ紹介してみよう。

まずテンソル積の分岐律に関して考えてみる。それには、$m = k + l$ $(k, l \geq n)$ と分解しておき、$\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^l$ であることを利用する。このとき、

$$M_{n,m} = M_{n,k+l} \simeq M_{n,k} \oplus M_{n,l}$$

だから、

$$\mathbb{C}[M_{n,m}] \simeq \mathbb{C}[M_{n,k} \oplus M_{n,l}] \simeq \mathbb{C}[M_{n,k}] \otimes \mathbb{C}[M_{n,l}]$$

である。もちろん、上の定理によって

$$(\text{左辺}) = \sum^{\oplus}_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \tau^{(n)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(m)}(\lambda) \tag{14.1}$$

であるが、一方

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \Big(\sum^{\oplus}_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \tau^{(n)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(k)}(\lambda) \Big) \otimes \Big(\sum^{\oplus}_{\mu \in \mathcal{P}_n} \tau^{(n)}(\mu) \boxtimes \tau^{(l)}(\mu) \Big) \\ &= \sum^{\oplus}_{\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n} \big(\tau^{(n)}(\lambda) \otimes \tau^{(n)}(\mu) \big) \boxtimes \big(\tau^{(k)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(l)}(\mu) \big) \end{aligned} \tag{14.2}$$

となっている。最後の式に現れるテンソル積を既約分解しておく。

$$\tau^{(n)}(\lambda) \otimes \tau^{(n)}(\mu) \simeq \sum^{\oplus}_{\nu \in P^+} c_{\lambda, \mu}^{\ \nu}\, \tau^{(n)}(\nu)$$

既約分解に現れる重複度 $c_{\lambda,\mu}^{\ \nu}$ を通常**分岐係数**と呼び (その意味は以下ではっきりする)、特に $G = GL_n$ の場合には、**Littlewood-Richardson 係数**と呼ぶ。この分解式を (14.2) に代入すると、

$$(14.2) = \sum_{\nu \in P^+}^{\oplus} \tau^{(n)}(\nu) \boxtimes \Big(\sum_{\lambda,\mu \in \mathcal{P}_n}^{\oplus} c_{\lambda,\mu}^{\ \nu} \tau^{(k)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(l)}(\mu) \Big)$$

であって、これは左辺の分解 (14.1) に一致するはずである。したがって、$\tau^{(n)}(\nu)$ の相方をそれぞれ比較して、

$$\tau^{(m)}(\nu)\big\downarrow_{GL_k \times GL_l} \simeq \sum_{\lambda,\mu \in \mathcal{P}_n}^{\oplus} c_{\lambda,\mu}^{\ \nu} \tau^{(k)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(l)}(\mu) \qquad (m = k + l)$$

が得られる。つまり、既約表現の部分群への制限則と、テンソル積の分解公式が互いに関係しあっている! これを定理の形にまとめておこう。

Theorem 14.3 $k, l \geq n$ と仮定する。$\lambda, \mu \in \mathcal{P}_n$ に対して、GL_n の既約表現 $\tau^{(n)}(\lambda), \tau^{(n)}(\mu)$ のテンソル積の分解を

$$\tau^{(n)}(\lambda) \otimes \tau^{(n)}(\mu) \simeq \sum_{\nu \in P^+}^{\oplus} c_{\lambda,\mu}^{\ \nu} \tau^{(n)}(\nu)$$

と表しておく。$\nu \in \mathcal{P}_n$ に対して、GL_{k+l} の既約表現 $\tau^{(k+l)}(\nu)$ を $GL_k \times GL_l$ に制限したときの既約分解は、次のように与えられる。

$$\tau^{(k+l)}(\nu)\big\downarrow_{GL_k \times GL_l} \simeq \sum_{\lambda,\mu \in \mathcal{P}_n}^{\oplus} c_{\lambda,\mu}^{\ \nu} \tau^{(k)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(l)}(\mu)$$

つまり、次の等式が成り立つ。

$$[\tau^{(n)}(\lambda) \otimes \tau^{(n)}(\mu) : \tau^{(n)}(\nu)] = [\tau^{(k+l)}(\nu)\big\downarrow_{GL_k \times GL_l} : \tau^{(k)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(l)}(\mu)]$$

14.2 不変式

次に不変式論への応用を考えてみよう。まず、ほとんど明らかな次の事実から始めよう。

Theorem 14.4 $M_{n,n}$ に $G = GL_n$ の随伴作用を考える。つまり、$\mathrm{Ad}\,(g)X = gXg^{-1}$ $(g \in G, X \in M_{n,n})$ である。

(1) z を不定元として、行列式

$$\det(X - z1_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k(X) z^k, \qquad a_k(X) \in \mathbb{C}[M_{n,n}]$$

を考えると、$\{a_0(X) = \det(X), a_1(X), \ldots, a_{n-1}(X) = (-1)^{n-1}\,\mathrm{trace}\,(X)\}$ はすべて G 不変な多項式で、しかも代数的に独立である。

(2) $\mathbb{C}[M_{n,n}]$ における G の不変式は $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ の n 個の元で生成された多項式環に同型である。

Proof. 明らかに $\det(X - z1_n)$ は G 不変式なので、各係数はもちろん G 不変式である。これらが代数的に独立であることは、例えば対角行列上に制限してみれば、$a_k(\mathrm{diag}\,(t_1, \ldots, t_n))$ は k 次の基本対称式になることと、基本対称式の代数的独立性からわかる。

さて、G 不変式がこれらの元の多項式で表されることを示そう。それにはまず、$M_{n,n}$ に $G \times G$ を $(g, g') \cdot X = gX(g')^{-1}$ と作用させて、$G \times G$ の表現としての分解を考えよう。すると、定理 14.1 により、

$$\mathbb{C}[M_{n,n}] \simeq \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n}^{\oplus} \tau(\lambda)^* \boxtimes \tau(\lambda)$$

であることがわかる。このとき、随伴作用は $G \simeq \Delta G \subset G \times G$ を対角埋め込みとするとき、この対角的に埋め込まれた G の作用に他ならない。したがって、

$$\mathbb{C}[M_{n,n}]^{\Delta G} \simeq \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n}^{\oplus} (\tau(\lambda)^* \otimes \tau(\lambda))^G$$

である。Schur の補題により、$(\tau^* \otimes \tau)^G \simeq \mathbb{C}$ であるから、結局 G 不変元は、各 $\lambda \in \mathcal{P}_n$ について一次元づつ存在することがわかる。

すでに、次数が $1, 2, \ldots, n$ の代数的に独立な不変元が存在することがわかっており、それらは不変元全体の中の部分環を生成するが、k 次斉次式における両者の次元を比較すると、この二つは一致しなければならないことがわかる (演習 14.2 と演習 14.5 参照)。 Q.E.D.

上の証明で現れた一次元の不変式の空間 $(\tau(\lambda)^* \otimes \tau(\lambda))^G$ は、もちろん $\chi_\lambda(g) = \mathrm{trace}\,\tau(\lambda)(g)$ つまり表現の指標の定数倍になっていることに注意しておく。

Exercise 14.5 次数が $1, 2, \ldots, n$ の代数的に独立な不変元が生成する多項式環の k 次斉次な成分の次元は、ちょうどサイズが k であるような $\lambda \in \mathcal{P}_n$ の個数と一致することを示せ。

Exercise 14.6 (Chevalley の定理) $\mathbb{C}[M_{n,n}]^{\mathrm{Ad}\,G}$ を対角行列全体のなす部分空間 $D_n = \{X \in M_{n,n} \mid X \text{ は対角行列 }\}$ に制限すると、それは $\mathbb{C}[D_n]$ への単射であって、その像は対称式全体である。つまり、次の同型が制限写像によって引き起こされる。

$$\mathbb{C}[M_{n,n}]^{\mathrm{Ad}\,GL_n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[D_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

Exercise 14.7 $X \in M_{n,n}$ に対して、X が巾零行列であることと、$f(X) = f(0)$ $(\forall f \in \mathbb{C}[M_{n,n}]^{\mathrm{Ad}\,GL_n})$ であることとは同値である。これを示せ。

巾零行列の $G = GL_n$ 共役類は、ジョルダン標準形の理論によって完全に記述され、それは n の分割と一対一に対応している。上にあげた事実は、不変式が G 軌道を必ずしも分離するわけではないことを教えてくれる。

Theorem 14.8 $M_{n,n}$ への左からの掛け算によって、$SL_n = SL(n, \mathbb{C})$ が作用しているとき、$\mathbb{C}[M_{n,n}]^{SL_n} = \mathbb{C}[\det]$ である。

Proof. 定理 14.1 によって、$G = GL_n$ とおくと、G の左右からの掛け算によって、$\mathbb{C}[M_{n,n}] \simeq \sum^{\oplus}_{\lambda} \tau(\lambda)^* \boxtimes \tau(\lambda)^*$ と分解している。このとき、$\tau(\lambda)^* \downarrow_{SL_n} \supset \mathbf{1}_{SL_n}$ であることと、ある $k \geq 0$ に対して、$\tau(\lambda)^* \simeq \det^{-k}$ と表されることとは同値である。さらにこれは $\lambda = (k, k, \ldots, k)$ であることと同値であり、この λ に対して、$\tau(\lambda)^* \downarrow_{SL_n} = \mathbf{1}_{SL_n}$ である。以上から、定理は明らかだろう。 Q.E.D.

Exercise 14.9 $\mathbb{C}[M_{n,n}]^{SL_n} = \mathbb{C}[\det]$ であることを直接証明してみよ。また、軌道空間 $SL_n \backslash M_{n,n}$ はどのように記述できるだろうか? [ヒント : $GL_n \backslash M_{n,n}$ を先に考えた方が有益かも知れない。これは、開かつ稠密な軌道を持つ (概均質ベクトル空間) が、軌道の個数は無限であるような例になっている。]

不変式論への応用の最後の話題として、GL_n の作用に関する不変式論の基本定理を示そう。

Theorem 14.10 (不変式論の基本定理) $V = \mathbb{C}^n$ に対して、$W = V^{\oplus k} \oplus (V^*)^{\oplus l}$ とおく。すると、$G = GL_n$ 不変式の全体 $\mathbb{C}[W]^G$ は、kl 個の二次式で代数として生成される。さらに、$2d$ 次の不変式の全体は、$GL_k \times GL_l$ の表現として、次のように既約分解する。

$$\mathbb{C}[W]^{GL_n}_{2d} \simeq \sum^{\oplus}_{\lambda \in \mathcal{P}_N,\, |\lambda| = d} \tau^{(k)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(l)}(\lambda) \qquad (N = \min\{n, k, l\}) \tag{14.3}$$

Proof. まず $V^{\oplus k} = V \otimes \mathbb{C}^k = M_{n,k}$ であることに注意しよう。したがって、

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}[W] &\simeq \mathbb{C}[M_{n,k} \oplus M^*_{n,l}] \simeq \mathbb{C}[M_{n,k}] \otimes \mathbb{C}[M^*_{n,l}] \\
&\simeq \Big(\sum^{\oplus}_{\lambda \in \mathcal{P}_{\min(n,k)}} \tau^{(n)}(\lambda)^* \boxtimes \tau^{(k)}(\lambda) \Big) \otimes \Big(\sum^{\oplus}_{\mu \in \mathcal{P}_{\min(n,l)}} \tau^{(n)}(\mu) \boxtimes \tau^{(l)}(\mu) \Big)
\end{aligned}$$

であるが、これの $G = GL_n$ 不変元を取れば、

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}[W]^G &\simeq \sum^{\oplus}_{\lambda,\mu} \big(\tau^{(n)}(\lambda)^* \otimes \tau^{(n)}(\mu)\big)^G \boxtimes \big(\tau^{(k)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(l)}(\mu)\big) \\
&\simeq \sum^{\oplus}_{\lambda = \mu} \tau^{(k)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(l)}(\mu) \\
&\simeq \sum^{\oplus}_{\lambda \in \mathcal{P}_N} \tau^{(k)}(\lambda) \boxtimes \tau^{(l)}(\lambda)
\end{aligned} \tag{14.4}$$

である。この過程でどう次数が変化するかを追跡すれば、定理の主張 (14.3) を得る。

さて、あとは不変式環の生成元に関する主張を示せばよい。そのために、具体的に不変元を構成してしまおう。$M_{n,k} \ni A$ と $M^*_{n,l} = M_{l,n} \ni B$ の積 BA を考えると、G の作用は、$(Bg^{-1})(gA) = BA$ だから、$BA \in M_{l,k}$ の (i,j) 成分を取り出す関数 $w_{i,j}$ は G 不変な二次式である。一方、これらの関数を用いて、k 次主小行列式を定義し、最高ウェイトベクトルを (12.3) 式と全く同じように決めれば、それが $GL_k \times GL_l$ の最高ウェイトベクトルを与える。問題はこれがゼロではないという事実を証明することにあるが、N 次主小行列式までがゼロでない関数を与えることは容易にわかる[22]。このようにして、結局 $w_{i,j}$ が不変式環を生

[22] 逆に $N+1$ 次以上の主行列式が消えてしまうことは、(14.4) 式よりわかる。

成していることが結論づけられる。 Q.E.D.

Exercise 14.11 $G = GL_n$ とし、$V = \mathbb{C}^n$ に対して、$W = V^{\oplus k} \oplus (V^*)^{\oplus l}$ とおく。

(1) $k, l \le n$ ならば、不変式環 $\mathbb{C}[W]^G$ の生成元である kl 個の二次式 $w_{i,j}$ は代数的に独立で、$\mathbb{C}[W]^G \simeq \mathbb{C}[M_{k,l}]$ であることを示せ。

(2) 一般に、$0 \le r \le \min(k, l)$ に対して、$M_{[k,l;r]} = \{X \in M_{k,l} \mid \operatorname{rank} X \le r\}$ を **行列式多様体**(determinantal variety) と呼ぶ[23]。 $N = \min\{k, l, n\}$ とおく。すると、$\mathbb{C}[W]^G = \mathbb{C}[M_{[k,l;N]}] = \mathbb{C}[M_{k,l}]/I_{N+1}$ が成り立つことを示せ。ただし I_r は r 次小行列式全体から生成されたイデアルを表す。

14.3 $GL_n \times \mathfrak{S}_n$ 双対 (Schur 双対)

この節では、一般線型群の表現を用いて対称群の表現を分類する。

抽象的には有限群の表現は非常に見通しがよい。例えば、その既約表現の個数は、共役類の個数と一致しており、原則的には正則表現を既約分解すれば全ての表現を得ることができる。また誘導表現の既約性も部分群の表現の問題に帰着するし、指標の直交関係を使って指標を求めることが容易な場合もある。しかし、そのような一般的な知識や事実とは裏腹に、個別の有限群の表現を扱うことは (その分類でさえ)、けっして容易ではない。例えば、Deligne や Lusztig という天才をもってして、はじめて有限 Chevalley 群の表現の分類と既約指標が 1980 年代に分類され、さらに既約指標表の作成に向けてのプログラムが提示されるところまでやってっきたのである[24]。これは Frobenius や Schur が $SL_2(\mathbb{F}_q)$ の表現を扱った時から数えて 80 年、Green によって $GL(\mathbb{F}_q)$ の指標が決定されてからでも 30 年を経過している。あるいは、別の例ではあるが、モンスター群の表現 (その群の構成でさえも) を考えてみてもその大変さは理解できるだろう[25]。しかし幸いにして、対称群の場合にはその表現論は比較的簡単であり、古く、Frobenius や Schur によって既約表現の分類が完成していた。

まず、いくつかの観察から話を始めることにしよう。$V = \mathbb{C}^n$ を n 次元のベクトル空間とする。我々の目標は、テンソル積 $V^{\otimes n} = V \otimes \cdots \otimes V$ (n 個) に座標の置換として対称群 $\mathfrak{S}_n$ を働かせ、その表現を分解することによって、全ての表現を分類しようというものである。

Lemma 14.12 $V^{\oplus n} = V \oplus \cdots \oplus V \simeq M_{n,n}$ を V の n 個の直和とする。このとき、自然な GL_n 同変な埋め込み $\iota : V^{\otimes n} \hookrightarrow S(V^{\oplus n}) \simeq S(M_{n,n})$ があり、その像は、$\operatorname{Im} \iota = (S(M_{n,n}) \otimes \det^{-1})^T$ として特徴づけられる。ただし、$M_{n,n}$ には $GL_n \times GL_n$ が $(g, g') \cdot X = gX{}^tg'$ で働いているとし、$T = \{1_n\} \times T$ と同一視する (つまり T は右からの掛け算で働く)。

Proof. V の基底を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ とするとき、$\iota(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) = E_{i_1,1} \cdot E_{i_2,2} \cdots E_{i_n,n}$ と決めればよい。ただし $E_{i,j} \in M_{n,n}$ は行列単位で、$S(M_{n,n})$ における積を $\cdot$ で現した。こ

[23]「行列式多様体」というのは筆者の造語である。まだ、よい訳語が無いようである。

[24]対応する代数群の中心が連結な場合に最後の止めを刺したのが、庄司俊明氏の 1995 年の論文であることは、我々の喜びとするところである。なお、同論文の B. Srinivasan によるレビュー [MR95k:20069] や、庄司氏自身による解説 [22] は概観に役に立つだろう。

[25]モンスターの登場が 1973 年、そして 194 個という驚くべき少ない数の既約指標が分類されたのが 1981 年以降のようである。

れが左からの掛け算による GL_n の作用に関して同変であること、また、$\mathrm{Im}\,\iota$ に関する主張はほぼ明らかだろう。 Q.E.D.

$\mathfrak{S}_n$ のテンソル積における成分の置換はこの場合次のように解釈できる。まず $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対応する置換行列を $w(\sigma)$ と書くと、その随伴作用は T を保つ。したがって、T 不変元の空間に作用する。このようにして $\mathfrak{S}_n$ の作用が $(S(M_{n,n}) \otimes \det^{-1})^T$ に構成できる。これが結局テンソル積の成分の入れ替えと一致すること (つまり ι が $\mathfrak{S}_n$ 同変でもあること) は計算してみれば分かる。

この補題から、$GL_n \times \mathfrak{S}_n$ の表現として、

$$\begin{aligned} V^{\otimes n} &\simeq (S(M_{n,n}) \otimes \det{}^{-1})^T \\ &\simeq \Big(\big(\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n}^{\oplus} \tau(\lambda) \boxtimes \tau(\lambda) \big) \otimes \det{}^{-1} \Big)^T \\ &\simeq \sum_{\lambda}^{\oplus} \tau(\lambda) \boxtimes (\tau(\lambda) \otimes \det{}^{-1})^T \end{aligned}$$

であることがわかる。次のことに注意しよう。

Lemma 14.13 最高ウェイト $\lambda \in \mathcal{P}_n$ をもつ GL_n の表現 $\tau(\lambda)$ に対して、$\tau(\lambda) \otimes \det^{-1}$ が、自明でない T 不変元を持つための必用条件は $|\lambda| = n$ であることである。

Remark 14.14 この後の証明から分かるように、これは必用十分条件である。

Proof. $t = z \cdot 1_n$ の作用を考えると、$\tau(\lambda)(t) = z^{|\lambda|}$ であって、また t を $\det^{-1}$ に作用させると $z^n \det^{-1}$ になることがわかる。このことから、$|\lambda| = n$ でなければならない。Q.E.D.

以上より、次の同型が分かった。

$$V^{\otimes n} \simeq \sum_{|\lambda|=n}^{\oplus} \tau(\lambda) \boxtimes (\tau(\lambda) \otimes \det{}^{-1})^T$$

これは左からの GL_n の掛け算による作用の既約分解となっていることに注目しよう。また、各 $(\tau(\lambda) \otimes \det^{-1})^T$ は $\mathfrak{S}_n$ の作用に関して不変部分空間となっている。目標はこれが $\mathfrak{S}_n$ の既約表現になっていることを示すことであるが、それには次の補題を示せば十分である。

Lemma 14.15 $V^{\otimes n}$ の $GL_n \times \mathfrak{S}_n$ の作用に関する自己準同型 (self-intertwiner) の次元は、n の**分割数** $p(n)$ に等しい。

Proof. $p(n) = \#\{\lambda \in \mathcal{P}_n \mid |\lambda| = n\}$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} (V^{\otimes n} \otimes (V^{\otimes n})^*)^{GL_n \times \mathfrak{S}_n} &\simeq \big(((V \otimes V^*)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \big)^{GL_n} \\ &\simeq S_n(V \otimes V^*)^{GL_n} \simeq \sum_{|\lambda|=n}^{\oplus} \big(\tau(\lambda) \otimes \tau(\lambda)^* \big)^{GL_n} \\ &\simeq \sum_{|\lambda|=n}^{\oplus} \mathbb{C} = \mathbb{C}^{p(n)} \end{aligned}$$

Q.E.D.

Corollary 14.16 $|\lambda| = n$ ならば、$(\tau(\lambda) \otimes \det^{-1})^T$ はすべて $\mathfrak{S}_n$ の既約表現で、しかもゼロではない。

一方、$V^{\otimes n} \ni e_1 \otimes \cdots \otimes e_n$ を通る $\mathfrak{S}_n$ 軌道はちょうど $\mathfrak{S}_n$ と同型で、したがって、$\mathfrak{S}_n$ の正則表現を含んでいる。だから、$\{(\tau(\lambda) \otimes \det^{-1})^T \mid |\lambda| = n\}$ は $\mathfrak{S}_n$ の既約表現を網羅していなければならない。ところが、$p(n)$ は $\mathfrak{S}_n$ の共役類の個数であり、それはまた既約表現の総数でもある。したがって、$\{(\tau(\lambda) \otimes \det^{-1})^T \mid |\lambda| = n\}$ は $\mathfrak{S}_n$ の既約表現の同値類の代表系になっている。

以上をまとめると次の定理を得る。

Theorem 14.17 (Schur の双対律) $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 $(\tau(\lambda) \otimes \det^{-1})^T$ を $\sigma(\lambda)$ で表わす。すると、$\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n) = \{\sigma(\lambda) \mid |\lambda| = n\}$ であって、しかも

$$V^{\otimes n} \simeq \sum_{|\lambda|=n}^{\oplus} \tau(\lambda) \boxtimes \sigma(\lambda)$$

が成り立つ。さらに $\mathrm{Hom}_{GL_n}(V^{\otimes n}, V^{\otimes n}) \simeq \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ であり、また

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(V^{\otimes n}, V^{\otimes n}) \simeq \sum_{|\lambda|=n}^{\oplus} \tau(\lambda)^* \otimes \tau(\lambda)$$

は GL_n の表現の作用素で生成される $\mathrm{End}\, V^{\otimes n}$ の部分環である。

Proof. 証明されていないのは、最後の二つの主張であるが、例えば一つ目の主張は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{GL_n}(V^{\otimes n}, V^{\otimes n}) &\simeq ((V^{\otimes n})^* \otimes V^{\otimes n})^{GL_n} \\
&\simeq \sum_{\lambda,\mu}^{\oplus} (\tau(\lambda)^* \otimes \tau(\mu))^{GL_n} \boxtimes (\sigma(\lambda)^* \otimes \sigma(\mu)) \\
&\simeq \sum_{\lambda}^{\oplus} \sigma(\lambda)^* \otimes \sigma(\lambda) \simeq \mathbb{C}\mathfrak{S}_n
\end{aligned}$$

と計算できる。二つ目の方も同様である。 Q.E.D.

Example 14.18 (1) $\mathfrak{S}_n$ の自明な表現は $\lambda = (n, 0, \ldots, 0)$ に対応している。実際、ペアになっている GL_n の表現は $S_n(V)$ (n 次対称テンソル積の空間) 上の既約表現であるが、その最高ウェイトは $\lambda = (n, 0, \ldots, 0)$ であって、最高ウェイトベクトルは e_1^n である。これについては 例 11.4(3) を参照せよ。

(2) $\mathfrak{S}_n$ の符号表現は $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$ に対応している。このとき、対応する GL_n の表現は外積 $\bigwedge^n V$ 上の表現になるが、これは明らかに det 表現である。その最高ウェイトはちょうど $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$ である。このようにして行列式と対称群の符号表現は互いに相手を規定していて、線型代数学において行列式は対称群の符号表現を用いて導入されるのが普通である。

例であげた二つの一次元表現以外では、対称群の既約表現のパラメータ付を知ることはそれほどやさしくない。興味を持った読者は例えば [2] などを見てみられるとよいだろう。

Exercise 14.19 GL_n の最高ウェイト $\lambda = (n-1, 1, 0, \ldots, 0)$ を持つ既約表現 $\tau(\lambda)$ に対応する、$\mathfrak{S}_n$ の既約表現 $\sigma(\lambda)$ は、$\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の置換表現の自明な表現による商表現に一致することを示せ (演習問題 2.7 参照)。特にそれは $n-1$ 次元の表現である。

[ヒント：$\tau(\lambda)$ は最高ウェイトベクトル $\Delta_2(X) \cdot x_{1,1}^{n-2}$ で生成される。このときウェイトが $(1, 1, \ldots, 1)$ であるようなウェイト空間は次の形のもので生成される。

$$x_{1,1}x_{2,1}\cdots x_{i-1,1}\begin{vmatrix} x_{i,1} & x_{i,2} \\ x_{i+1,1} & x_{i+1,2} \end{vmatrix} x_{i+2,1}\cdots x_{n,1}$$

一方、$V = \mathbb{C}^n$ の基底を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ と書くと、置換表現を自明な表現で割った商空間は基底 $\{e_i - e_{i+1} \mid 1 \le i < n\}$ を持っている。この基底を上の関数に対応させることで同型が得られる。]

Exercise 14.20 n をいくつかの自然数の和に書き表すことを考える。適当に和の順序を入れ替えると

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \qquad (\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_k \ge 1)$$

のようにできる。これを n の**分割**と呼ぶ。さらに $\lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ と置くことにより、このような分割の仕方は $\{\lambda \in \mathcal{P}_n \mid |\lambda| = n\}$ と一対一に対応することが分かる。このとき、分割の総数 $p(n)$ の母関数が次のように与えられることを示せ。

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1-t^i)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) t^n$$

Part IV

直交群

15　対称行列の空間

この節では、直交群が一般線型群の球部分群であることを示そう。つまり $\tau(\lambda)$ を GL_n の既約表現とするとき、$O_n = O(n, \mathbb{C})$ の自明な表現の $\tau(\lambda)\downarrow_{O_n}$ における重複度は 1 以下である。あるいはそれは、Frobenius の相互律によって $\operatorname{Ind}_{O_n}^{GL_n} \mathbf{1}_{O_n}$ が重複度自由に分解することと同値であった。

　われわれはまず、複素対称行列の全体

$$\mathrm{Sym}_n = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_{n,n} \mid {}^tX = X\}$$

を考えることからはじめよう。この空間には GL_n が $g \cdot X = gX{}^tg$ $(g \in GL_n, X \in \mathrm{Sym}_n)$ という形で作用している。

Theorem 15.1 (対称行列の軌道分解) Sym_n の部分集合 $\mathbb{O}_r$ を次のように定義する。

$$\mathbb{O}_r = \{X \in \mathrm{Sym}_n \mid \operatorname{rank} X = r\} \qquad (0 \le r \le n)$$

このとき、$\mathbb{O}_r$ は $\operatorname{diag}(1_r, 0_{n-r})$ を通る GL_n 軌道であり、対称行列全体の空間は

$$\mathrm{Sym}_n = \coprod_{r=0}^{n} \mathbb{O}_r$$

と軌道分解する。また、各軌道の閉包は$\overline{\mathbb{O}_r} = \coprod_{k=0}^{r} \mathbb{O}_k$ で与えられる。(このようなとき、閉包関係は線型であるという。)

Proof. $\mathbb{O}_r$ がただ一つの GL_n 軌道になることさえ示せば、後はやさしい。対称行列は二次形式と一対一に対応しており、任意の (複素数体上の) 二次形式は標準形として $x_1^2 + \cdots + x_r^2$ を持つ (例えば、[25, §1.4] を参照せよ)。このことから、軌道が階数によって分類されることが分かる。 Q.E.D.

Exercise 15.2 $X \in \mathrm{Sym}_n$ に対して、$\Delta_k(X) \neq 0$ $(1 \le k \le n)$ であることと、ある $t \in T, u \in U^-$ が存在して、$X = ut{}^tu$ と表わされることは同値である。これを証明せよ。

[ヒント：演習問題 12.9 参照。]

　さて、Sym_n の対称代数 $S(\mathrm{Sym}_n)$ (あるいは同じことだが、多項式環 $\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n^*]$) 上の GL_n の表現を考えてみよう。これは次のように既約分解できることが分かる。

Theorem 15.3 $V = \mathbb{C}^n$ とし、GL_n の表現として $\mathrm{Sym}_n \simeq S^2(V)$ (二次の対称テンソル積表現) とみなすことにする。このとき、$S(\mathrm{Sym}_n)$ は GL_n の表現として次のように重複度自由に既約分解される。

$$S(\mathrm{Sym}_n) \simeq \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n}^{\oplus} \tau(2\lambda)$$

ただし $2\lambda = (2\lambda_1, \ldots, 2\lambda_n)$ である。

Proof. $S(\mathrm{Sym}_n)$ の中の最高ウェイト表現をすべて決定すればよい。$\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n^*]$ を考えた方が都合がよいのでそうする。Sym_n^* は、ものとしては Sym_n と同じであるが、GL_n の作用が $g \cdot X = {}^t g^{-1} X g^{-1}$ で与えられていることに注意しよう。

いま $f \in \mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n^*]$ が最高ウェイトベクトルなら、f は稠密開集合 $\mathrm{Sym}_n' = \{X \in \mathrm{Sym}_n \mid \Delta_k(X) \neq 0 \ (1 \leq k \leq n)\}$ 上の値で決まってしまう。ところが上の演習問題より、$X \in \mathrm{Sym}_n'$ は $X = u t {}^t u$ と分解されている。したがって、$f(X) = f(u t {}^t u) = L_{{}^t u} f(t) = f(t)$ であって、結局対角成分上の値で決まる。ところが、$s \in T$ は $L_s f(t) = f({}^t s t s) = f(s^2 t)$ と作用すること、f は多項式であることを考え合わせると、そのウェイトは 2λ の形をしていなければならない。

逆に最高ウェイトが 2λ の最高ウェイトベクトルが存在することは、補題 12.13 とまったく同様にして示される。 Q.E.D.

さて、$\mathbb{O}_n \subset \mathrm{Sym}_n$ を考えよう。この軌道は $\mathbb{O}_n = \{X \in \mathrm{Sym}_n \mid \det X \neq 0\}$ と書いてもよいことに注意する[26]。この軌道は 1_n を通る GL_n 軌道で、1_n における固定部分群は直交群 O_n そのものである。したがって、$\mathbb{O}_n \simeq GL_n/O_n$ が成り立っている。このことから、

$$\mathbb{C}[\mathbb{O}_n] \simeq \mathbb{C}[GL_n/O_n] \simeq \mathrm{Ind}_{O_n}^{GL_n} \mathbf{1}_{O_n}$$

が成り立っている。以上の注意のもとに、定理 15.3 の証明とまったく同様にして、次の定理を示すことができる。

Theorem 15.4 P^+ で優ウェイトの全体を表わす。このとき、次の同型が成り立つ。

$$\mathbb{C}[GL_n/O_n] \simeq \mathrm{Ind}_{O_n}^{GL_n} \mathbf{1}_{O_n} \simeq \sum_{\lambda \in P^+}^{\oplus} \tau(2\lambda)$$

したがって、O_n は GL_n の球部分群である。

Proof. 定理 15.3 の証明において f を多項式としたが、それを (多項式)/$\det^k$ の形を許して考えればよいだけである。 Q.E.D.

[26]つまり Sym_n の det による局所化である。従って、アフィン代数多様体であって、その関数環は $\mathbb{C}[\mathbb{O}_n] = \mathbb{C}[x_{i,j}, \det^{-1}]$ で与えられる。ただし、$x_{i,j} = x_{j,i}$ と取り決めておこう。

Corollary 15.5 次の同型が成り立つ。

$$\mathbb{C}[M_{n,n}]^{O_n} \simeq \mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n]$$

このことから、$\mathrm{Sym}_n \simeq M_{n,n}//O_n$ と表わして、Sym_n を $M_{n,n}$ の O_n による**アフィン幾何学商**と呼ぶ。

Remark 15.6 アフィン幾何学商写像 μ は$\mu(A) = A^t A$ で与えられる。これは左 GL_n 同変であって、右からは O_n で不変な写像である。

Exercise 15.7 各 $\mathbb{O}_r$ に対してその固定部分群を求めよ。$G = GL_n$ とし、$x \in \mathbb{O}_r$ における固定部分群を G_x とすれば、$\dim \mathbb{O}_r = \dim G/G_x = \dim G - \dim G_x$ であることが分かっている。これを用いて、 $\dim \mathbb{O}_r$ を計算せよ。

Exercise 15.8 $\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}_r}]$ を GL_n の表現として既約分解してみよ。

[ヒント : $\overline{\mathbb{O}_r}$ は Sym_n のアフィン閉部分多様体であるから、GL_n 同変な全射 (制限写像) $\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n] \to \mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}_r}]$ が存在する。したがって、その既約成分は $\tau(2\lambda)$ の形をしている。あとは、この全射の核を求めればよい。]

16 調和関数

$V \simeq \mathbb{C}^n$ には直交群 O_n が自然に作用している。V の標準基底を例の如く $\{e_1, \ldots, e_n\}$ と書き、i 番目の成分を取り出す関数を x_i で表す。このとき、V 上の多項式環 $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ には左正則表現として O_n が作用している。よく知られているようにこのときの不変式は "長さ関数" $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ で生成される一変数多項式環 $\mathbb{C}[r^2]$ に等しい。これをまず確認しておこう。

Lemma 16.1 $V = \mathbb{C}^n$ とする。上の設定の下に $\mathbb{C}[V]^{O_n} = \mathbb{C}[r^2]$ $(r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2)$ が成り立つ。

Proof. GL_n をやはり V に行列の積として自然に働かせる。すると、$V = M_{n,1}$ なので、すでに見たように

$$\mathbb{C}[V] \simeq \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_1}^{\oplus} \tau(\lambda)^* \qquad (\lambda = (\lambda_1, 0, \ldots, 0) \text{ であることに注意})$$

と分解していた。さらに、$\tau(\lambda)^*\downarrow_{O_n}$ において O_n 不変元は 1 次元以下であり、ちょうど 1 次元となるのは $\lambda = 2\mu$ と書けるとき、つまり、λ が**偶分割**であるときである。また、$\tau(\lambda)^*$ の元の多項式としての次数は $|\lambda|$ であったことを考え合わせると、$\mathbb{C}[V]^{O_n}$ は、偶数次の斉次式の空間にちょうど一次元づつ分布していることがわかる。

ところが、すでに $\mathbb{C}[r^2] \subset \mathbb{C}[V]^{O_n}$ は明白であり、これらは偶数次の空間にちょうど一次元づつあるのだから、不変元はこれですべてである。 Q.E.D.

ここでの議論は本来ポアンカレ級数を用いたほうがすっきりするのだが、それはまた後ほど導入することとする。

さて、O_n の V における自明でない軌道は、

$$\mathbb{O}_\rho = \{v \in V \mid r^2(v) = \rho\} \quad (\rho \neq 0), \qquad \mathbb{O}_{\text{null}} = \{v \in V \mid v \neq 0, r^2(v) = 0\},$$

でパラメータづけされている。 複素数の空間で考えているため、ρ は任意の複素数であって、$\rho \neq 0$ なら、それらの軌道は本質的にすべて同じ (代数多様体として同型 $/\mathbb{C}$) で、アフィン閉部分多様体あることに注意しよう。$\mathfrak{N} = \mathbb{O}_{\text{null}} \cup \{0\}$ は**零化錐** (null cone) と呼ばれ[27]、ちょうど基本不変式の零点になっている。したがって、零化錐そのものはアフィン閉部分多様体だが、それは二つの軌道に分かれる。一つは自明な軌道で閉であり、もう一方は閉ではなく準アフィン多様体でしかない ($n \geq 3$)。

これらの軌道上に関数を制限するとどうなるかを少し考えてみよう。まず、少し特別ではあるが、零化錐 $\mathfrak{N}$ 上の関数環の構造を明らかにする。

零化錐においては $r^2 = 0$ となって、O_n 不変式の部分は (定数項を除いて) 消滅してしまう。さて、k 次斉次式の全体 $\mathbb{C}[V]_k$ は GL_n の既約表現になっていたが、r^2 によるかけ算写像

$$\mu_{r^2} : \mathbb{C}[V]_{k-2} \xrightarrow{r^2\text{ による積}} \mathbb{C}[V]_k$$

は O_n 同変である。しかし、零化錐上では μ_{r^2} の像は消滅してしまう! そこで $\tau(k) = \tau((k, 0, \ldots, 0))$ を GL_n の $\mathbb{C}[V]_k$ 上の既約表現とすれば、自然に O_n の商表現 $\tau(k)\downarrow_{O_n}/\tau(k-2)\downarrow_{O_n}$ が考えられる。この商表現を $\eta(k)$ で表すことにしよう。

Theorem 16.2 $\Delta = \partial(r^2)$ でラプラス作用素を表す。$f \in \mathbb{C}[V]$ が $\Delta f = 0$ を満たすなら、f は**調和多項式**と呼ばれる。調和多項式の全体を $\mathcal{H}$ で表そう。すると、次の同型が成り立つ。

$$\mathbb{C}[V] \simeq \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[V]^{O_n} = \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[r^2], \qquad \mathbb{C}[\mathfrak{N}] \simeq \mathcal{H} \quad (O_n\text{ 加群としての同型})$$

調和多項式の空間は O_n の表現として次のように重複度自由に既約分解する。

$$\mathcal{H} \simeq \sum_{k=0}^{\infty}{}^{\oplus} \eta(k), \qquad \eta(k) = \tau(k)\downarrow_{O_n}/\tau(k-2)\downarrow_{O_n}$$

ただし、$\eta(k)$ は上で定義した O_n の表現であって、すべての $k \geq 0$ について既約である[28]。

Proof. 証明は少し長い。

[27]零化錐という言葉は筆者の造語であり、この講義でのみ使われる。まだよい訳語が定着していないようである。

[28]実は適当に正ルート系を指定すれば、$\eta(k)$ は最高ウェイト $(k, 0, \ldots, 0)$ (長さは $[n/2]$) の O_n の既約表現であることがわかる。しかし、この講義では O_n の最高ウェイトの理論をやっているヒマが無い (しかも非連結!) ので、この注意はまるで無駄であろう。

まず、$\mathbb{C}[V] = \mathcal{H}\cdot\mathbb{C}[r^2]$ (多項式の掛け算) であることを示そう。こちらは比較的簡単である。任意の斉次式 f を取ると、$\Delta^{k+1}f = 0$ かつ $\Delta^k f \neq 0$ となる $k \geq 0$ が存在する。このとき、$\Delta^k f = h$ は調和多項式であって、さらに

$$f \equiv \frac{1}{2^k k! \prod_{l=1}^k (\deg h + n + l - 1)} (r^2)^k h \qquad \mod \mathbb{C}[r^2]_{k-1}\mathcal{H}$$

である (演習問題 16.4 参照)。このことから、$\mathbb{C}[V] = \mathcal{H}\cdot\mathbb{C}[r^2]$ となることはほぼ明らかであろう。

つまり、$\forall f$ は $\mathcal{H}$ を係数とするような r^2 の多項式で書けることがわかった。同じ演習問題 16.4 から、f の r^2 の最高次の項の係数は一意的に決まることが結論される。したがって、残りの項の係数も帰納的に決まり、結局 $\mathbb{C}[V] = \mathcal{H}\otimes\mathbb{C}[r^2]$ となることがわかる。さらに $\mathfrak{N}$ の定義方程式が r^2 だから、$\mathbb{C}[\mathfrak{N}] = \mathbb{C}[V]/(r^2) \simeq \mathcal{H}$ は明らかであろう。

以上の議論により、k 次の調和多項式の空間を $\mathcal{H}_k$ と書くならば、$\eta(k) \simeq \mathcal{H}_k$ であることがわかり、それは $\tau(k)/r^2\tau(k-2)$ と同型である。したがって、定理の証明で残っていることは、$\mathcal{H}_k$ が O_n の表現として既約であって、しかも $\mathcal{H}_k \not\simeq \mathcal{H}_l$ $(k \neq l)$ となることである。これを $(\mathbb{C}[V^*]\otimes\mathbb{C}[V])^{O_n}$ を計算することで証明しよう。

Lemma 16.3 次の次数環としての同型が成り立つ。

$$(\mathbb{C}[V^*]\otimes\mathbb{C}[V])^{O_n} \simeq (\mathbb{C}[r^2]\otimes\mathbb{C}[\Delta])\otimes\mathbb{C}[t] \simeq \mathbb{C}[\mathrm{Sym}_2]$$

ただし t は $\mathcal{H}$ の次数付けを表す不定元である[29]。

Proof. あらすじを述べる。まず $\mathbb{C}[V^*]\otimes\mathbb{C}[V] \simeq \mathbb{C}[V^*\oplus V]$ であることに注意しよう。さらに O_n 加群としては $V^* \simeq V$ なので、結局、$\mathbb{C}[V\oplus V]^{O_n}$ を調べればよい。

そのためには、まず $GL_n \times GL_2$ で上の表現を分解しておいて、それから O_n 不変元をとる。つまり

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}[V\oplus V]^{O_n} &\simeq \Big(\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_2}^{\oplus} \tau^{(n)}(\lambda)\boxtimes\tau^{(2)}(\lambda)\Big)^{O_n} \\
&\simeq \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_2}^{\oplus} \tau^{(n)}(\lambda)^{O_n}\boxtimes\tau^{(2)}(\lambda) \\
&\simeq \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_2}^{\oplus} \tau^{(2)}(2\lambda) \simeq \mathbb{C}[\mathrm{Sym}_2]
\end{aligned}$$

これを r^2, Δ, t と対応づけるのは、各ステップの同型をつぶさに見ていけばよい (ハズだ)。
Q.E.D.

[29] $t = E$ とするのがよいかも知れない。少なくともそうしたい誘惑に駆られる。

Schur の補題によって、

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{C}[V^*] \otimes \mathbb{C}[V])^{O_n} &\simeq \Big(\big(\sum_k^{\oplus} \mathcal{H}_k^* \otimes \mathbb{C}[\Delta] \big) \otimes \big(\sum_l^{\oplus} \mathcal{H}_l \otimes \mathbb{C}[r^2] \big) \Big)^{O_n} \\
&\simeq \sum_{k,l}^{\oplus} (\mathcal{H}_k^* \otimes \mathcal{H}_l)^{O_n} \boxtimes \big(\mathbb{C}[\Delta] \otimes \mathbb{C}[r^2] \big)
\end{aligned}
$$

だから、上の補題によって、$(\mathcal{H}_k^* \otimes \mathcal{H}_l)^{O_n} \simeq \delta_{k,l}\mathbb{C}$ がわかる。これが証明したい事実であった。 Q.E.D.

Exercise 16.4 (1) 一般に $[\Delta, r^2] = \Delta r^2 - r^2\Delta = 2(E+n)$ であることを示せ。ただし

$$
E = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}
$$

は**オイラー作用素**である。

(2) h が調和であるとき、$\Delta(r^2 \cdot h) = 2(E+n)h$ である。これを利用して、

$$
\Delta^k (r^2)^k h = 2^k k! \prod_{l=1}^k (E+n+l-1)h
$$

となることを確認せよ。

次に $\rho \neq 0$ の時、つまり半径が $\sqrt{\rho}$ の "球面" を考えよう (もっとも複素数で考えるので、実数空間の球面とは少し違うが)。Witt の定理によって、O_n は $\mathbb{O}_\rho$ 上に推移的に働いていることに注意しよう。また、一点 $\sqrt{\rho}\, e_n \in V$ の固定部分群は $O_{n-1} = \mathrm{diag}\,(O_{n-1}, 1)$ である。したがって、$\mathbb{O}_\rho \simeq O_n / O_{n-1}$ となっている[30]。

Theorem 16.5 $\eta(k) = \mathbb{C}[V]_k / r^2\mathbb{C}[V]_{k-2}$ を O_n の既約表現とする。このとき、軌道 $\mathbb{O}_\rho$ 上の正則関数環は次のように分解する。

$$
\mathbb{C}[\mathbb{O}_\rho] \simeq \mathrm{Ind}\,_{O_{n-1}}^{O_n} \mathbf{1}_{O_{n-1}} \simeq \mathcal{H} \simeq \sum_{k \geq 0}^{\oplus} \eta(k)
$$

特に O_n の $\mathbb{O}_\rho$ への作用は重複度自由である。

Proof. 分解

$$
\mathbb{C}[V] \simeq \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[r^2]
$$

において $r^2 = \rho$ とすれば、$\mathbb{C}[\mathbb{O}_\rho] \simeq \mathcal{H}$ であることがわかる。他のことは既に証明済み。 Q.E.D.

以上のような理由から、$\mathcal{H}$ を球面に制限した関数を**球面調和関数**と呼ぶ。

[30] もちろん SO_n / SO_{n-1} でもよい。

Part V

付録

17　表現論的に見てみよう

「数学セミナー」2000 年 2 月号 (特集「代数的とは」) 用の原稿

17.1　開幕

研究していることをとことん突き詰めてゆくと、最後には簡単な代数的問題に帰着してしまう。そのような経験を、数学者は持っているに違いない。それがたとえ解析的な問題であったり、あるいは幾何の問題であっても事情は変らない。数学に限らず所詮人間ができることは代数的な操作に還元されてゆく‥‥ というと大法螺になるのかもしれないが、そう断言してしまいたくなるほど代数の道具は強力である。中でも、群とその表現を考えることは、代数的手法の強力さをいっそう明らかにしてくれる。なにしろ究極の理論とも言うべき、素粒子を統制すると思われている「万物の法則」が表現論によって語られているのを見てもそれは明らかだろう。

17.2　球面という舞台

2 次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を考えよう。$\mathbb{R}^3$ の測度 $dxdydz$ を球面とそれに垂直な動径方向に分けることで、球面上には自然な測度 $d\omega$ が存在する (ただし便宜上、全面積を 1 に規格化しておく)。$\mathbb{R}^3$ の空間極座標を取って考えてみよう。まず地球儀を心の中に思い浮かべて欲しい[31]。地表上の位置は赤道面から測った角度、つまり緯度 φ $(-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2)$ と、グリニッチ (Greenwich) を 0 とする経度 θ $(-\pi \le \theta \le \pi)$ で決まる[32]。$\mathbb{R}^3$ 内の任意の点 $P(x, y, z)$ は、原点 O と P を結ぶ線分の長さ $r \ge 0$ と、直線 OP と単位球面との交点 ω の緯度と経度の組 (φ, θ) を指定すれば決まる。つまり P の直交座標は

$$(x, y, z) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi) = r\cdot\omega \quad (\omega \in S^2)$$

である。するとよく知られた変数変換の公式から

$$dxdydz = r^2 dr\cdot\cos\varphi d\varphi d\theta$$

が成り立つ。この式において球面 S^2 に関係する部分は $\cos\varphi d\varphi d\theta$ だから、

$$d\omega = \frac{1}{4\pi}\cos\varphi d\varphi d\theta$$

である。さて、S^2 上の測度 $d\omega$ に関する二乗可積分関数、あるいは L^2 関数の空間

$$L^2(S^2) = \{f : S^2 \to \mathbb{C} \mid \int_{S^2} |f(\omega)|^2 d\omega < \infty\}$$

を考えよう。$L^2(S^2)$ は定義のされ方からして解析的な空間だが、代数的にとらえることができる。以下では、$L^2(S^2)$ の本質が実は代数的なものであり、積分計算や微分方程式の解を求めるといった本来解析的な操作が、群の作用と表現論をうまく使うと代数的に行なえることを紹介したい。

[31]別に月面儀でも良いのだけれど。最近は火星儀なんてのも出ているのかも知れない。
[32]φ が正なら北緯、負の時は南緯と呼ぶ。同様に θ が負の時は西経で、正なら東経である。

17.3 ここで群が登場する

$SO(3)$ を 3×3 の直交行列で、行列式が 1 のもの全体とする。

$$SO(3) = \{A \in Mat(3, \mathbb{R}) \mid {}^tAA = A^tA = 1_3 \text{ (単位行列)},\ \det A = 1\}$$

$G = SO(3)$ は、行列の積や逆行列を取ることで閉じているので**行列群**である。実は G はコンパクトな連結リー群というものになっているのだが、今はあまり気にしないでおこう。

さて、 $G = SO(3)$ は、行列の積によって $\mathbb{R}^3$ の線型変換を引き起こす。この変換は長さを変えないので、G は単位球面 S^2 を不変にしている。従って、G の元 g は S^2 の変換を誘導するが、このようなとき、G は S^2 に**作用する**とか**働く**という。$G \ni g$ の作用は自由[33]ではなく、S^2 のある直径を軸とする回転になる。そこで北極 $\mathbf{N}$ (と南極 $\mathbf{S}$) を固定する G の元全体からなる部分群を K と書くと、

$$K = \left\{ u_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \simeq SO(2) \tag{17.1}$$

である。ここで

$$G \ni g \mapsto g \cdot \mathbf{N} \in S^2 \tag{17.2}$$

という写像を考えてみよう。$G = SO(3)$ の元は全てある軸に関する回転移動を表すので、要するにこの写像は地球をグリグリ回転させて北極をニューヨークとか、東京に重ね合わせる操作になる。少し考えると適当な回転で北極 $\mathbf{N}$ は地球上の任意の地点に持ってこれることがわかるだろう[34]。つまり写像(17.2) は全射である。このようなとき、G の S^2 上への作用は**推移的**であるという。さらに K による右側からの商空間 G/K を考えることで、球面の点 $g \cdot \mathbf{N}$ $(g \in G)$ と剰余類 gK が一対一に対応するようになる。これは(17.2) から導かれる自然な写像 $G/K \to S^2$ の単射性に他ならない。したがって、この写像によって球面 S^2 と G/K は同一視できて、

$$S^2 \simeq G/K \simeq SO(3)/SO(2) \tag{17.3}$$

と書ける。これを理解しやすいように図式で表しておこう。

$$\begin{tikzcd} g \in G \arrow[d, "\text{標準射影}"'] \arrow[dr, "\text{全射}"] & \\ gK \in G/K \arrow[r, "\sim", "\text{同型}"'] & S^2 \ni g \cdot \mathbf{N} \end{tikzcd}$$

[33] g の作用が自由であるとは g が固定点を持たない変換であることを指す。一般に S^2 上の変換は必ず固定点を持つ。

[34] もちろん南極だってどこへでも持っていける。南極にはペギラが棲んでいるから、東京と重ね合わせると「東京氷河期」となるわけだ。(少しネタが古いか)

同型(17.3) によって S^2 上の L^2 関数は

$$L^2(G/K) = \{f : G \to \mathbb{C} \mid \int_G |f(g)|^2 dg < \infty, \quad f(gk) = f(g)\ (\forall g \in G, \forall k \in K)\}$$

と同一視できる。ここで dg は **Haar 測度**と呼ばれる G 上の不変測度[35]を表している。つまり $L^2(S^2) \simeq L^2(G/K)$ が成り立つ。従って我々の目標は、 $L^2(G/K)$ を表現論的に解釈する、ということになる。

そこでもうお馴染みかも知れないが、少し表現論地方の方言を復習しておこう。まず、群 G が与えられたとき、G の**表現**とは、あるベクトル空間 V と、群の準同型$\pi : G \to GL(V)$ の組 (π, V) のことである。ここで $GL(V)$ は V から V 自身への可逆な線型写像の全体のなす群で、**一般線型群**と呼ばれる。表現とは要するに抽象的な群 G を、具体的でよくわかっている行列群 $GL(V)$ 内に "実現する" ことである (準同型像ではあるが)。V を π の**表現空間**と呼び、$V = V_\pi$ とも書く。また、$\dim V < \infty$ なら**有限次元表現**、V にエルミート内積が定義されていて、$\pi(g)$ $(g \in G)$ がユニタリ変換なら**ユニタリ表現**などと形容詞をつけて呼ぶ。

V の部分空間 U で、$\pi(g)(U) \subset U$ $(g \in G)$ となるなら、$\pi(g)$ を U に制限することによってまた表現が得られる。これを V の**部分表現**と呼ぶ。もし V がゼロ以外に真の部分表現を持たなければ (π, V) を**既約**という。

さて、表現が既約でなく、ゼロではないような真の部分表現 U を持つとしよう。この U に対して、V における U の補空間 U' であって、それ自身がまた部分表現になっているものが取れたとする。このとき $V = U \oplus U'$ を表現 V の**直和分解**という。π を U, U' に制限したものをそれぞれ $\pi_U, \pi_{U'}$ と書くなら、π の行列表示は

$$\pi(g) = \begin{pmatrix} \pi_U(g) & 0 \\ 0 & \pi_{U'}(g) \end{pmatrix} \qquad (g \in G)$$

とできるだろう。このように行列表示すると、まるで惑星直列のようになって、まさに直和分解というにふさわしい。

V が有限次元で既約でないなら、直和分解を繰り返してゆくことで既約表現の直和に分解してしまうと考えるかも知れない。これはある意味で正しいのだけれど、実は、部分表現 U に対して、どのように補空間を取ってもそれが $\pi(g)$ で不変にならないことがある。このような時には、V は既約ではないけれども、直和分解はできない。それは、行列が対角化できる場合（固有ベクトルによる基底が取れる場合）と、対角化できない場合（一般固有空間を考える必要がある場合）の関係と全く同じことである。人生、いつもそううまくいくとは限らない。

ところが、我々の扱うコンパクト群 $G = SO(3)$ に対しては、任意の有限次元表現 (τ, V) は既約表現の直和として分解されることが知られている。このことを記号で次のように書く。

$$V \simeq \sum_{(\pi, V_\pi) \in \mathrm{Irr}(G)}^{\oplus} m_\pi V_\pi \quad \text{または} \quad \tau \simeq \sum_{(\pi, V_\pi) \in \mathrm{Irr}(G)}^{\oplus} m_\pi \pi$$

[35] G 上の関数 f と $h, h' \in G$ に対して$\int_G f(gh)dg = \int_G f(h'g)dg = \int_G f(g)dg$ が成り立つような測度を言う。G がコンパクト群ならこのような測度は定数倍を除いて一意的に存在する。

ここで $\mathrm{Irr}(G)$ は G の既約有限次元表現の全体で、m_π は (π, V_π) が V の分解に何回現れるかを表す非負整数である。m_π を表現 π の**重複度**と呼ぶ。これを見たらわかるように、一般の表現を分子に例えるなら、既約表現はもうそれ以上は分解できない原子のようなもので[36]、表現論では一番重要かつ基本的な対象である。

17.4 群上の関数たち

我々の目標は $L^2(G/K)$ であったが、その前にまず、G 上の L^2 関数の空間 $L^2(G)$ を代数的に調査してみよう。すこしややこしいが、群 G には G 自身が左から、あるいは右からの掛け算で作用していることに注意しよう。つまり舞台となる空間が G そのもので、そこに作用している群も同じ G というわけだ。さて、この作用は G の $L^2(G)$ 上の (無限次元) 表現を引き起こす。それらを具体的に書くと、$f(x) \in L^2(G), g \in G$ に対して

$$L_g f(x) = f(g^{-1}x), \quad R_g f(x) = f(xg)$$

となる。$(L_\bullet, L^2(G))$ を**左正則表現**、$(R_\bullet, L^2(G))$ を**右正則表現**という。これらの表現では、表現空間が無限次元なので表現の作用素 L_g や R_g はもう行列ではないが、このような無限次元表現を考えるのはとても重要なのである。

さて、関数 $f \in L^2(G)$ は $\{L_g f \mid g \in G\}$ によって生成された $L^2(G)$ の部分空間が有限次元になるとき、つまり

$$\dim \left\{ \sum_{g \in G:\text{有限和}} c_g L_g f \mid c_g \in \mathbb{C} \right\} < \infty \tag{17.4}$$

となるとき (左) **局所有限**と呼ばれる[37]。無限次元表現を代数的に考えるときには、このような局所有限関数を考えるととても都合がよい。$L^2(G)$ の局所有限関数の全体を $L^2(G)^\circ$ と表そう。$L^2(G)^\circ$ は $L^2(G)$ の代数的な部分表現になっているが、これはかなり "大きな" 表現である。これを既約表現の直和に分解することを考えよう。

Theorem 17.1 (Peter-Weyl) $L^2(G)^\circ$ は L^2 ノルムに関する $L^2(G)$ の稠密な部分空間であって、G 上の解析関数からなる。さらに G の表現として

$$L^2(G)^\circ \simeq \sum_{(\pi, V_\pi) \in \mathrm{Irr}(G)}^{\oplus} V_\pi^* \otimes V_\pi$$

が成り立つ。ここに $\mathrm{Irr}(G)$ は G の有限次元既約ユニタリ表現 (π, V_π) の全体を表し、さらに V_π^* は V_π の双対空間上の反傾表現を表す。

この定理は一見難しそうだが、その本質は簡単である。用語を含めて少し解説しておこう。まず双対空間 V_π^* だが、これは V_π から $\mathbb{C}$ への線型写像のなすベクトル空間である。つまり

$$V_\pi^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\pi, \mathbb{C}) = \{\psi : V_\pi \to \mathbb{C} : \text{線型写像}\}$$

[36]原子は素粒子に、素粒子はさらにクォークに分解するということも現代では知られているけど、ここでは昔の素朴な原子論の枠組での話。

[37]左局所有限と、同様にして定義される右局所有限の概念は一致する。

である。$v \in V_\pi, \psi \in V_\pi^*$ に対して、ψ による v の像を$\psi(v) = \langle \psi, v\rangle \in \mathbb{C}$ と書き、この $\langle , \rangle$ を V_π と V_π^* の間の自然なペアリングという。さて、V_π^* は単なるベクトル空間というだけではなく、もとの表現 (π, V_π) を用いて次のように V_π^* 上の表現 π^* が自然に定義される。

$$\langle \pi^*(g)\psi, v\rangle = \langle \psi, \pi^{-1}(g)v\rangle \quad (g \in G, \psi \in V_\pi^*, v \in V_\pi)$$

このように定義された表現 (π^*, V_π^*) を**反傾表現**または**双対表現**と呼ぶ。

以上の記号を使うと、上の定理の同型を実際に与えてしまうことができる。実際それは

$$\Psi : \sum_{(\pi,V_\pi)\in \mathrm{Irr}(G)}^{\oplus} V_\pi^* \otimes V_\pi \xrightarrow{\ \sim\ } L^2(G)^\circ$$

$$\Psi(v^* \otimes v)(g) = \langle v^*, \pi(g^{-1})v\rangle \quad (v^* \in V_\pi^*, v \in V_\pi, g \in G)$$

で与えられる。この式に現れる $g \in G$ の関数 $\langle v^*, \pi(g^{-1})v\rangle$ は表現の**行列要素**と呼ばれている[38]。Peter-Weyl の定理は、既約表現の行列要素によって $L^2(G)$ が生成されている、ということを述べているにすぎない。また、上の具体的な同型写像の表示を見れば、$V_\pi^* \otimes V_\pi$ のうち左正則表現に対応するものは V_π の方で、右正則表現に対応するものは V_π^* であることも見て取れるだろう。左正則表現を考えるときには V_π^* は単に**重複度**の空間とみなされるのである。これをちょっと計算で確かめておこう。

$$\begin{aligned}\Psi(v^* \otimes \pi(g)v)(x) &= \langle v^*, \pi(x^{-1})\pi(g)v\rangle = \langle v^*, \pi((g^{-1}x)^{-1})v\rangle \\ &= \Psi(v^* \otimes v)(g^{-1}x) = L_g\Psi(v^* \otimes v)(x)\end{aligned}$$

確かに v への作用 $\pi(g)$ が Ψ で写すことにより左正則表現 L_g に化けている[39]。諸君は是非 v^* への作用のほうも確かめてみてほしい。

$(\pi, V_\pi) \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して $d_\pi = \dim V_\pi$ とおいて、V_π の正規直交基底 $\{u_1, \ldots, u_{d_\pi}\}$ を選び、さらに $\{u_1^*, \ldots, u_{d_\pi}^*\}$ を対応する V_π^* の双対基底とする。このとき $f \in L^2(G)$ に対して

$$c_{ij} = d_\pi \int_G f(g)\overline{\langle u_i^*, \pi(g^{-1})u_j\rangle}dg$$

とおくと、同型 Ψ の逆写像は

$$\Psi^{-1}(f) = \sum_{(\pi,V_\pi)\in \mathrm{Irr}(G)} \sum_{1\le i,j\le d_\pi} c_{ij}\, u_i^* \otimes u_j$$

で与えられる。これは f の行列要素による **フーリエ級数展開**に他ならない。またこのように定義した写像が Ψ の逆写像であるという主張は、フーリエ級数の和がもとの関数に一致するというフーリエ逆変換の性質に帰着する。部分空間 $L^2(G)^\circ$ に属する関数は行列要素の有限和で表されているので、フーリエ逆変換公式は行列要素の**直交関係式**[40]を用いて容易に確かめることができる。

---

[38]有限次元表現なら、表現の行列要素とは、要するに $\pi(g)$ を行列表示した時の行列成分を g の関数と思ったものである。

[39]"化かす" ことを英語で intertwine という。このような写像 Ψ を intertwiner とか intertwining 作用素と呼んでいる。

[40][21] の定理 3.33 を参照。

17.5 舞台は再び球面上へと転廻する

さて、もうとっくにお忘れかもしれないが、$L^2(S^2) = L^2(G/K)$ であった。一般に G の表現 (ρ, V) に対して、K 不変元の全体を

$$V^K = \{v \in V \mid \rho(k)v = v \quad (k \in K)\}$$

で表そう。すると Peter-Weyl の定理から

$$L^2(S^2) = L^2(G/K) = L^2(G)^K \simeq \Bigl(\sum_{(\pi,V_\pi)\in \mathrm{Irr}(G)}^{\oplus} (V_\pi^*)^K \otimes V_\pi\Bigr)^{\text{閉包}} \tag{17.5}$$

がわかる。K 不変元の空間 $L^2(G)^K$ は右正則表現について取るので、V_π^* の K 不変元を取っていることに注意する。また、肩付き文字の「閉包」は L^2 ノルムでの閉包を表している。さて、(17.1) 式の行列 u_θ を思い出しておこう。これは北極と南極を結ぶ軸に関する角度 θ の回転を表している。既約表現 (π, V_π) に対し、この行列を表現したもの $\{\pi(u_\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ は V_π 上の可換な線型変換の族である。従って、これらはすべて同時対角化可能であるが、その同時固有値は $\{e^{2j\sqrt{-1}\,\theta} \mid -d \le j \le d\}$ $(d_\pi = 2d+1)$、重複度はすべて 1 であることが、$\mathfrak{sl}_2$ の表現論[41]よりよく知られている。この場合、K 不変元とは同時固有値が 1 の固有ベクトルのことであるから $(V_\pi^*)^K \simeq \mathbb{C}$、したがって(17.5) より

$$L^2(S^2) \simeq \Bigl(\sum_{(\pi,V_\pi)\in \mathrm{Irr}(G)}^{\oplus} V_\pi\Bigr)^{\text{閉包}}$$

がわかる。これで $L^2(S^2)$ の表現論的な意味がはっきりした。興味深いことに $L^2(S^2)$ 上には $G = SO(3)$ の**すべての**既約表現が重複度 1 で丁度一回づつ現れる!

いよいよ球面上のラプラシアンの固有値と固有関数を求めてみよう。まず S^2 のラプラシアン Δ_{S^2} は、$G = SO(3)$ のリー環 $\mathfrak{g}$ の展開環 $U(\mathfrak{g})$ のカシミール元 $\Delta_{\mathfrak{g}}$ からやって来ることに注意しよう[42]。

$$\Delta_{S^2} f(\varphi, \theta) = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

とおくと、$\Delta_{S^2} = -\frac{1}{2}\Delta_{\mathfrak{g}}$ となる。一方 $(\pi, V_\pi) \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して、

$$\pi(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \frac{1}{2}(d_\pi^2 - 1)\cdot \mathrm{id}_{V_\pi}$$

であることがやはり $\mathfrak{sl}_2$ の表現論より知られている。

[41] $SO(3)$ のリー環を複素化したものは $SL_2(\mathbb{C})$ のリー環 $\mathfrak{sl}_2$ と同型である。

[42] 展開環 $U(\mathfrak{g})$ はリー環 $\mathfrak{g}$ を結合的代数として普遍的に拡張したものである。具体的には $\mathfrak{g}$ の元の非可換多項式に $[X,Y] = XY - YX$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ という関係式を入れて構成される。カシミール元は $U(\mathfrak{g})$ の 2 次の多項式で、$U(\mathfrak{g})$ の中心に属している。

Theorem 17.2 球面 S^2 上のラプラシアン Δ_{S^2} の固有値は

$$\{-\frac{1}{4}(d_\pi^2-1) \mid d_\pi \geq 1 \text{ は奇数 }\} = \{0, -2, -6, -12, -20, \ldots\}$$

であって、固有値 $-\frac{1}{4}(d_\pi^2-1)$ の固有関数の次元 (= 重複度) は $d_\pi = \dim V_\pi$ に等しい。

さらに固有関数もこの考察から具体的にわかるのである。まず $(V_\pi^*)^K \ni w^* \neq 0$ を選び、

$$f_{\pi,v}(g) = \langle w^*, \pi(g^{-1})v \rangle \quad (v \in V_\pi)$$

とおけば、この行列要素が Δ_{S^2} の固有関数になっている! w^* の選び方は定数倍を除いて一意的であるから、固有関数は本質的に $v \in V_\pi$ の自由度だけあることに注意する。

ここでは、紙数の関係で詳しく紹介できないが、表現論を用いて K 不変元を求めることや、カシミール元 $\Delta_{\mathfrak{g}}$ の固有値を求めることは、純粋に代数的な作業であることを強調しておこう。あまりに代数的すぎて、ついそれがこのような解析的な現実と関係していることを忘れてしまうほど、それは代数的である。この部分については神保道夫 [23] を参考にするのが一番よいと思う。

17.6 球面調和関数が颯爽と登場する

球面上の関数を造り出す手っ取り早い方法は、$\mathbb{R}^3$ の多項式を S^2 に制限することである。代数幾何学の出発点はこのようにして多項式を制限することにより、S^2 上の多項式関数が全て得られるという認識にあった。今の場合、制限写像

$$\rho : \mathbb{C}[x,y,z] \ni f \mapsto f\big\downarrow_{S^2} \in L^2(S^2)$$

の像 $\operatorname{Im}\rho \subset L^2(S^2)$ は L^2 ノルムに関して稠密である[43]。

さて、$\mathbb{R}^3$ には $G = SO(3)$ が行列の積で自然に働いているが、G によって不変な多項式の全体は $\mathbb{C}[x,y,z]$ の部分環になる。これを**不変式環**と呼ぶ。$SO(3)$ は距離を不変にするので、$R = x^2+y^2+z^2$ は明らかに不変式だが、逆に不変式環は R の多項式の全体 $\mathbb{C}[R]$ に一致することが比較的容易にわかる。R の決める双対的な微分作用素

$$\partial R = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

は $\mathbb{R}^3$ のラプラシアンに一致していることに注意しよう。

Definition 17.3 $\Delta f = 0$ となるような多項式 $f \in \mathbb{C}[x,y,z]$ を**調和多項式**と呼ぶ。その全体を $\mathcal{H}$ と書く。

$\mathcal{H}$ と不変式環 $\mathbb{C}[R]$ の間には次のような美しい関係がある。

---

[43] いつもこんなにうまくは行かない。この場合には S^2 のコンパクト性が効いている。

Theorem 17.4 $\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}[R]$ と多項式環 $\mathbb{C}[x,y,z]$ は積を取る写像によって自然に G 同型である。つまり任意の多項式は $\mathcal{H}$ の元を係数とするような R の多項式としてただ一通りに表すことができる。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}\otimes\mathbb{C}[R] & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[x,y,z] \\ \Cup & & \Cup \\ \sum_{k=0}^{\infty} h_k\otimes R^k & \longmapsto & \sum_{k=0}^{\infty} h_k\cdot R^k \end{array}$$

球面 S^2 への制限に話を戻すと、制限写像によって$\rho(\sum_{k=0}^{\infty} h_k\cdot R^k)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho(h_k)$ だから、$\operatorname{Im}\rho=\rho(\mathcal{H})$ であるが、実は $\rho\downarrow_{\mathcal{H}}$ は単射でもあることが知られている。つまり$\rho:\mathcal{H}\xrightarrow{\sim}\operatorname{Im}\rho\subset L^2(S^2)$ は同型写像である。$\mathcal{H}$ を多項式の次数によって直和分解し、

$$\mathcal{H}=\sum_{d=0}^{\infty}{}^{\oplus}\mathcal{H}_d$$

と書いておこう。すると $\mathcal{H}_d$ は次元が $(2d+1)$ の $SO(3)$ の既約表現になる。これより直ちに

$$\rho:\mathcal{H}\xrightarrow{\sim}\sum_{(\pi,V_\pi)\in\operatorname{Irr}(G)}{}^{\oplus}V_\pi=\operatorname{Im}\rho\underset{\text{稠密}}{\subset}L^2(S^2)$$

であって、$\rho(\mathcal{H}_d)=V_\pi$ (ただし、 $d_\pi=\dim V_\pi=2d+1$) であることが結論される。球面上に制限された調和関数 $\rho(\mathcal{H}_d)$ を**球面調和関数**と呼ぶ

ところで空間極座標によって $\mathbb{R}^3$ のラプラシアン $\Delta=\Delta_{\mathbb{R}^3}$ を表すと

$$\Delta=\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}$$

となっている。$\mathcal{H}_d$ 上では $\Delta=0$ であったから、$f\in\mathcal{H}_d$ に対して

$$\Delta f=\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}f=0 \tag{17.6}$$

である。ここで、f が d 次斉次なので $f(r\omega)=r^d f(\omega)$ となることに注意すれば、

$$\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=d(d+1)r^{d-2}f(\omega)$$

と計算できる。したがって(17.6) と合わせて、

$$\Delta_{S^2}f=-d(d+1)r^d f(\omega)=-d(d+1)f$$

である。$d(d+1)=(d_\pi^2-1)/2$ なので、このことは $\rho(\mathcal{H}_d)=V_\pi$ であることと、既に述べた定理 17.2 とピッタリ符合する!

もちろん話はラプラシアンのみにとどまらない。S^2 上の多項式関数の球面上の積分を求めるのにもこの手法は使える。これを説明してみよう。まず $h\in\mathcal{H}$ が定数項を含まないような球面調和関数なら、

$$\int_{S^2}h(\omega)d\omega=0$$

である。これは次のようにしてわかる。$\rho : \mathcal{H}_d \xrightarrow{\sim} V_\pi$ だったので、$h \in \mathcal{H}_d$ に対して $\exists v \in V_\pi$ を取ると

$$\rho(h)(g \cdot \mathbf{N}) = \langle \pi(g) w^*, v \rangle \in L^2(G)$$

である。ただし、w^* は V_π^* の K 不変ベクトルであった。つまり h は表現の行列要素であって、しかも K 球関数でもあるというわけである。一方行列要素はそれが定数でない限り G 上で積分すると消える。つまり

$$\int_{S^2} h(\omega) d\omega = \int_G \langle \pi(g) w^*, v \rangle dg = 0$$

である。したがって、驚く勿れ、S^2 上積分してゼロにならないのは定数のみなのである!

驚く勿れ? ここで鼻先でフフンと笑えたらもう表現論の専門家である (ホンマか?)。実はこれは表現論的に見れば当たり前のことなのである。というのも、ある関数 f の球面上の積分を計算することは f のフーリエ級数の定数項を求めることに他ならず、行列要素のフーリエ級数は自分自身に一致するので、それが自明な表現 (= 定数項) に対応していない限り積分は消えてしまう。

次に、一般の多項式 $f(x, y, z)$ を S^2 に制限した場合を考えよう。f を d 次斉次とすると、

$$f = \sum_{0 \leq k \leq d/2} h_k \cdot R^k \quad (R = x^2 + y^2 + z^2)$$

と書けている。これを S^2 に制限して定数になるのは $\deg h_k = d - 2k = 0$、つまり $k = d/2$ のときに限る。特に d が奇数なら f の球面上の積分はゼロである。そこで $d = \deg f$ を偶数と仮定しよう。すると

$$\Delta^{d/2} f = (d+1)! h_{d/2}$$

となって、しかも $h_{d/2}$ は定数であることが少し[44]計算すればわかる。

以上から、f が d 次斉次多項式なら、

$$\int_{S^2} f(\omega) d\omega = \begin{cases} \dfrac{1}{(d+1)!} \Delta^{d/2} f & (d \in 2\mathbb{Z}) \\ 0 & (d \in 2\mathbb{Z} + 1) \end{cases}$$

がわかる。つまり微分することで球面上の積分が計算できる!

[44]だいぶん? ヒントとなる計算を説明抜きで書いておく。まず $[\Delta, R] = 2n + 4E$ に注意する。ここで n は空間の次元 (従って今の場合には $n = 3$)、E はオイラー作用素である。すると

$$[\Delta, R^k] = R^{k-1}(2nk + 4 \cdot 2 \sum_{i=0}^{k-1} i) = 2k(n + 2k - 2) R^{k-1}$$

だから、

$$\Delta R^k h = R^k \Delta h + 2k(n + 2k - 2) R^{k-1} h = 2k(n + 2k - 2) R^{k-1} h$$

がわかる ($\Delta h = 0$ を使った)。これより上の式はほぼ明らかだろう。

17.7 終幕

球面 S^2 の話はもちろんこれで終りではない。ローレンツ群 $SO_0(3,1)$ とその極小放物型部分群 P を考えると、

$$S^2 \simeq SO_0(3,1)/P$$

であって、$L^2(S^2)$ は $SO_0(3,1)$ の**主系列表現**と呼ばれる無限次元のユニタリ表現の表現空間になる。このように考えると $L^2(S^2)$ 全体が $SO_0(3,1)$ の一つの既約ユニタリ表現と考えられ、そこにはとても強力な対称性、つまりローレンツ群による対称性が潜んでいたことがわかる。

表現論を用いて数学の問題を考えるときには、例えば S^2 を $SO(3)/SO(2)$ とか、$SO_0(3,1)/P$ とかという具合に、**等質空間**と関係づけて見る『目』が必要になる。それは空間に潜んでいる隠れた対称性を探すことでもある。

群と関係づけられた空間はとても美しい構造を持つので、一般の空間に比べると微々たる数でしかない (もちろん無限にあるが)。しかし同時に数学的に面白い対象はほとんどの場合さまざまな対称性を秘めた美しい空間である。例えば光錐とか、 determinatal variety、射影空間、旗多様体などがよい例だろう。どのような『目』を持って数学をするのか、それによって群と表現という道具の働き方もまた違ってくる。さまざまな見方ができる確かな『目』を持つことで数学自身が実り多い豊かなものになってゆくと思う。

ここでは代数的な見方で、 Peter-Weyl の定理やあるいは調和多項式と不変式の双対定理から球面上の関数の分解を導いた。表現論の手法はもちろんこれで終りではなく、例えば、$L^2(G/K)$ を K の自明な表現からの誘導表現 (の表現空間) と見ることも可能である。

$$L^2(G/K) \simeq \mathrm{Ind}\,_K^G \mathbf{1}_K$$

そして、フロベニウスの相互律を用いることによって、表現の具体的な分解が得られる。このような話も極めて代数的に展開することが可能で、表現論では重要な手法の一つとなっている。しかし残念ながら紙数も尽きたようである。これらの話題については下の参考文献を参照して欲しい。

最後に、一つ宿題を出しておこう。読者諸君はここに述べた話が円 S^1 の場合にどのようになるのか、それは古典的なフーリエ解析とどのように結び付くのかを是非考えてみて欲しい。たぶん面白い発見があるはずである。余裕のある読者は高次元の球面 S^{n-1} に対しても問題がどのように一般化されるかを考えてみられるとよいと思う。

そのような冒険に出かけるときには [19], [21], [23], [26], [32], [11], [14] などが役に立つだろう。

18 群環と原始イデアル

「数学セミナー」2000 年 2 月号 (特集「代数的とは」) のボツ原稿

群とは頗る幾何的な対象であるように思う．有限群はきわめて高い対称構造を内包した有限集合である．それは例えば有限群をその Cayley グラフで視覚的に表してみるとよくわかる (図 ??? 参照)．位相群の一つであるリー群はそれ自身多様体の構造をもっている．もっともこれは均質的な空間ではあるが，例えばリー群 G をその部分群 H で割った商空間 G/H はうまく完備化 (あるいはコンパクト化) すると自然な特異点が現れる (図 ??? 参照: G/Γ が良いか?)．

またクラインの言葉に従えば，幾何学とはある空間に働く変換群を考えたとき，その変換群によって不変な空間の性質を研究する学問である．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ には合同変換群が働いてユークリッド幾何が，そして射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ には射影変換群 $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$ が働き，射影幾何学が考えられる．リーマン幾何もこの枠組みで解釈可能である．(図を入れる; ユークリッド幾何: 平面と二つの三角形，その二つを重ね合わせる合同変換; 射影幾何: 円と楕円，双曲線，放物線をそれぞれ重ね合わせる射影変換; リーマン幾何: ???)

ん? いや，この稿では代数的とは何かを論じるのが目的であった．あやうく忘れ去るところであったが，群 G を表現するというのはそもそもある種の代数化にあたる．何故か? 単なるこじつけかもしれないが... (未完)

18.1 有限群の群環

話をチョー簡単にするため，最初は G を有限群とする．例えば G として，対称群 $\mathfrak{S}_n$ とか，二面体群 D_n，はたまた p 次巡回群 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ などを思い浮かべていただければよい．このとき，G の元の形式的な一次結合の全体を $\mathbb{C}G$ で表す．

$$\mathbb{C}G = \{\sum_{g\in G} c_g g \mid c_g \in \mathbb{C}\}$$

$\mathbb{C}G$ は G の元を一つの基底とするベクトル空間だが，それだけではない．$\mathbb{C}G$ には群 G の演算を線型に拡張することにより自然な積が定義されるのである．例えば，対称群 $\mathfrak{S}_3$ でなら，

$$\begin{aligned}\{(1,2)+(2,3)\}\cdot\{(1,2)-(2,3)\} &= (1,2)^2-(1,2)\cdot(2,3)+(2,3)\cdot(1,2)-(2,3)^2 \\ &= 1-(1,2,3)+(1,3,2)-1 = (1,3,2)-(1,2,3)\end{aligned}$$

というように．ここで $(1,2)$ は互換，$(1,2,3)$ は 3 次の巡回置換を表している．[45]

これで $\mathbb{C}G$ にはスカラー倍と和，積が定義されたことになる．つまり $\mathbb{C}G$ は $\mathbb{C}$ 上の代数である．[46]このように非可換代数の構造を持つ $\mathbb{C}G$ を G の**群環**と呼ぶ．残念なことに G

[45] ここで出てきた対称群の用語については例えば [27] を参照してほしい．

[46] 単位元を含む環であって，かつ体 k 上のベクトル空間であるようなものを k 上の代数 (algebra) と呼ぶ．代数学という分野を表しているのではナイ．

Table 1: 群の表現と群環の表現

$$\text{群の表現} \underset{\text{制限}}{\overset{\text{線型に拡張}}{\rightleftarrows}} \text{群環の表現}$$

が非可換なら $\mathbb{C}G$ も非可換だが，スカラー倍と和が加わったことで，群環 $\mathbb{C}G$ は G そのものより格段に扱いやすい対象である．

もっとも群環は群そのものではないから，考えている対象によっては群環を使ってもメリットが無いこともあるし，かえって難しくなることもあるだろう．ところが G の表現論を考えるときには群環を考えることがとても役に立つのである．

ベクトル空間 V とともに群準同型 $\pi : G \to GL(V)$ が与えられているとき，(π, V) を G の V 上の**表現**と呼ぶのであった．このとき π を $\mathbb{C}G$ から $\operatorname{End} V$ への写像に線型に拡張したものを ρ とすれば，群環の表現 (ρ, V) を得る．つまり

$$\rho(\sum_{g\in G} c_g g) = \sum_{g\in G} c_g \pi(g) \in \operatorname{End} V$$

と定義するわけである．**群環の表現**とは非可換代数としての準同型 $\rho : \mathbb{C}G \to \operatorname{End} V$ に他ならない．$\pi(g)$ は $GL(V)$ に属するが，$\rho(x)$ $(x \in \mathbb{C}G)$ は必ずしも可逆ではないことに注意しよう．

一方，もし群環 $\mathbb{C}G$ の表現 (ρ, V) が与えられていれば，$g \in G$ を自然に群環の元と見て $\pi(g) = \rho(g)$ とおくことにより，群の表現 (π, V) が得られる．このようにして群環の (非可換代数としての) 表現と群の表現は一対一に対応する．G の表現 (π, V) をどちらかと言えば群環の表現として考えたいときには，V を G **加群**と呼ぶことが多い．

18.2 群環の原始イデアルと既約表現の分類

非可換代数の一般論は (特に今の場合は有限次元だから) かなり深い理論が構築されていて，それからいろいろなことがわかる．例えば $\mathbb{C}G$ の**既約表現**[47] は全て $\mathbb{C}G$ の正則表現の商として表せる．特にそれは有限次元である．これを群環の場合に説明してみよう．

(ρ, V) を $\mathbb{C}G$ の既約表現として，ゼロでない $v \in V$ を任意に選ぶ．

$$I_L(v) = \{x \in \mathbb{C}G \mid \rho(x)v = 0\}$$

とおけば，$I_L(v)$ は左イデアルになっていて，

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{C}G/I_L(v) & \xrightarrow{\sim} & V \\ & \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ & x \mod I_L(v) & \longmapsto & \rho(x)v \end{array}$$

[47]既約表現とは $\{0\}$ と V 以外に不変部分空間が存在しないときに言う．自明でない不変部分空間があるとその商表現が作れるので，既約表現とはある意味で極小な表現のことである．

は well-defined な G 加群としての同型写像を導く．実際，写像 ϕ が x の選び方によらず決まることは $I_L(v)$ での商を考えるので OK．次に ϕ が G 加群としての同型である点を確認してみる．ϕ が全射であることは V の既約性から従う．単射であることは $I_L(v)$ の定義の仕方から明らか．さらに ϕ が intertwinig 作用素になることは

$$\begin{aligned}\phi(a \cdot x \mod I_L(v)) &= \rho(ax)v = \rho(a)(\rho(x)v) \\ &= \rho(a)\phi(x \mod I_L(v))\end{aligned}$$

となることよりわかる．

(ρ, V) の既約性はまた $I_L(v)$ が $\mathbb{C}G$ の**極大**左イデアルであることを我々に教えてくれる．この左イデアル $I_L(v)$ は $v \in V$ の選び方に依存しているが，

$$I(V) = \bigcap_{v \in V} I_L(v) = \{x \in \mathbb{C}G \mid \rho(x)V = (0)\}$$

は V のみによって決まる．上式の二番目の表示の仕方から，$I(V)$ が両側イデアルであることが容易に見て取れるだろう．$I(V) = \operatorname{Ann} V$ とも書く．このイデアルをあとで述べる理由によって本稿では**原始イデアル**と呼ぶことにする．

原始イデアルは既約表現の同値類を完全に決めてしまう．つまり，(ρ_1, V_1) と (ρ_2, V_2) を $\mathbb{C}G$ の既約表現とすると

$$V_1 \simeq V_2 \quad (\text{同値な表現}) \iff I(V_1) = I(V_2)$$

が成り立つ．じつはもっと強く，次の定理が成り立つのである．

Theorem 18.1 $\mathbb{C}G$ の両側イデアルが原始イデアルことと極大両側イデアルであることは同じである．さらに $\mathbb{C}G$ の既約表現の全体を $\operatorname{Irr}(\mathbb{C}G)$ と書くと，

$$\operatorname{Irr}(\mathbb{C}G) \ni (\rho, V) \longmapsto I(V) \in \{\text{ 極大両側イデアル }\} = \{\text{ 原始イデアル }\}$$

は全単射写像を与える．

この全単射写像の逆は，次のように与えられる．極大両側イデアル I を含む極大左イデアル I_L をとり，$V = \mathbb{C}G/I_L$ で，G の作用を左からのかけ算で定義すればよい．

さて，表現論の原初的な問題の一つとして，

Problem 18.2 群 G の既約表現を全て決定し，その具体的な実現を与えよ．

というものがある．有限群の場合には，すべての (有限次元) 表現はいくつかの既約表現の直和に分解することが知られているので，表現を分子にたとえるなら，既約表現は原子のようなものである．したがって上の問題は，要するに「原子の周期律表を作り，その表の各原子に標本を一つずつ付け加えて，夏休みの終わりに提出しなさい」という夏休みの宿題[48] に似ている．実は標本と一口に言っても，それはさまざまであって，一つの原子 (= 既約表現) にいろんな標本 (= 実現の仕方) があったりするが，それはこの際あまり気にしないでおこう．

[48]いつも夏休みの宿題には泣かされたのを思い出す．

すると定理 18.1 は，既約表現の分類が原始イデアルでできること，その実現が原始イデアルを含むような極大左イデアルによって与えられることを示している．これは曲がりなりにも問題への解答といえるだろう．

最後に $\mathbb{C}G$ の構造について触れておこう．既約表現 (ρ, V) に付随する原始イデアルを $I(V)$ と書くと，

$$\Phi : \mathbb{C}G/I(V) \ni (x \mod I(V)) \longmapsto \rho(x) \in \operatorname{End} V$$

は非可換代数の同型写像となる．Φ が単射であることと代数準同型であることは簡単に確かめられるが，全射であることは若干の考察を必要とする．さらに $\mathbb{C}G$ が半単純であることを用いると，次の定理を得る．

Theorem 18.3 非可換代数として，$\mathbb{C}G$ は各既約表現の表現空間上の全行列環の直和である．

$$\mathbb{C}G \simeq \sum_{(\rho,V)\in \operatorname{Irr}(\mathbb{C}G)}^{\oplus} \operatorname{End} V$$

Corollary 18.4 $\mathbb{C}G$ 自身を左からの G の積によって G の表現と見たとき (左正則表現)，次の直和分解が成り立つ．

$$\mathbb{C}G \simeq \sum_{(\rho,V)\in \operatorname{Irr}(\mathbb{C}G)}^{\oplus} V^* \otimes V$$

ここで V^* は V の双対空間であるが，表現 V の $\mathbb{C}G$ における重複度を表している．[49]

Corollary 18.5 有限群の元の個数 $\#G$ と既約表現の次元の間には次の関係が成り立つ．

$$\#G = \sum_{(\pi,V)\in \operatorname{Irr}(G)} (\dim V)^2$$

少し例を見てみよう．その前に，もし G が可換群であれば，$\mathbb{C}G$ は可換環であって，良く知られているように極大 (両側) イデアルを I とすれば，$\mathbb{C}G/I \simeq \mathbb{C}$ となることに注意する．特にこの場合にはすべての既約表現は一次元である (よく知られた事実ではあるが)．

Example 18.6 p 次巡回群 $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を考えることにして，演算を乗法的に書こう．x を G の生成元とすれば，$G = \{1, x, x^2, \ldots, x^{p-1}\}$ である．$x^p = 1$ だから，群環は

$$\mathbb{C}G \simeq \mathbb{C}[x]/(x^p - 1)$$

となっている．$\zeta \in \mathbb{C}$ を 1 の原始 p 乗根として，$x^p - 1 = \prod_{i=0}^{p-1}(x - \zeta^i)$ と因数分解しておくと，$\mathbb{C}G$ の極大イデアルによる分解は

$$\mathbb{C}G \simeq \mathbb{C}[x]/(x^p - 1) \simeq \sum_{i=0}^{p-1}{}^{\oplus}\, \mathbb{C}[x]/(x - \zeta^i)$$

で得られる．直和成分 $\mathbb{C}[x]/(x - \zeta^i)$ に対応する既約表現はもちろん $G \ni x \mapsto \zeta^i \in \mathbb{C}$ で決まる一次元表現である．

---

[49] 右正則表現を同時に考えれば，V^* は右正則表現の表現空間で，V がその重複度を表すと考えることもできる．

18.3 リー群の表現の代数化

有限群の次に**リー群**を考えてみよう．リー群を同じ記号で G と書く．

群環はもともと群上の関数のようなものだから，素直に考えると G 上の C^∞ 関数の全体 $C^\infty(G)$ とか，あるいは可積分関数の全体 $L^1(G)$ などを考えるのがよいということになる．確かにそのようなアプローチもあるのだが，ここでは別のものを考えよう．

リー群 G の表現 (π, V) を考えよう．すでにもう V **は有限次元とは限らない**．G が非コンパクト群のときには，むしろ興味ある表現は無限次元であると言ってもよいくらいである．その代わりに V は位相ベクトル空間とし，π は何らかの意味で連続とする．例えば，ヒルベルト空間 V 上の弱連続な表現というように．

さて，連続群 G のこのような表現を代数的に捉えるには実は『微分する』ことが有効なのである．きわめて解析的な手段と思われる微分が，表現の代数化のために使われるというのも面白い．表現を微分することによって，G の**リー環** $\mathfrak{g}_0$ の表現が，そしてそれを複素数係数に線型に拡張することにより $\mathfrak{g}_0$ の複素化である $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0$ の表現が得られる．

$$\{G \text{ の表現 }\} \ni (\pi, V) \mapsto (d\pi, V^\infty) \in \{\mathfrak{g} \text{ の表現 }\}$$

ここで V^∞ は V の C^∞ ベクトル[50]の全体を表す．このような滑らかなベクトルたちは V の中で稠密である (つまり十分に多い) ことが知られている．このようにして解析的な群 G の表現を，複素数体上のリー環 (あるいはリー代数[51]) の表現という代数的な対象に置き換えることができる．

しかしこれには問題点がある．それはリー環 $\mathfrak{g}$ が結合的代数ではないという点である．代数学で得られる多くの結果が通常結合的な (可換) 代数を基にしていることを考えれば，これはかなり不便なことである．そこでいささか乱暴だが，ある普遍性を持つ結合的代数で $\mathfrak{g}$ を置き換えてしまおう．そのようにして得られる (結合的) 代数を $\mathfrak{g}$ の**展開環**と呼んで $U(\mathfrak{g})$ で表す．

$U(\mathfrak{g})$ の普遍性とは，要するに $\mathfrak{g}$ のリー環としての表現があれば，それを $U(\mathfrak{g})$ に延長でき，また展開環の表現はリー環の表現を定めるという二点につきる．実際 $U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の元の非可換な多項式の全体 (つまりテンソル代数) に

$$[X, Y] = XY - YX \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

という関係式を入れて定義された，$\mathfrak{g}$ を自然に含むような結合的代数である．もちろん**括弧積** $[X, Y]$ はリー環の非結合的な積を表す．この関係式はリー環の表現が展開環の表現に自然に延長できることを保証するためのものである．

さて，$\mathfrak{g}$ は有限次元だが，その展開環 $U(\mathfrak{g})$ は**無限次元**であって，しかも**非可換**な代数である．結合的という良い性質を手に入れるために，我々は有限次元性という強力な道具立てを失ってしまう．結合的代数に帰着するという要請はかくのごとく非常に強い．一方，G の既約表現が通常は無限次元であることを考え合わせると，**無限次元の結合的代数に導かれる**

[50] C^∞ ベクトルとは要するに $\pi(g)v$ が g について微分可能になるようなベクトル $v \in V$ のことである．
[51] 不思議なことに英語では通常 Lie algebra と呼ばれるにもかかわらず，日本ではリー環と呼ばれることが多い．

Table 2: リー群の表現の代数化

$$G\text{ の表現} \xrightarrow{\text{微分}} \mathfrak{g}\text{ の表現} \underset{\text{制限}}{\overset{\text{拡張}}{\rightleftarrows}} U(\mathfrak{g})\text{ の表現}$$

のは自然であるとも言える．実際それが有限次元なら，既に見たように既約表現は全て有限次元になってしまうのだから．

18.4 展開環の表現と原始イデアル

さて，G の表現はしばし忘れて，$U(\mathfrak{g})$ の代数的に既約な表現 (ρ, V) を考えてみよう．このときやはり，ゼロでない $v \in V$ に対して

$$I_L(v) = \{X \in U(\mathfrak{g}) \mid \pi(X)v = 0\}$$
$$I(V) = \{X \in U(\mathfrak{g}) \mid \pi(X) = 0\} = \operatorname{Ann} V$$

を考えるのは有効であって，$V \simeq U(\mathfrak{g})/I_L(v)$ である．$I(V)$ は $U(\mathfrak{g})$ の**原始イデアル**と呼ばれる．原始イデアルという言葉を発明したのが誰かはわからないが，有限群の群環の場合にはこの用語をそのまま借用させてもらったのである．しかし有限群の群環の場合とは異なり，今度は $I(V)$ だけでは既約表現の同値類は一意的に**決まらない**．例えば，$\mathfrak{g}$ が半単純リー環のとき，既約最高ウェイト加群 L_w $(w \in W)$ に対して

$$\operatorname{Ann} L_{w_1} = \operatorname{Ann} L_{w_2} \iff w_1 \text{ と } w_2 \text{ が同じセルに属する????}$$

となって，最高ウェイト加群に限ってみても原始イデアルは (ρ, V) の同値類を一意的には決定しない (この部分，記号も含めて詳細は松本久義氏の講義録 [30] をご覧ください)．

さて，展開環には自然にテンソル積の階数から来る次数付けが入るが，関係式 $[X, Y] = XY - YX$ の左辺は一次式，右辺は二次式なので，これは単なるフィルターでしかない．そのフィルター付けを

$$\begin{array}{ccccccccccc} \{0\} & \subset & U_0(\mathfrak{g}) & \subset & U_1(\mathfrak{g}) & \subset & U_2(\mathfrak{g}) & \subset \cdots \subset & U_k(\mathfrak{g}) & \subset & \cdots \\ & & \| & & \| & & & & & & \\ & & \mathbb{C} & & \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g} & & & & & & \end{array}$$

とする．表現の方もついでにフィルター付けしておこう．V は有限生成として，その有限次元の生成空間を V_0 とする．

$$\{0\} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k \subset \cdots; \quad V_k = U_k(\mathfrak{g})V_0$$

このフィルター付けから，次数化した代数は**可換**となり，$\mathfrak{g}$ 上の**対称代数**に標準的に同型であることがわかる．つまり $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$ である．$S(\mathfrak{g})$ は可換代数なのでとても都合がヨ

イ．しかも表現 V を次数化したもの $\mathrm{gr}\,V$ は $S(\mathfrak{g})$ 加群である．そこで $\mathrm{gr}\,V$ のゼロ化イデアル $I(\mathrm{gr}\,V) \subset S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ を

$$I(\mathrm{gr}\,V) = \{A \in S(\mathfrak{g}) \mid \rho(A)(\mathrm{gr}\,V) = 0\} = \mathrm{Ann}\ \mathrm{gr}\,V$$

とおく．$I(\mathrm{gr}\,V)$ は多項式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ のイデアルなので，その共通零点を取ることによって $\mathfrak{g}^*$ の代数多様体を定める．これを V の**随伴多様体**と呼ぼう．記号で

$$\mathcal{AV}(V) = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid f(\lambda) = 0 \quad \forall f \in I(\mathrm{gr}\,V)\}$$

と書く．[52]さて，I を原始イデアルとしよう．$U(\mathfrak{g})/I$ を左からの積によって表現 V と考え (これは必ずしも既約ではないが)，その随伴多様体を定義できる．

Theorem 18.7 $\mathfrak{g}$ を半単純リー環とする．$U(\mathfrak{g})$ の任意の原始イデアル I に対して，ある余随伴ベキ零軌道 $\mathbb{O}$ が存在して，$\mathcal{AV}(U(\mathfrak{g})/I) = \overline{\mathbb{O}}$ が成り立つ．

この定理はとても美しい結果で，代数的な枠組みで表現論が今世紀[53]得た一つの金字塔と言ってもよいと思う．

[**以下の文章は省略か**]

そういうわけで定理の証明はとても筆者の手に負えるものではない．しかしある程度の解説が必要だろう．

一般にリー群 G はそのリー環 $\mathfrak{g}_0$ に**随伴作用**している．係数を複素数に線型に拡張して $\mathfrak{g}$ 上の随伴作用 $\mathrm{Ad}\,g$ $(g \in G)$ が，そしてその双対を取ることによって $\mathfrak{g}^*$ 上の**余随伴作用** Ad^*g が得られる．一方 $\mathfrak{g}$ が半単純のとき，$\mathfrak{g}$ 上には非退化な G 不変双線型形式が存在する．例えば，Killing 形式

$$B(X, Y) = \mathrm{trace}\,(\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y) \quad (\text{ただし}\ \ \mathrm{ad}\,X(Z) = [X, Z])$$

はその一つである．$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ はこの Killing 形式によって G 作用をこめて標準的に同一視される．具体的には

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto \lambda_X = B(X, \cdot) \in \mathfrak{g}^*$$

が G 同型を与える．このとき $\mathrm{ad}\,X$ がベキ零なら，対応する $\lambda_X \in \mathfrak{g}^*$ を**ベキ零**と呼ぶ．したがって $\mathbb{O}$ が余随伴ベキ零軌道とは，ベキ零元 λ_X に対して，

$$\mathbb{O} = \mathrm{Ad}^*(G) \cdot \lambda_X$$

と書けるということである．

I は両側イデアルであるから，$Y \in I$ にたいして明らかに $\mathrm{ad}\,X(Y) = [X, Y] = XY - YX \in I$ である．これから容易に I は $\mathrm{Ad}\,(G)$ 安定であることが結論される．したがって $\mathrm{gr}\,I$ もまた $\mathrm{Ad}\,(G)$ 安定であり，$\mathcal{AV}(U(\mathfrak{g})/I)$ が $\mathrm{Ad}^*(G)$ 軌道の和になることは見易い．

[52]随伴多様体は最初の生成空間 V_0 の取り方によらない．

[53]2000 年にはなったが，まだ 20 世紀らしい．もっとも著者がこの原稿を書いているのは 1999 年のある日のことではあるが．

$U(\mathfrak{g})$ の中心を $Z(\mathfrak{g})$ とすると，$Z(\mathfrak{g})$ は l 変数の多項式環 $\mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_l]$ と同型である (l を $\mathfrak{g}$ の**階数**と呼ぶ)．さて，(ρ, V) を既約表現とすると，$\rho(Z)$ $(Z \in Z(\mathfrak{g}))$ は V 上スカラー作用素となる．したがって$\rho(Z) = \chi(Z)\,\mathrm{id}_V$ $(\chi(Z) \in \mathbb{C})$ と表すと，$Z - \chi(Z) \in I$ である．このことから，$\mathrm{gr}\, I \subset (\mathrm{gr}\, Z(\mathfrak{g}))_+ = S(\mathfrak{g})_+^G$ がわかる．ここで $S(\mathfrak{g})^G$ は $S(\mathfrak{g})$ の G 不変元全体，A_+ は A のうち定数項のない多項式の全体を表す．

Theorem 18.8 (Chevalley, Kostant) $S(\mathfrak{g})_+^G$ の共通零点と $\mathfrak{g}^*$ のベキ零元全体の集合は一致する．つまり

$$\mathcal{N} := \{\lambda_X \mid \mathrm{ad}\, X \text{ は } \mathfrak{g} \text{ 上ベキ零}\} = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid f(\lambda) = 0 \quad \forall f \in S(\mathfrak{g})_+^G\}$$

が成立する．$\mathcal{N}$ は多項式の共通零点だから代数多様体であるが，さらに完全交叉かつ正規である．$\mathcal{N}$ を**ベキ零多様体**と呼ぶ．また $\mathcal{N}$ は有限個の $\mathrm{Ad}^*(G)$ 軌道の和である．

この定理と上で行った考察から，$\mathcal{AV}(U(\mathfrak{g})/I)$ は有限個の $\mathrm{Ad}^*(G)$ ベキ零軌道の和であることがわかる．従って定理 18.7 の最大の難関は、$\mathcal{AV}(U(\mathfrak{g})/I)$ が既約代数多様体であることの証明であり，その解決には長い年月と多数の数学者の貢献が必要であった．最終的にこの定理は Borho-Macpherson, Joseph ???? によって得られた．

References

[1] A. Borel, *Linear algebraic groups.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 126. Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] W. Fulton, *Young tableaux. With applications to representation theory and geometry.* London Mathematical Society Student Texts, 35. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory. A first course.* Graduate Texts in Mathematics, 129. Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] R. Goodman and N. R. Wallach, *Representations and invariants of the classical groups.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 68. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[5] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials (Second Edition).* Clarendon Press, Oxford, 1995.

[6] I. G. Macdonald, *Notes on Schubert Polynomials.* Publications du LCIM **6**, Université du Québecà Montréal, 1991.

[7] L. Smith, *Polynomial invariants of finite groups.* Research Notes in Mathematics, 6. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995.

[8] R. Steinberg, A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field. *Trans. AMS*, **71**(1951), 274 – 282.

[9] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis.* Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1984.

[10] R. Howe, Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity free actions and beyond, in *The Schur Lectures* (*1992*), Israel Mathematical Conference Proceedings **8**, Bar-Ilan Univ., 1995, pp. 1 – 182.

[11] R. Howe and E. C. Tan, *Non-Abelian Harmonic Analysis, Applications of* $SL(2, \mathbb{R})$, Universitext, Springer-Verlag, 1992.

[12] James E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory.* (Second printing, revised.) Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

[13] T. A. Springer, *Linear algebraic groups.* Second edition. Progress in Mathematics, 9. Birkh user Boston, Inc., Boston, MA, 1998. xiv+334 pp

[14] Audrey Terras, *Harmonic analysis on symmetric spaces and applications I*, Springer Verlag, 1985 (Chapter II).

[15] A. Terras, *Fourier analysis on finite groups and applications.* London Mathematical Society Student Texts, 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[16] R. Zierau, Representations in Dolbeault cohomology. In *“Representation theory of Lie groups (Park City, UT, 1998)”*, 91–146, IAS/Park City Math. Ser., 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[17] 岩堀長慶, 合同変換群の話. 現代数学社.

[18] 岩堀長慶, 対称群と一般線型群の表現論 : 既約指標・Young 図形とテンソル空間の分解. 岩波講座基礎数学 3. 線型代数 6. 岩波書店.

[19] 岡本清郷、フーリエ解析の展望、すうがくぶっくす 17、朝倉書店 (第 4 章、第 5 章).

[20] F. クライン (関口次郎訳), 正 20 面体と 5 次方程式. シュプリンガー数学クラシックス, シュプリンガーフェアラーク東京.

[21] 小林俊行／大島利雄、Lie 群と Lie 環 1・2、岩波講座現代数学の基礎、岩波書店 (第 3 章、第 4 章).

[22] 庄司俊明, 20 世紀の予想/ ルスティック・プログラム (有限シュバレー群の表現論). 数学セミナー, **39** No. 3 (2000/3), 52 – 56.

[23] 神保道夫、量子群とヤン・バクスター方程式、シュプリンガー・フェアラーク東京 (§§2 – 4).

[24] J.-P. セール (岩堀長慶, 横沼健雄訳), 有限群の線型表現. 岩波書店, 1974.3.

[25] J. P. セール (彌永健一訳), 数論講義. 岩波書店.

[26] 寺沢寛一、自然科学者のための数学概論、岩波書店 (第 10 章).

[27] 寺田至/ 原田耕一郎, 群論. 岩波講座 現代数学の基礎 14, 岩波書店.

[28] 西山享, 多項式のラプソディー. はじめよう数学 2, 日本評論社.

[29] 一松信, 正多面体を解く. 東海科学選書, 東海大学出版会.

[30] 松本久義, Enveloping algebra 入門. 東京大学数理科学セミナリーノート 11, 東京大学大学院数理科学研究科セミナー刊行会.

[31] 向井茂, モジュライ理論 1. 岩波講座 現代数学の展開 13, 岩波書店.

[32] 山内恭彦／杉浦光夫、連続群論入門、新数学シリーズ 18、培風館 (全章).

Index