LETTRE CXLIX.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Recherches sur les nombres premiers. Réponse à la précédente.

Berlin d. 28. October 1752.

Ew. Methode eine jede seriem $\frac{2}{a}-\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-\frac{2}{d}+$ etc. in eine andere, als $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2b}$ etc. zu verwandeln, erinnere ich mich noch sehr wohl, und es können allerdings durch Hülfe derselben solche Verwandelungen gefunden werden, die sich aus der von mir gebrauchten Methode, als welche nur auf eine gewisse Art von Zahlen eingeschränkt ist, nicht herleiten. Hingegen gibt auch meine Methode solche series, welche mit jener keine Gemeinschaft haben. Da meine Methode nur eine gewisse Art von Variation in den signis in sich schliesst, so folgt daher, dass die

Summ aller daraus entspringenden serierum entweder 0 ist, oder a circuli quadratura dependirt. Wenn ich aber im Stande wäre andere variationes signorum anzubringen, so zweifle ich nicht, dass nicht quaelibet quantitas pro summa herausgebracht werden könnte.

Da die numeri primi in Ansehung ihrer gedoppelten Form von $4n+1$ und $4n-1$, so sehr von einander verschieden sind, und die Menge von beyden Gattungen infinita ist, so habe ich die summam folgender seriei proxime untersucht

$$A=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}-\frac{1}{29}+\frac{1}{31}-\frac{1}{37}-\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}\text{ etc.}$$

wo die numeri primi formae $4n-1$ das signum $+$, die formae $4n+1$ aber das signum $-$ haben, in der Hoffnung, ob etwa die summa nicht rational seyn möchte. Ich fand aber diese summam $=0{,}334980$ und also etwas grösser als $\frac{1}{3}$. Wäre accurat $\frac{1}{3}$ herausgekommen, so hätte die Sach allerdings Nachdenken verdient.

Da die Anzahl aller numerorum primorum unendlich ist, aber doch ein infinitum infimi ordinis, weil ich gezeigt, dass wenn die Zahl omnium numerorum $=n$, die Anzahl der numerorum primorum seyn werde $=ln$, es ist aber ln kleiner als $n^{\frac{1}{m}}$, so gross auch immer die Zahl m seyn mag: so wäre die Frage, ob auch die Anzahl der numerorum primorum, so z. Ex. in dieser Formul $aa+1$ enthalten sind, auch unendlich sey, weil dieselbe gewiss unendlich mal kleiner ist, als die Anzahl aller numerorum primorum. Hernach, wenn auch diese unendlich wäre, könnte man eben dieses fragen de numeris primis hujus formae a^4+1 oder a^8+1 etc. Ich habe die numeros primos in hac forma $aa+1$ contentos untersucht und gefunden, dass $aa+1$ ein numerus primus wird in Folgenden Fällen: $a=$

1. 2. 4. 6. 10. 14. 16. 20. 24. 26. 36. 40. 54. 56. 66. 74. 84. 90. 94.
110. 116. 120. 124. 126. 130. 134. 146. 150. 156. 160. 170. 176. 180. 184.
204. 206. 210. 224. 230. 236. 240. 250. 256. 260. 264. 270. 280. 284. 300.
306. 314. 326. 340. 350. 384. 386. 396. 400.
406. 420. 430. 436. 440. 444. 464. 466. 470. 474. 490. 496.
536. 544. 556. 570. 576. 584. 594.
634. 636. 644. 646. 654. 674. 680. 686. 690. 696. 700.
704. 714. 716. 740. 750. 760. 764. 780. 784.
816. 826. 844. 860. 864. 890.
906. 910. 920. 930. 936. 946. 950. 960. 966. 986.
1004. 1010. 1036. 1054. 1060. 1066. 1070. 1094. 1096.
1106. 1124. 1140. 1144. 1146. 1150. 1156. 1174. 1176. 1184.
1210. 1234. 1244. 1246. 1274. 1276. 1290. 1294.
1306. 1314. 1316. 1320. 1324. 1340. 1350. 1354. 1366. 1374. 1376. 1394.
1406. 1410. 1416. 1420. 1430. 1434. 1440. 1456. 1460. 1494.

Bis 1500 habe ich dieses Examen getrieben, und hierdurch bin ich im Stande viel numeros primos anzuzeigen, welche nicht nur grösser sind als 100000, als so weit die tabulae numerorum primorum gehen, sondern auch als 1000000. Sonsten würde es gewiss sehr schwer seyn einen numerum primum > 1000000 anzugeben.

Soll aber a^4+1 ein numerus primus seyn, so werden die valores von a seyn folgende wenige

$$a = 1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 16.\ 20.\ 24.\ 34.$$

Doch bin ich noch weit entfernt des Fermatii problema zu solviren: invenire numerum primum, dato quovis numero majorem. Sollte man eine seriem regularem finden können, deren alle termini in jenen valoribus von a enthalten wären, so wäre das problema solvirt. Jedoch gibt es gewiss keine series algebraica, deren omnes termini numeri primi seyn können. Denn es sey X der terminus indici x respondens, und daher A der terminus indici dato a respondens, so wird, wenn man nimmt $x = nA + a$, der terminus X divisibilis per A und also nicht primus.

Meine integratio aequationis $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^n)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+by^n)}}$ setzet nicht nur zum voraus, dass n ein numerus integer ist, sondern ich kann auch nur die integralia angeben in diesen Fällen: $n=2$, $n=3$, $n=4$ und $n=6$. Wenn $n=5$, so habe ich bisher das integrale nicht finden können. Wenn aber $n=\frac{1}{m+1}$, so wären die formulae allerdings absolute integrabiles, dahero dieselben nichts sonderbares geben würden. Denn dieses kam mir fürnehmlich merkwürdig vor, dass, da die Formuln in den Fällen $n=3$, oder $n=4$, oder $n=6$ auf keinerley Art weder ad circuli noch hyperbolae quadraturam gebracht werden können, doch die Aequation selbst algebraice und das generaliter integrirt werden kann.

Beygelegten Zettel erinnere ich mich noch bey Ew. geschrieben zu haben, um zu zeigen, dass man nicht allezeit per integrationem alle casus findet, quibus aequationi differentiali satisfit, wovon ich in meiner Mechanic einige wichtige casus angemerket hatte. Ich kann den Fall noch simpler machen und diese aequationem differentialem $a\,dx = (a-x)\,dy$ vorlegen, welcher augenscheinlich ein Genügen geschiehet, wenn $x = a$, welcher Fall doch durch die Integration nicht herausgebracht wird. Also wenn ich habe $\frac{P\,dz}{Z} = dy$, oder $P\,dz = Z\,dy$, existente Z functione ipsius z, et P quantitate ex y et z utcunque composita, so satisfacirt $Z = 0$, denn daher wird $z =$ certae constanti und also $dz = 0$. Setzt man nun für z eine formulam magis compositam, als $xx + yy - aa$, so bekommt man aus $Z = 0$ solche casus integrales, welche durch die Integration nimmer herausgebracht werden. Also wenn $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(xx + yy - aa)}} = V\,dy$, existente V functione quacunque ipsarum x et y, so satisfacirt gewiss $xx + yy - aa = 0$.

Den tomum II Nov. Comment. habe ich noch nicht bekommen. Ob $2^{30}(2^{31} - 1)$ wirklich ein numerus perfectus sey, oder nicht, kann ich freylich nicht behaupten, weil ich nicht weiss ob $2^{31} - 1$ ein numerus primus ist, oder nicht. Dass es aber nicht unendlich viel numeros perfectos geben sollte, kann ich nicht einsehen. Weil aber um dieselben zu finden, erforderlich wird, dass man alle casus, quibus formula $2^n - 1$ fit numerus primus, anzeigen könne, so sehe ich nicht ab, wie man mehr als sieben, nehmlich: $2^1(2^2-1)$, $2^2(2^3-1)$, $2^4(2^5-1)$, $2^6(2^7-1)$, $2^{12}(2^{13}-1)$, $2^{16}(2^{17}-1)$, $2^{18}(2^{19}-1)$, und also nicht einmal acht, oder gar zehn angeben kann. So viel ist gewiss, dass wenn $2^n - 1$ ein numerus primus seyn soll, auch n ein numerus primus seyn muss. Allein es gibt viel numeros primos, die für n gesetzt, $2^n - 1$ nicht primum machen, als $n = 11$, $n = 23$, $n = 29$, $n = 37$, etc. Was also Mersennus oder Leunenschloss sagt, als wenn die Anzahl der numerorum perfectorum endlich wäre, halte ich für ungegründet, ungeacht ich nicht glaube, dass mehr als sieben, praeter unitatem mit Gewissheit angezeigt werden können. Des Leunenschloss Tractat erinnere ich mich bey Ew. gesehen zu haben; ich kann aber von diesem auctore in keinem Lexico die geringste Nachricht finden, dahero ich Ew. um einige Umstände seines Tractats und wo möglich seiner selbst gehorsamst ersuchet haben wollte.

Euler.