3 次方程式の一般解について

皆さんのうち多くの人が 2 次方程式の解の公式を知っていると思います．どんな 2 次方程式も解の公式を使えば平方根 (ルート) で解くことができます．では, 3 次方程式についてはどうでしょう $\cdots$．実は, 解の公式というほど簡単には行きませんが, やはり, どんな 3 次方程式も平方根と立方根 (3 乗根) で解くことができるアルゴリズムがあります.

ここでは 2 次方程式の解の公式を知らない人や忘れてしまった人もいるでしょうから, 復習をかねて初めに, 2 次方程式の解の公式について話します．それから, 3 次方程式について話したいと思います.

2 次方程式の場合

まず, 次のような 2 次方程式について解を求めます.

$$2x^2 - 4x - 1 = 0 \tag{1}$$

この方程式の左辺は

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 1 &= 2(x^2 - 2x) - 1 \\ &= 2\{(x-1)^2 - 1\} - 1 \\ &= 2(x-1)^2 - 3 \end{aligned}$$

と変形することができます．ここで, 上の 1 段目から 2 段目の変形は展開公式

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

の左右を入れ替えて

$$x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$$

となることによります.

こうして, (1) は

$$2(x-1)^2 - 3 = 0 \tag{2}$$

となります．よって

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= \frac{3}{2} \\ x - 1 &= \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \\ &= \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

結局

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}
\end{aligned} \tag{3}
$$

となります.

次に今の例を参考にして一般の 2 次方程式

$$
ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{4}
$$

について考えてみます. (1) と同様に

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c
\end{aligned}
$$

こうして, (4) は

$$
a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c = 0 \tag{5}
$$

となります. よって

$$
\begin{aligned}
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
&= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

結局

$$
\begin{aligned}
x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned} \tag{6}
$$

となります. この (6) の式を 2 次方程式の解の公式と言います.

3 次方程式の場合

やはり最初に, 次のような 3 次方程式

$$2x^3 + 6x^2 - 9 = 0 \tag{7}$$

について考えてみましょう. (1), (4) と類似の変形をします. ただし, 今度は

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

より

$$x^3 + 3ax^2 = (x+a)^3 - 3a^2x - a^3$$

を使います. 従って, (7) の左辺は

$$\begin{aligned}
2x^3 + 6x^2 - 9 &= 2(x^3 + 3x^2) - 9 \\
&= 2\{(x+1)^3 - 3x - 1\} - 9 \\
&= 2(x+1)^3 - 6x - 11
\end{aligned}$$

ここで

$$x + 1 = X \tag{8}$$

と置けば

$$\begin{aligned}
-6x - 11 &= -6x - 6 - 5 \\
&= -6(x+1) - 5
\end{aligned}$$

だから (7) の方程式は

$$2X^3 - 6X - 5 = 0 \tag{9}$$

とすることができます. (9) の解が得られれば (8) によって

$$x = X - 1$$

だから (7) の解も得られます. そこで (9) について考えてみましょう.

ここで手品の種を見せましょう. それは次のような置き換えです.

$$X = A + \frac{\square}{A}$$

こうすると

$$\begin{aligned}
X^3 &= \left(A + \frac{\square}{A}\right)^3 \\
&= A^3 + 3A^2 \cdot \frac{\square}{A} + 3A\left(\frac{\square}{A}\right)^2 + \left(\frac{\square}{A}\right)^3 \\
&= A^3 + 3\square A + 3\square^2 \cdot \frac{1}{A} + \frac{\square^3}{A^3} \\
&= A^3 + \frac{\square^3}{A^3} + 3\square\left(A + \frac{\square}{A}\right) \\
&= A^3 + \frac{\square^3}{A^3} + 3\square X
\end{aligned}$$

よって

$$X^3 - 3\square X = A^3 + \frac{\square^3}{A^3}$$

(9) に用いるには

$$2X^3 - 6X - 5 = 2(X^3 - 3X) - 5$$

より

$$\square = 1$$

とすればよいことがわかります．すると

$$2(X^3 - 3X) = 2\left(A^3 + \frac{1}{A^3}\right)$$

従って (9) は

$$X = A + \frac{1}{A} \tag{10}$$

と置き換えることにより

$$2\left(A^3 + \frac{1}{A^3}\right) - 5 = 0 \tag{11}$$

となります．さらに

$$A^3 = B$$

と置き換えれば (11) は

$$2B + \frac{2}{B} - 1 = 0$$
$$2B^2 + 2 - 5B = 0$$

となります．これは B についての 2 次方程式だから (6) より

$$\begin{aligned} B &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \\ &= 2,\ \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ここで

$$B = A^3$$

より

$$A^3 = 2 \text{ または } A^3 = \frac{1}{2}$$

だから (11) の解は

$$A = \sqrt[3]{2}\text{または } A = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \tag{12}$$

(注) ここで $\sqrt[3]{2}$ は 2 の立方根 (3 乗根), 3 乗すると 2 になる実数です．約 1.26(1.259921 $\cdots$).

(10) より

$$X = A + \frac{1}{A}$$

だから (9) の解は $A = \sqrt[3]{2}$ のときも $A = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のときも

$$X = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \tag{13}$$

結局 (8) より

$$x = X - 1$$

なので (7) の解

$$x = \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 1 \tag{14}$$

を得ます.

次に今の例を参考にして一般の 3 次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{15}$$

について考えてみます. (7) と同様に

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2\right) + cx + d \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{b^2}{3a^2}x - \frac{b^3}{27a^3}\right\} + cx + d \\ &= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 - \frac{b^2}{3a}x - \frac{b^3}{27a^2} + cx + d \\ &= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)x - \frac{b^3}{27a^2} + d \end{aligned}$$

ここで

$$x + \frac{b}{3a} = X \tag{16}$$

と置けば (15) の方程式は

$$aX^3 + pX + q = 0 \tag{17}$$

の形にできます. 正確には

$$\begin{aligned} p &= -\frac{b^2}{3a} + c \\ q &= \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \end{aligned}$$

です.

先ほどと同様に,

$$X = A + \frac{\square}{A}$$

とすると

$$X^3 - 3\square X = A^3 + \frac{\square^3}{A^3}$$

(17) の左辺は

$$a\left(X^3 + \frac{p}{a}X\right) + q$$

だから

$$\frac{p}{a} = -3\square \text{即ち} \square = -\frac{p}{3a}$$

となればよいことがわかります. 従って

$$X = A - \frac{p}{3aA} \tag{18}$$

と置けば,

$$
\begin{aligned}
a\left(X^3+\frac{p}{a}X\right) &= a\left(A^3+\frac{\left(-\dfrac{p}{3a}\right)^3}{A^3}\right) \\
&= a\left(A^3-\frac{p^3}{27a^3A^3}\right)
\end{aligned}
$$

となります．よって (17) は

$$
aA^3-\frac{p^3}{27a^2A^3}+q=0 \tag{19}
$$

となります．さらに

$$
B=A^3
$$

と置き換えれば (19) は

$$
aB-\frac{p^3}{27a^2B}+q=0 \qquad aB^2-\frac{p^3}{27a^2}+qB=0
$$

これは B の 2 次方程式だから (6) より B の解が得られます．その立方根 (3 乗根) を求めて A の解を得ます．そして (18) により X の解を, 最後に (16) により (15) の解 x を得ます.