



Discussion Paper Series

No.249

動学的一般均衡モデルと資産格差

山田知明

March 2008

**Hitotsubashi University Research Unit
for Statistical Analysis in Social Sciences**

A 21st-Century COE Program

Institute of Economic Research
Hitotsubashi University
Kunitachi, Tokyo, 186-8603 Japan
<http://hi-stat.ier.hit-u.ac.jp/>

動学的一般均衡モデルと資産格差*

山田 知明

立正大学経済学部

tyamada@ris.ac.jp

2008年3月28日

概要

異質な経済主体が存在する動学的一般均衡モデルを用いて、所得リスクから資産格差の歪みをどの程度、説明する事が可能なのかについて考察する。Aiyagari (1994) モデルをベンチマークとして、ライフサイクル構造を含む Storesletten et al. (2004) 及び Heathcote et al. (2004) モデルも分析の対象とした。日本の資産格差は、ライフサイクルを考慮したモデルを用いれば、極端な高資産階層を除いて、うまく説明出来る事が明らかになった。

1 導入

動学的一般均衡理論とは、家計や企業の時間を通じたミクロ的な意思決定を積み上げていき、集計結果としてマクロ経済を視る分析アプローチの一つである。動学的一般均衡理論は、モデルから「定量的 (Quantitative)」インプリケーションを得られるため、実証研究との結びつきが強い分野でもある*¹。例えば、動学的一般均衡理論の一例である実物的景気循環理論では、マクロの時系列データとモデルから生成されたシミュレーションデータの整合性から、理論モデルを検証している。一方で、Browning et al. (1999) はミクロデータに基づく実証研究とマクロ経済モデルの整合性についても慎重に検討する必要がある事を強調している。

動学的一般均衡理論が、単なる数値例を超えて政策的議論の道具として説得力を持つためには、インプットとしてのパラメータに実証的な裏付けが必要になってくる。特に、家計や企業行動の異質性 (Heterogeneity) を考慮した場合、集計データだけではなくミクロデータによる実証的基礎付けが不可欠となる。すなわち、動学的一般均衡モデルを応用して分析する研究者は、ミクロ計量経

* 本稿の執筆に際し、阿部修人、齊藤誠、鈴木司馬、宮崎憲治の各氏から非常に有益なコメントをいただいた。ここに感謝の意を記したい。本研究は、一橋大学経済研究所附属社会科学統計情報研究センターで提供している全国消費実態調査 (89年、94年、99年、04年) の秘匿処理済ミクロデータを用いている。また、本研究は科学研究費若手 (B) の資金援助を受けている。もちろん残ったあらゆる誤りは私自身のものである。

*¹ 動学的一般均衡モデルを用いた分析は、消費・貯蓄や財政・金融政策、資産価格、労働経済学、公共経済学といった幅広い範囲で利用されている。加藤 (2006) は、動学的一般均衡モデルを使って、ニューケインジアン立場からマクロ経済学について説明をしている。

済学に基づく実証研究結果の「ユーザー」と位置付けられる。個人の好みや意思決定を規定するパラメータは政策的含意や厚生の帰結に直結するため、注意深く設定する必要がある。よって、マイクロデータの裏付けに基づいてミクロ的行動を設定し、そこからマクロ経済モデルを作り上げる必要が出てくる。

本稿では、異質な経済主体が存在する動学的一般均衡モデルに基づいて、消費・貯蓄の意思決定と経済格差の関係性を分析していく。経済格差は政策決定者にとって重要な指標であると同時に、マクロデータだけでなくミクロ的視点が必要になってくる問題でもある。多くのマクロ経済モデルでは分析の容易さから、家計や企業は代表的な一家計・一企業の意思決定に単純化している。ここでは家計部門について一般化し、労働所得や資産水準が異なる様々な家計が混在する経済を分析対象とする。すなわち、モデルから消費及び資産格差が生成される世界を想定する。このような経済環境を考えると、マクロデータだけではなくマイクロデータと理論モデルが自然に結びついてくる。しかし、容易に想像されるように、このようなモデル設定は、より現実性を増すものの、分析の困難さを伴う。近年ではコンピュータの進化に伴い、数値解析 (Numerical Analysis) を用いて複雑な構造を有するモデルを近似的に解く事が可能になってきている。そこで、本稿では実際にいくつかの代表的なモデルを解きながら、カリブレーションと呼ばれるパラメータの設定と一般均衡モデルの密接な関係を明らかにしていく。

基本となるのは Aiyagari (1994) による、異質な家計が無数に存在し、各家計が固有の所得リスクに直面しているモデルである。このようなモデルは Bewley モデルと呼ばれている (Bewley, 1986)。Bewley モデルは以下の特徴を持っている。(1) 各家計は確率的に決定する労働所得を所与として、消費と貯蓄に関する意思決定を行う。(2) 所得リスクは家計固有のものであり、集計 (マクロ) リスクは存在していない。そのため、もし状態条件付債券市場が完備していれば、すなわち Arrow 証券が取引可能であれば、家計間で保険契約を結ぶことによってリスクは完全にシェアする事が可能になる。しかし、(3) Bewley モデルでは保険市場の不完備性を仮定し、リスクシェアリングは安全資産のみを通じて行われると考える。家計は消費水準が急激に下がることを嫌うため、所得低下に備えて予備的貯蓄をし、実際に所得が低下した場合には貯蓄を切り崩す事によって消費の低下を避けようとする。すなわち、貯蓄は自己保険の役割を果たしている。(4) 事前には家計は同質的であるが、時間の経過と共に異なる所得水準が実現していくため、資産水準も異なっていく。そのため、定常均衡では家計の資産水準は異なっており、所得リスクが内生的に資産格差を生成する。Bewley モデルは、経済格差を分析するための理論的基礎を提供すると同時に、基本は標準的な新古典派モデルに準拠していることから応用・拡張可能性も高い。

まず、2 節で、基本となる Bewley モデルを用いて、所得リスクが資産格差をどれだけ説明できるのかを分析していく。モデルの基礎になるカリブレーション値と資産格差の結びつきを明らかにする。次に、3 節で、Storesletten et al. (2004a) 及び Heathcote et al. (2004) に基づいてライフサイクル構造を含むようにモデルを拡張する。ライフサイクル構造を有する家計の所得、消費及び貯蓄に関しては阿部 (2008) が詳細に分析しているが、阿部 (2008) で観察された事実を動学的一般均衡理論の視点から再考する。また、労働供給に関する意思決定も考慮し、内生的労働供給が資産格差にどのような影響を与えるかを分析する。4 節では、ライフサイクルモデルに基づく家計行動

と資産格差の関係が明らかになる。最後に、5節でまとめる。

2 基本モデル

2.1 固有リスクに直面する家計の意思決定

無限期間の経済を考えよう。 t は時間を表している。家計は無数 (連続体) に存在していて、0 期には同質的で総計を 1 とする。各家計は、無限期間の効用の割引現在価値を最大化するように消費 c_t を決定する。全ての家計は同じ効用関数を持ち、目的関数は、

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

とする。ただし、 β は割引因子で $0 < \beta < 1$ とする。瞬時効用関数は相対的危険回避度一定 (CRRA) 型を仮定し、 γ は相対的危険回避度 (及び異時点間の代替の弾力性の逆数) を表すパラメータである。

t 期における家計は、前期からの資産 a_t と労働所得 y_t を所与として、今期に消費するか次期のために貯蓄しておくかの意思決定を行う。よって、予算制約は

$$c_t + a_{t+1} = (1 + r_t) a_t + y_t$$

となる。ただし、 r_t は利子率である。また、家計は流動性制約に直面しており、 $a_t \geq 0$ とする^{*2}。

Bewley モデルの最大の特徴は、各家計が労働所得 y_t に関する固有リスクに直面している点にある。 t 期において、各家計は $\{e^1, \dots, e^J\}$ という J 種類の労働保有量 (Labor Endowment) のどれかをランダムに受け取る。家計は現在の労働保有量 e_t を非弾力的に供給し、一単位当たり w_t だけの賃金を受け取る。よって、賃金と労働保有量の積 $w_t e_t$ が労働所得である。次期の労働保有量 e_{t+1} は今期の労働保有量 e_t にのみ依存して決定する。現時点で e^i が実現しており、次期に e^j が実現する推移確率を $\pi(e^j | e^i) > 0$ と書くことにしよう。家計が無数に存在していることから、大数法則によって、推移確率は次期に各保有量 e^j が実現した家計の割合も表している。推移確率は一意的な定常分布 π^* を持つと仮定する。この仮定に基づくと、それぞれの家計は労働所得について不確実性に直面しているにもかかわらず、各期のクロスセクションでの労働所得分布は時間を通じて常に一定となり、マクロ経済における不確実性は一切存在しなくなる。各家計にとって労働所得はランダムなため、良い状態が実現し続けた家計は多くの貯蓄を保有するが、悪い状態ばかり続いた家計はほとんど貯蓄が出来ない。そのため、たとえ初期状態として平等な資産分布を仮定しても、時間の経過と共に内生的に資産格差が生じる。また、固有リスクをシェアするための手段は安全資産による貯蓄のみであるため、所得低下による消費水準の低下を防ぐために、家計は予備的動機に基づいて貯蓄を蓄える。

^{*2} Aiyagari (1994) は資産保有の最低水準として、自然な借入制約 (Natural Borrowing Limit) $a_t \geq \phi$ を置いている。自然な借入制約 ϕ とは、最も悪い所得状態が続いたとしても返済できる額として定義される、借入の上限である。最悪の所得状態がゼロであれば、 $\phi = 0$ である。Chatterjee et al. (2007) はより複雑なデフォルトの可能性を許容した動学的一般均衡モデルを分析している。

家計の消費・貯蓄問題を、動的計画法 (Dynamic Programming) を使って再帰的 (Recursive) な環境の下での最適化問題として定義しなそう*³。Bewley モデルにおいて各家計の状態は、現在保有している資産と労働保有量の実現値 (a, e) で記述可能であり、時間 t には依存しない。この組を状態変数 (State Variable) と呼ぶ。このとき家計の最適化問題は次のように書き換えられる。

$$v(a, e) = \max \left\{ \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta \sum_{e'} \pi(e'|e) v(a', e') \right\}, \quad (1)$$

s.t. $c + a' \leq (1+r)a + we, a' \geq 0.$

ただし、 $v(\cdot, \cdot)$ は価値関数 (Value Function) であり、 a', e' は次期の変数を表している*⁴。現在の貯蓄量が a で労働保有量が e の状態にある家計の意思決定 (次期の貯蓄) を $g(a, e)$ と書くことにする。これを政策関数 (Policy Function) と呼ぶ。一階条件をまとめると、家計の効用最大化問題の必要条件として、次のオイラー不等式を導出できる。

$$c^{-\gamma} \geq \beta(1+r) \sum \pi(e'|e) c'^{1-\gamma},$$

家計行動は労働所得がランダムになっている以外はシンプルなものであるが、CRRA 型効用関数を仮定したときに解析的な解は存在しない。そのため、家計の意思決定を知るには数値計算に頼る必要がある。

2.2 資産分布と企業行動

推移確率 所与の利子率 r 及び賃金 w の下で、各家計の意思決定はモデル化できた。次に、家計の意思決定を集計する方法を考えていこう。 $\pi(e_j|e_i) = 0.8$ であったとする。これは現在の労働保有量が e_i である家計のうち 80% の家計が e_j という状態に推移することを意味する。例えば、現在失業している家計の中で 8 割の家計は次期に職を見つけられるような状況である。労働所得及び資産の状態が異なる家計は異なった意思決定を行うため、政策関数と労働保有量の推移確率を使えば、家計の状態を表す分布を計算する事が可能になる。 $\Psi(a, e)$ を家計の状態 (a, e) の割合を表す分布関数とする。

現在の状態が (a, e) である家計が次期に (A, E) という状態に推移する確率を $Q((a, e), (A, E))$ と書く事にしよう*⁵。このとき家計の状態分布は

$$\Psi_{t+1}(A, E) = \int Q((a, e), (A, E)) d\Psi_t \quad (2)$$

という形で推移していく。時間を通じて一定となる定常分布を Ψ^* と書くことにする。

*³ Ljungqvist and Sargent (2004) は“Recursive Method”を次の 2 つの条件で特長付けている。(1) 経済の推移は状態変数の推移によって決定される。(2) 各主体は、状態変数のみに基づいて意思決定を行い、意思決定は政策関数として表現される。

*⁴ 動的計画法の厳密な定義については、Stokey et al. (1989) を参照してほしい。動的計画法になじみのない初学者は先に Adda and Cooper (2003) の 2 章や Ljungqvist and Sargent (2004) の 3-4 章を読むことを強く勧める。

*⁵ 状態の推移確率を正確に定義することは数学的に若干、複雑になる。そのため、家計の推移関数に関心のある読者は Stokey et al. (1989) の第 11 章を参照して欲しい。

企業行動 Aiyagari (1994) は利率 r 及び賃金 w が内生的に決定される一般均衡を考えている。要素価格がどのように決定されるかを明示的にするため、代表的企業を導入しよう。企業は各家計が蓄積した資本の集計量 K を利率 r で借り、労働保有量 e の供給に対して賃金を w だけ支払うことによって生産を行う。総労働供給 N は労働保有量の集計値なので、 $\sum e\pi^*(e)$ となる。ただし、 $\pi^*(e)$ は定常分布での e の実現確率である。企業の生産関数は Cobb-Douglas 型で、

$$Y = K^\theta N^{1-\theta}$$

とする。

2.3 一般均衡の定義

以上より、競争均衡を定義することが出来る。Aiyagari (1994) は、時間を通じて資産分布、利率及び賃金が変わらない定常均衡に注目している^{*6}。定常再帰的競争均衡 (Stationary Recursive Competitive Equilibrium) を次のように定義しよう。

定義 (定常再帰的競争均衡) 定常再帰的競争均衡とは、以下を満たす政策関数 g 、利率 r 、賃金 w 及び定常分布関数 Ψ^* である。

(i) 利率 r 及び賃金 w を所与としたとき、家計は最適な意思決定を行っている。すなわち、ベルマン方程式 (1) を満たし、 $g(\cdot, \cdot)$ はそれに伴う政策関数になる。

(ii) 企業は利潤を最大化している。すなわち、

$$r = \theta K^{\theta-1} N^{1-\theta} - \delta, w = (1 - \theta) K^\theta N^{-\theta}.$$

ただし、 δ は資本減耗率である。

(iii) 財、労働及び資本市場は均衡している。資本及び労働市場の均衡条件は、

$$K = \int g(a, e) d\Psi, N = \sum e\pi^*(e).$$

(iv) 資産分布は時間を通じて不変である。

やや複雑な印象を受けるかもしれないが、価格を所与として家計及び企業は最適な意思決定を行い、資本、労働、財の各市場において需給が一致しているという通常の市場均衡概念と基本的に同じである。ワルラス法則があるため市場均衡の三つの条件の内、二つを満たせばよいが、労働市場の均衡に関しては労働供給が非弾力的であることから自明である。よって、財市場と資本市場の均

^{*6} 定常均衡に注目する理由は、定常状態では資産分布が意思決定に影響しないためである。資産分布が時間を通じて不変であれば、集計量(総資本)も一定となり、利率や賃金も一定となる。そのため、家計の意思決定が容易になる。この仮定は強いと感ずるかもしれないが、資産分布が時間を通じて一定でない場合には、家計が将来の利率を予測する際に資産分布の推移を知っている必要があるため、理論的にも数値計算的にも非常に難しい問題となる。集計ショックが存在して資産分布が定常的にならない経済に関しては、Krusell and Smith (1998) が近似的に計算する方法を分析している。Krusell and Smith (1998) は、集計ショックが存在していても分布情報はそれほど重要ではなく、資産分布そのものでなく 2 次モーメント情報に基づいて意思決定を行っても誤差は少ない事を明らかにした。この結果は、近似集計 (Approximate Aggregation) と呼ばれている。

衡条件のうち、資産市場のみに注目すればよい。資本市場の均衡条件については Aiyagari (1994) を参照してほしい。

2.4 カリブレーション

Bewley モデルの均衡は、(1) 利率及び賃金を所与とした家計の意思決定問題を解き、(2) 各家計の意思決定と所得の推移確率に基づいて資産分布を計算し、(3) 各市場における総需要と総供給が一致する利率及び賃金が見つかるまで (1) と (2) を繰り返す、というステップで計算出来る。前述のとおり、解析的な解は存在しないため、以上のステップを数値計算を用いて「近似的に解く」必要がある^{*7}。コンピュータを使って近似的に解くためには、関数形とパラメーターを特定化する必要がある。問題は、どのような関数型及びパラメーターが経済を記述する際にもっともらしいのか、である。パラメーターを設定していく一連の作業のことをカリブレーションと呼んでいる^{*8}。

効用関数は CRRA 型を仮定しているため、異時点間の代替の弾力性を表すパラメーターである γ を決める必要がある。異時点間の代替の弾力性に関する推計は、マクロデータ及びミクロデータを用いて様々な推計がされているが、決定的な値というものは定まっていない。そこで、以下では $\gamma = 2$ を基準として様々なケースを試すことにしよう。日本における動学的一般均衡モデルを用いた代表的研究である Hayashi and Prescott (2002) によると、2000 年における資本からのリターンは 4% 程度である。そこで、均衡における年間利率が 4% 程度になるように、割引因子 β は 0.96 とした。一方、生産関数は Cobb-Douglas 型なので資本分配率 θ と資本減耗率 δ を決定すればよい。資本減耗率 δ は、Hayashi and Prescott (2002) に従って、90 年代の平均値である 0.083 とした。資本分配率 θ は、モデルにおける資本産出比率 K/Y が 2000 年における日本経済の値である 2.4 に近づくように、0.3 と設定した。

失業リスクモデル 最後に Bewley モデルの一番のポイントである労働保有量に関するカリブレーションを考えよう。労働保有量は家計が直面する所得リスクを決定する。一般に家計は、雇用か失業かの二者択一のリスク(失業リスク)と、所得変動のような連続的に変化するリスク(所得リスク)という異なるタイプのリスクに直面している。両方のリスクを同時に考えるとモデルが複雑になるので、以下では両者を別々に考え、どちらがどれだけ資産格差の説明に寄与するかを考えていきたい。

まず状態が 2 種類ケースを考えてみよう。この場合、労働保有量は雇用(状態 1)と失業(状態 0)に対応していると考えられ、必要な情報は定常状態での失業率、失業の平均持続期間及び失業時の

*7 数値計算の詳細は、補論を参照せよ。

*8 阿部 (2008) がカリブレーションのおおまかな流れを書いているものの、カリブレーションという言葉の定義は曖昧である。先行研究で既に得られている実証結果をそのまま採用する場合もあれば、Castañeda et al. (2003) や Chatterjee et al. (2007) のようにモデルのモーメントとデータのモーメントが一致するようにパラメーターを設定する場合もある。後者のアプローチは、モデルを解く際に必要になるものの観察が不可能なパラメーターの値を決める際に、特に有効な方法である。また、Heathcote et al. (2004) のようにミクロデータを用いて自ら推計をしている論文も数多く存在している。カリブレーションとは何かについては、Hansen and Heckman (1996) が推計との関係から考察している。

所得水準である。推移確率行列は 2×2 になるので、平均失業持続期間と失業率さえ解れば簡単にカリブレートすることができる。モデルにおける 1 期間が四半期で $(1 - \pi_{00})$ が 0.5 であれば、平均的には失業期間が半年間継続することになる。そこで、平均失業期間から $(1 - \pi_{00})^{-1}$ を計算する。更に、失業率を使って、 $(1 - \text{失業率}) \times \pi_{10} + \text{失業率} \times \pi_{00} = \text{失業率}$ となるように π_{10} を決定すれば失業の推移確率が導出できる。

一見、簡単そうではあるが、失業者の平均失業期間や失業時の所得水準といった情報を正確に知るためには、本来、ミクロデータから推定する必要がある。しかし、失業者を追跡調査したデータは貴重であり、正確な水準を設定するのは困難である。以下、失業時は所得が雇用時の 5% 水準にまで低下すると仮定する ($e \in \{1, 0.05\}$)。小原 (2000) は、失業者を追跡調査した日本のミクロデータを利用して失職期間と失業保険の関係を分析している。小原 (2000) に基づいて、平均失業期間は半年とした。マクロ経済における失業率は 5% とする ($\pi^* = \{0.95, 0.05\}$)。

所得リスクモデル 次に、所得が連続的に変動する状況を考えよう。Tauchen (1986) は、AR(1) 式を有限マルコフ環で近似する方法を提案している。そこで、労働保有量の対数値が以下のような AR(1) の確率過程に従うとしよう。

$$\ln e_t = \rho \ln e_{t-1} + \eta_t, \quad (3)$$

η_t は平均 0、分散 σ_η^2 に従うショック項、 ρ は持続性を表すパラメータで、モデルにおける 1 期間は 1 年である。Storesletten et al. (2004b) は Panel Study of Income Dynamics (PSID) を用いて (3) 式を推計している。アメリカ経済の場合、所得ショックの持続性は強く、持続性パラメータ ρ は 0.952 と推計された。また、所得ショック項は景気の状態の逆相関しており、好景気時に $\sigma_\eta = 0.125$ 、不況時に $\sigma_\eta = 0.211$ であった。詳しくは 4 節で分析するが、日本経済をカリブレートする場合にはこの値はやや大きすぎであり、 σ_η は 0.06 ~ 0.08 程度と設定すると日本における所得格差をうまく説明できる。次小節では、 $\sigma_\eta \in \{0.05, 0.1\}$ で持続性パラメータについては様々なケースを検討している。

2.5 どこまで資産格差を説明できるか?

日米の資産格差: ターゲット 数値計算結果の詳細を見る前に、ターゲットとなる日本及びアメリカの資産格差がどの程度、歪んでいるのかを確認しておこう。近年の資産格差を確認するために、日本における資産格差は、一橋大学経済研究所が提供している全国消費実態調査 (89、94、99、04 年) の秘匿処理を行った 8 割サンプルを用いて、ジニ係数及び資産格差の指標を計算した (表 1)*⁹。8 割サンプルであることから、極端な高資産家計がサンプルから落ち、資産格差を小さく見

*⁹ 表 12.1 における資産の定義は、金融資産 (貯蓄現在高-負債現在高)+ 実物資産 (住宅・宅地資産額 + 耐久消費財資産額) とした。総サンプル数はそれぞれ、44,778(89)、44,803(94)、44,539(99)、44,006(04) である。ただし、単身世帯、世帯主が 10 歳代の 2 人以上世帯、農林漁業従事者及び法人経営者は除いており、利用可能サンプル数は約 40,000 程度である。高山・有田 (1994) は、全国消費実態調査を用いて、80 年代における資産格差を詳細に分析している。我々が用いたのは 8 割サンプルであり、資産の定義も若干異なるため、値は高山・有田 (1994) 推計と必ずしも一致しない。

せかけている可能性は否定できない。また、高山・有田 (1994) が指摘しているように、全国消費実態調査では高資産層を完全に捉えきれていない可能性もある。

Budría et al. (2002) は、1998 年の Survey of Consumer Finance(SCF) を用いて、アメリカにおける資産格差を計算している。SCF は高資産階層のサンプリングを多くする事によって、通常ではなかなか把握しにくい資産水準が非常に高い家計も調査に含めている。そのため、SCF は資産格差の研究に向いていると考えられている。実際、SCF に基づくとアメリカにおける資産格差は非常に歪んでおり、資産ジニ係数は 0.8 で、資産上位 1% がアメリカの富の 30% 以上を保有している一方で、資産第 3 分位までの総資産保有が 10% にも満たない。我々の推計によると、日本における資産格差はアメリカと比べると低めである。しかし、それでも資産上位 1% が富の 11 ~ 17% を保有しており、資産第 5 分位が約 60% を保有している。1989 年と比較して 2004 年の資産ジニ係数はわずかに低下しており、バブル期に資産格差が拡大していた様子がうかがえる。また、近年、資産第 5 分位及び上位 1% の集中度が低下して、資産第 3・4 分位が拡大傾向にある。この結果が直ちに、日本の資産格差が平等化に向かっていると結論付けられるわけではない。本稿の目的とは離れるため、日本の資産格差の詳細について、これ以上の深入りはしないことにする。

[表 1 挿入：日米の資産格差]

失業リスクモデル まず、失業リスクのみでどの程度の資産格差を説明可能かをみてみよう。表 2 は、失業リスクモデルにおける数値計算結果をまとめたものである。失業モデルにおける資産ジニ係数は、相対的危険回避度 γ に応じて、0.14 ~ 0.23 程度となる。日本の資産ジニ係数は 0.5 ~ 0.6 程度であるため、失業リスクだけでは歪んだ資産格差の説明は難しい。無限期間生存する家計にとって、半年程度の失業リスクでは極端な貯蓄を保有する動機としては弱いといえる。また、相対的危険回避度が高い方が貯蓄水準が高く利率が低下し、資産ジニ係数も低下している。家計の相対的危険回避度が高い場合、所得低下をより嫌う家計が資産を多めに保有しようとするため低資産家計でも資産保有量が高めになる一方で、利率が低いことから高資産層の貯蓄意欲が削がれ、資産格差が低下することになる。

[表 2 挿入：失業リスクモデル]

表 2 の下部分は各モデルにおける各分位の資産保有量及び上位 10%、5%、1% グループが総資本のどの程度を占めているかをまとめたものである。失業モデルでは資産分布の歪みを完全に説明することは困難であり、特に上位グループに集中した資産格差の歪みをモデル化出来ていない。最後に、資本分配率の変化が資産格差にどのような含意を持つかをみてみよう。近年、労働分配率の低下が議論されているが、 $\theta = 0.4$ となった場合、わずかに資産格差が広がるが、少なくとも資産格差への影響は限定的である。

Bewley モデルでは、均衡利率は主観割引率よりも厳密に低くなることが知られている。これは前述のとおり、家計がいざという時のために備えた予備的貯蓄をしており、リスクがない場合よりも資本蓄積が多くなるためである。不確実性がない経済と比べて総資本がどれ位、増加してい

るかを測ったのが予備的貯蓄である。相対的危険回避度 γ に応じて 1% 未満から 4.5% 程度と、パラメータに応じて予備的貯蓄の水準は変わる。多くの先行研究において、予備的貯蓄の計測にはリスクの代理変数を使った推計が行われているが、一般均衡モデルに基づけば、家計が直面する様々なリスクと貯蓄行動の関係を推測出来る。

所得リスクモデル 次に所得リスクモデルをみてみよう。ショックの大きさと持続性をそれぞれ変更した際の各種変数を計算したのが表 3 である。ショックの持続性 ρ は、アメリカにおける推計値である 0.95 近辺に加え、Aiyagari (1994) で採用された 0.6 でも計算した。計算した各種ケースで、所得リスクモデルにおける資産ジニ係数は高めである。ショックの持続性が十分に高い場合には、日本やアメリカにおける資産ジニ係数を説明でき、資産第 5 分位の集中度も説明できている。ただし、Bewley モデルは無限期間生存する家計を想定している事から、ショックの持続性が高いということは、暗黙に所得ショックの影響が子供にも引き継がれている点に注意する必要がある。また、資産上位 1% のような超高資産層の富の集中度を説明する事までは出来ていない。Castañeda et al. (2003) は、アメリカ並みの富の集中度を説明するためには、極端に歪んだ所得リスクを想定する必要があることを明らかにしている。

[表 3 挿入：所得リスクモデル]

本稿では、いくつかの代表的なパラメータで均衡を計算しているだけである。場合によっては、モデルから生成されたマクロ経済変数 (例えば、 K/Y) が実際の値と一致しないケースがある。このとき、カリブレーション・パラメータの見直しが必要になるかもしれないし、逆にモデルの情報を利用して推計することも可能になる。例えば、ターゲットとなるマクロ・ミクロ変数を設定し、それに見合うようなディープパラメータを探すことも考えられる。

時間選好率の異質性 Krusell and Smith (1998) は、家計間で割引因子 β が異なり確率的に変わる場合に、失業リスクのみでもアメリカ並みの資産格差が生じることを明らかにした (表 2)。割引因子が確率的に変わるモデルは、暗黙に、異なる時間選好率を持つ新しい世代への交代を考慮していると解釈出来る。割引因子の違いは本来、推定すべきパラメータであるが、ここでは Krusell and Smith (1998) の設定をそのまま利用しよう。四半期の割引因子が $\beta \in \{0.9858, 0.9894, 0.9930\}$ という 3 種類の家計が混在しており、一定確率で入れ替わると仮定する。このとき、 $\gamma = 1$ であれば資産ジニ係数は 0.6481 まで上昇し、失業リスクだけでも日本の値に近づく。

時間選好率の異質性は、家計のライフサイクル行動をラフに近似しているに過ぎない。また、ショックの持続性にライフサイクル側面が考慮されていない。そこで、次節ではより明示的に家計のライフサイクル構造を見ていく。

3 世代重複モデルへの拡張

Huggett (1996) は、Aiyagari (1994) モデルにライフサイクル構造を含めて、家計が多期間生存する世代重複モデルに拡張した^{*10}。同様のモデルは、Storesletten et al. (2004a) 及び Heathcote et al. (2004) でも用いられ、経済格差を分析するためのベンチマークモデルになっている。

3.1 人口動態

まず、経済の人口構造を定義しよう。同一コーホート内に無数の家計が存在する多期間の世代重複モデルを考える。 $j = 1$ 歳で経済に参加した家計は最大で J 歳まで生存することが出来るが、死亡リスクに直面しているとする。 $j \in (1, \dots, J)$ 歳人口を μ_j としたとき、次期には一部の家計 $(1 - s_{j+1})$ が死亡して経済から退出し、 μ_{j+1} が $j + 1$ 歳人口となる。人口成長率を n としよう。このとき、人口推移式は

$$\mu_{j+1} = \frac{s_{j+1}}{1+n} \mu_j$$

となる^{*11}。総人口 $\sum_{j=1}^J \mu_j$ を 1 に基準化する。

3.2 家計行動

Storesletten et al. (2004) は労働供給は非弾力的であると仮定し、Heathcote et al. (2004) は弾力的な労働供給を考えている。そこで、非弾力的な労働供給モデルを STY モデルと呼び、弾力的な労働供給モデルを HSV モデルと呼ぶことにし、ライフサイクル構造に加えて、労働供給に関する意思決定が資産格差にどのような含意を持つかを明らかにしたい。

STY モデル STY モデルでは労働・余暇選択はないため、家計の目的関数は

$$U = E \left\{ \sum_{j=1}^J \beta^{j-1} S_j u(c_j) \right\}, \quad S_j = \prod_{i=1}^j s_i, \quad s_1 = 1,$$

となる。ただし、 $\beta > 0$ は割引因子、 S_j は j 歳までの累積生存確率である。

家計は $1 \leq j \leq j_r$ 歳では勤労期となり、非弾力的に労働供給を行う。 $j_r + 1$ 歳以降は引退期で労働供給は一切、出来ない¹と仮定する。前節と同様、各家計は労働生産性に関する固有リスクに直面しており、 j 歳において実現した固有の生産性を $e_j \in E$ と書く。一方、年齢とともに平均労働所得は変化していくことから、年齢毎の平均生産性を $\{\kappa_j^{\text{STY}}\}_{j=1}^{j_r}$ と書く事に²する。よって、マク

^{*10} 家計が多期間生存する世代重複モデルは、Auerbach and Kotlikoff (1987) 等によって、社会保障の分野で応用研究が多く存在している。彼らの研究と本稿のモデルの大きな違いは、所得リスクの存在から、世代間だけではなく世代内格差が内生的に生成される点にある。

^{*11} 本稿のモデルは定常均衡のみを分析対象にしているため、少子高齢化が進展する移行経路にある経済を分析する場合には、モデルを拡張する必要がある。例えば、Braun et al. (2005) を参照してほしい。

口経済における賃金水準を w としたとき、勤労期に家計が得られる労働所得は $y_j = w\kappa_j^{\text{STY}} e_j$ となる。固有リスクは平均が 1 であるため、平均的な労働所得は実際の賃金プロファイルを描くが、各家計が実際に得られる労働所得はその平均プロファイル周辺で変動している。

HSV モデル HSV モデルでは、各家計は j_r 歳までは弾力的に労働供給を行う事が可能である。よって、家計の目的関数は次のようになる。

$$U = E \left\{ \sum_{j=1}^J \beta^{j-1} S_j u(c_j, \bar{h} - h_j) \right\},$$

ただし、 \bar{h} は労働保有量であり、 $h_j \in [0, \bar{h}]$ は j 歳における労働供給量である。

労働供給が内生的な場合でも労働所得は STY モデルと同様に定義できるが、HSV モデルの場合には時間給が変動していると想定する。年齢毎の時間当たり平均生産性を $\{\kappa_j^{\text{HSV}}\}_{j=1}^{j_r}$ と書く事にする。このとき、 h_j 時間の労働供給を行ったとき、家計が得られる労働所得は $y_j = w\kappa_j^{\text{HSV}} e_j h_j$ となる。

予算制約 予算制約は両モデルで共通している。ライフサイクルモデルでは、社会保障制度をどうモデル化するかが格差問題を分析する上で重要なポイントになる。政府は労働所得の一部から社会保険料を徴収し、引退世帯に分配している。社会保険料率は定率で τ^{ss} とし、引退後は定額で bwL だけの給付が受けられるとする。 b は所得代替率で、引退世帯は現役世帯の平均所得 wL の一定割合を受け取る事が出来る。

各家計は死亡リスクに直面している事から、意図せざる遺産が生じる可能性がある。死亡確率 s_j の存在は、固有の所得リスクに加えて、生存期間に関するリスクにも直面していることを意味する。Hansen and İmrohorođlu (2006) は人生の長さに関するリスクの存在が、ライフサイクルにおける消費プロファイルの形状を説明する上で重要な役割を果たしていることを明らかにした。そのため、死亡確率と意図せざる遺産の扱いはライフサイクルモデルを考える上で非常に重要になってくる。本稿では単純化のために、意図せざる遺産は政府が 100% 課税をおこなって、全ての家計に同額の再分配を行うと仮定する。 ξ を意図せざる遺産からの再分配とする^{*12}。

よって、勤労期及び引退期における予算制約は

$$\begin{aligned} c_j + a_{j+1} &= (1+r)a_j + (1-\tau^{ss})y_j + \xi & : \text{勤労期} \\ c_j + a_{j+1} &= (1+r)a_j + bwL + \xi & : \text{引退期} \end{aligned}$$

となる。貯蓄 a_j には流動性制約 $a_j \geq 0$ を課しておく。

^{*12} Hansen and İmrohorođlu (2006) は、私的年金市場の欠落が平均消費プロファイルに与える影響を分析している。私的年金市場が存在し、自身の死亡に条件付けた保険契約が結べる場合、生存期間に関するリスクは存在しなくなる。その場合、死亡した家計の貯蓄が保険会社を通じて生存している家計に分配されるため、貯蓄からの収益が $(1+r)/s_j$ となり、 ξ はゼロになる。私的年金市場が存在するケースでも数値計算を行ったが、4 節の結論を大きく変えるような結果は得られなかった。

3.3 企業行動と意図せざる遺産

生産関数は、前節と同じで Cobb-Douglas 型とする。固有リスクが存在しているため、同一世代内家計の間でもショックの実現に応じて労働所得及び貯蓄水準が異なる。 j 歳で a 単位の貯蓄を持ち、 e という生産性が実現した家計の割合を分布関数 $\Phi(a, e, j)$ と書くことにしよう。このとき総資本 K 及び総労働供給 L は、世代内の貯蓄（労働供給）を集計し、それを全世界で合計した値で決まる^{*13}。

$$K = \sum_{j=1}^J \mu_j \int a_j d\Phi(a, e, j), \quad L = \sum_{j=1}^{j_r} \mu_j \int \kappa_j^{\text{STY}} e_j d\Phi(a, e, j).$$

意図せざる遺産は、100% 課税されて生存している家計に均一に分配するため、

$$\xi = \sum_{j=1}^J \int (1 - s_j)(1 + r)a_j d\Phi(a, e, j)$$

が成立している。

3.4 政府の予算制約

我々の経済における政府の役割は賦課方式で運営された社会保障制度だけであり、それ以外の政府支出は考えないものとする。政府は勤労家計から τ^{ss} で社会保障拠出を集計し、それらを一家計あたり bL だけ引退家計に分配する。よって、政府が満たすべき予算制約は

$$\sum_{j=1}^{j_r} \mu_j \int \tau^{ss} w \kappa_j^{\text{STY}} e_j d\Phi(a, e, j) = w \tau^{ss} L = \sum_{j=j_r+1}^J \mu_j w b L,$$

となる。現役世代の平均所得は wL であり、所得代替率 b は現役世代の平均所得に比例する形で決定するため、 wbL が外生的な所得代替率のもとでの年金給付額である。

世代重複モデルに拡張されているが競争均衡の定義は基本的に同じであるため、省略する。

4 ライフサイクル構造と資産格差

4.1 カリブレーション

ライフサイクル構造を含めた Huggett モデルは、Aiyagari モデルと比較して自由度の高いパラメータ設定が可能であり、カリブレーションの重要性が高まる。家計は、20 歳 ($j = 1$) から経済活動を開始し、65 歳 ($j_r = 46$) で引退、最大で 100 歳 ($J = 81$) まで生存できる。まず人口動態に関する設定を考えよう。生存確率 $\{s_j\}$ は、国立社会保障・人口問題研究が推計した 2007 年の生命表から計算し、ここから 20 ~ 100 歳人口に対する引退世代の人口 (66 ~ 100) の比率が実際の 2007

^{*13} 労働供給が内生的になるが、HSV モデルでも同様に定義できる。

年の値である 24.6% に近づくように人口成長率 n を設定する。また、所得代替率については現役世代の半分である $b = 0.5$ を基準ケースとした。このカリブレーションの結果、内生的に決定した社会保険料率 τ^{ss} はおよそ 12.3% となり、実際の値と近くなる。生産構造に関するパラメータは、前節同様に $\theta = 0.3$ と $\delta = 0.083$ とした。このとき、HSV モデルにおけるマクロ経済変数が Hayashi and Prescott (2002) で推計された実際の値と近くなる。

次に選好パラメータを設定しよう。STY モデルの効用関数は Bewley モデルと同じであるため、 $\gamma = 2$ とする。一方、労働・余暇選択を考えた場合は、効用関数の形状に応じて家計の意思決定行動は異なってくる。マクロ経済モデルでは、消費と余暇が分離不可能な Cobb=Douglas 型

$$u(c, \bar{h} - h) = \frac{[c^\sigma (\bar{h} - h)^{1-\sigma}]^{1-\gamma_0}}{1-\gamma_0},$$

を仮定することが多い。この型は経済成長と整合的になるため、マクロ経済モデルでよく用いられている^{*14}。Cobb=Douglas 型では、消費の異時点間の代替の弾力性が $1/\gamma_0$ となり、 σ は総時間 \bar{h} からどの程度を労働供給に振り分けるかを決定するパラメータである。また、相対的危険回避度は $1 - \sigma + \sigma\gamma_0$ で定義される。 γ_0 については、STY モデルに揃えて 2 とする。黒田・山本 (2006,2007) で議論されている異時点間の労働供給の弾力性である Frisch 弾性値は、 $\lambda(\bar{h} - h)/h$ 、 $\lambda = (1 - \sigma + \sigma\gamma_0)/\gamma_0$ で定義される。各家計の労働時間 h はモデルから内生的に決まり、資産保有量や年齢に応じて変わってくるため、Cobb=Douglas 型効用関数では Frisch 弾性値を外生的に一意に与えることは出来ない。Cobb=Douglas 型効用関数モデルを「HSV I ケース」と呼ぶことにしよう。割引因子 β は、HSV I モデルにおける資本産出比率が 2.4 で利率がおよそ 4% になるように、0.971 とした。また、モデルにおける総労働時間が 2000 ~ 2200 時間になるように $\sigma = 0.38$ とし、 \bar{h} は年間で 5760 時間 (週休 2 日) とした。

一方、労働供給の賃金弾力性を固定パラメータとして定めたい場合には、消費と余暇が分離可能で、

$$u(c, \bar{h} - h) = \frac{c^{1-\gamma_1}}{1-\gamma_1} + \varphi \frac{(\bar{h} - h)^{1-\zeta}}{1-\zeta},$$

とすればよい。 γ_1 は上と同様に 2 とする。分離可能ケースでは、消費の異時点間の代替の弾力性は上と同様に $1/\gamma_1$ で定義されるが、Frisch 弾性値パラメータを $1/\zeta$ と一つのパラメータで設定でき、消費と余暇の異時点間の代替の弾力性を別々に定義できる。そのため、黒田・山本 (2006,2007) で議論された Frisch 弾性値に関して動学的一般均衡モデルから分析が可能になる。マイクロデータに基づいた実証研究では、Cobb=Douglas 型より分離可能モデルの方が説明力が高いと考えられている。ただし、消費と余暇が分離可能なケースは、総消費がトレンドを持つ一方で労働時間が時間を通じてほぼ一定というマクロ経済で観察される事実を説明できない事が知られている。以下では、 $\zeta = 2$ とし、平均労働時間が実際の日本経済と近づくように φ を調整した^{*15}。こちらを

^{*14} 例えば、Braun et al. (2005) や Nishiyama and Smetters (2005) を参照せよ。

^{*15} 黒田・山本 (2006) はマイクロデータに基づいてフリッシュ弾性値を推計しており、「就業の選択」と「労働時間の選択」を 2 つを同時に考えた場合 (マンアワー単位) では、フリッシュ弾性値は 0.7 ~ 1.0 程度としている。男女別や就業と労働時間を区別した場合にはもっと低く推計される。

「HSV II ケース」と呼ぶことにする。

最後に、家計固有の所得リスクについて議論しよう。Storesletten et al. (2004b) は所得リスクを、(a) 固定効果 α^i 、(b) 持続的ショック z_j^i 、(c) 一時的ショック ε_j^i の3つに分けて以下のように特定化している。

$$\begin{aligned} e_j^i &= \alpha^i + z_j^i + \varepsilon_j^i, \quad \alpha \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\alpha^2), \quad \varepsilon_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2) \\ z_j^i &= \rho z_{j-1}^i + \eta_j^i, \quad \eta_j \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\eta,j}^2) \end{aligned} \quad (4)$$

前節では持続的ショックのみを考えていたが、家計が経済に参加する際に一度だけ実現する固定効果 α^i と、持続性が一切ない一時的ショック ε_j を加える事によって、より一般的な所得リスクを考えることが出来る^{*16*17}。Abe and Yamada (2006) は全国消費実態調査に基づいて所得過程の推定を行っており、彼らの結果によると所得分散は年齢と共に拡大していくことから $\rho > 1$ の可能性が示唆されているが、ここでは数値計算が可能なように $\rho = 0.98$ とした。

HSV モデルでは所得リスクは時給単位になるが、フルタイム労働者の時給単位の情報は通常、得られない^{*18}。そこで以下では、Abe and Yamada (2005) において推計された日本のライフサイクルにおける所得格差を複製するような形で所得リスクパラメーターを設定し、 $\sigma_\alpha = 0.1$ 、 $\sigma_\varepsilon = 0.07$ 、 $\sigma_{\eta,1}^2 = 0.0597$ とし、 $\sigma_{\eta,j}^2$ は年齢と共に増加していくと仮定した^{*19}。STY モデルについても、比較可能性のために同じ標準偏差を使った。このカリブレーション値に基づいた両モデルの所得格差の当てはまり具合については、次節で議論する。

4.2 世代内及び世代間資産格差

STY モデル ライフサイクルモデルが生成した全世代を含んだ資産格差について分析をしよう。表 4 は、STY モデル及び HSV モデルにおけるマクロ変数及び経済格差の指標をまとめたものである。まず、労働供給の意思決定が含まれていない STY モデルを見てみよう。ベンチマークケースにおける資産ジニ係数は 0.6762 であり、実際の日本経済より若干、高めになる。資産上位階層についても近い値を取っているが、資産上位 1% の集中度は説明できない。所得格差に関しては日本経済とマッチするようにパラメーターを設定しているため、所得リスクのみに基づいて資産格差の歪みを完全に作り出すことは困難である事が解かる。資産下位層については、比較的日本経

*16 所得過程の推計に関しては、阿部 (2008) を参照してほしい。Heathcote et al. (2004) は、PSID を用いて、アメリカにおける各ショックの時系列的推移を推計している。

*17 Auerbach and Kotlikoff 型の世代重複モデルを用いた研究で、家計の異質性を作り出すために所得プロファイルを複数タイプに拡張している研究が存在しているが、Storesletten et al. (2004b) の特定化に基づく、固定効果の影響のみを分析していると考えることが出来る。当然、固定効果だけで世代内の異質性をすべて汲みとることは出来ず、Storesletten et al. (2004b) はより幅広い家計の異質性を考慮している。

*18 時間当たりの年齢毎の平均所得 $\{\kappa^{HSV}\}$ の推計に関しては、Braun et al. (2005) の補論を参照してほしい。本章の数値計算では、彼らの推計方法に基づいて、厚生労働省の「賃金構造基本統計調査 (平成 11-18 年)」から年齢階層毎の時間給を計算した。また、 $\{\kappa^{STY}\}$ については、HSV モデルとの比較可能性を考慮して、HSV モデルを解いて得られた平均所得プロファイルを利用した。

*19 数値計算では、持続的ショック (4) 式を、Tauchen 法を用いて 15 個の状態のマルコフ環で近似した。固定効果及び一時的ショックはそれぞれ 2 個の状態で近似し、50% の確率で $\{e^{-\sigma}, e^{\sigma}\}$ のどちらかの値を取るとした。

済と近い数値となった。モデルにおける若年世代の多くが資産をほとんど保有していないことが、資産第1分位及び第2分位の小ささにつながっている。

[表4挿入：ライフサイクルモデル]

家計が受け取れる公的年金の水準を変更した結果が表4の $b = 25\%$ と $b = 0.1\%$ である。受け取れる公的年金給付が半分、あるいはほとんど存在しないケースに対応している。公的年金給付水準が低下すると、引退期に備えたライフサイクル動機に基づく貯蓄が高まる。資本供給が増加することから利子率は低下し、高資産層が得られる資本所得は低下する。そのため、資産の集中度は低下し、中位層が厚くなる。Storesletten et al. (2004a) は、アメリカにおけるライフサイクルの消費格差を説明するためには、所得リスクだけでなく、公的年金制度による再分配効果を考慮する必要がある事を明らかにしている。一般に、公的年金制度は生涯労働所得に対して強い再分配効果を持つ。また、公的年金制度が存在していればライフサイクル動機に基づく貯蓄が少なくてすむため、資産格差に伴う資本所得の格差も小さくなる。そのため、公的年金制度が充実している経済では、ライフサイクルにおける消費格差が全般的に低くなる。

HSV モデル 次に、労働供給が内生的な場合に所得リスクと資産格差がどのような関係になるかをみてみよう。STY モデルでは、所得が一時的に低下した場合、予備的貯蓄を切り崩す事によって消費を平滑化しようとする。しかし、HSV モデルでは所得水準の低下は労働供給の変化にも表れてくる。一時的な所得の低下は、余暇の価値を高めるため労働供給を減少させる可能性を持つ一方で、パラメータ次第では、所得低下をカバーするためにより働く事を選択する可能性も存在している。また、所得リスクの存在は、生産性が高い労働者がより多く労働供給を行う効果も持っている。そのため、固有リスクが存在する経済における労働供給に関する意思決定は代表的個人モデルと異なり、賃金格差の厚生の帰結も異なってくる (Heathcote et al., 2007)。実際、表4にあるように、総労働供給の変化率と労働時間変化率は一致していない事から、所得リスクは労働時間の選択を通じてマクロの労働生産性にも影響を与えている。

表4の右側は、HSV モデルにおける各種公的年金給付水準に対応した統計量をまとめたものである。STY モデルと比較して労働供給の自由があることから、貯蓄水準を変更するだけでなく、労働供給を弾力的に変更する可能性を持っている。そのため、所得リスクの一部は労働供給の調整で吸収されており、ベンチマークケースにおける資産ジニ係数は0.6570で、STY モデルと比較してやや低くなっている。しかし、HSV I モデルでは所得代替率を下げてもSTY モデルほど資産ジニ係数は低下しない。STY モデルでは公的年金の低下は資産保有の拡大に直結していたが、HSV I モデルでは老後資金のための資産保有に加えて、労働供給も増加する。そのため、資産格差への含意が異なってくる。HSV II モデルでは、公的年金給付水準を下げても資産ジニ係数は低下するどころか、わずかながら上昇している。黒田・山本 (2006,2007) が指摘しているように、Frisch 弾性値を正確に推計する事は非常に重要であり、推計値次第で社会保障制度の分配的側面への影響が根本的に変わってくる事を、表4は示唆している。

図1は、各モデル及び日本におけるローレンツ曲線をプロットしたものである。Bewley モデル

は失業リスクモデルを採用し、図中の「全国消費」は2004年の全国消費実態調査から推計した値である。日本のローレンツ曲線と比較して、STYモデルの方が資産格差が大きくなっている。これは所得リスクに対して貯蓄水準の変更のみでしかリスクに対応できないことから過剰に貯蓄を持つようとするためである。HSVモデルではこの点について、多少、緩和されている。スペースの都合から本稿では考察の対象としていないが、ライフサイクル側面以外からも資産格差を説明する研究はなされている。例えば、Díaz-Dimenés et al. (2003) は消費の習慣仮説 (Habit Formation) から、Quadrini (2000) は起業家精神 (Entrepreneurship) から資産分布の歪みの説明を試みている。資産格差に関する諸モデルは、Cagetti and De Nardi (2005) が詳細なサーベイを行っている。

[図1 挿入：ローレンツ曲線]

世代内資産格差 モデルでも実際のデータでも、20歳代と50歳代とでは平均資産保有水準は異なっているが、この違いは不平等というより、家計のライフサイクル構造に起因するものである。引退直前で労働所得を獲得出来る残存期間が短い高齢世帯は、多くの資産を保有している。引退後に、蓄積した資産からの資本所得と公的年金によって消費活動を行うためである。そのため、これから所得獲得機会が十分に残されている若年層よりも資産を保有していて当然である。貯蓄プロファイルの傾きが大きくなれば、ジニ係数で測った世代間資産格差は高めになる。しかし、我々のモデルでは事前には家計は同質的であることから、貯蓄プロファイルの傾きで測った世代間格差は厚生尺度としては不適切である。一方で、家計が固有リスクに直面している状況では、実現した所得リスクによって消費水準にばらつきが生じれば、それは事前の基準で測った厚生を劣化させる。すなわち、同一コーホートの生涯消費格差は厚生尺度となる。消費格差と資産格差は密接につながっていることから、世代内における資産格差を見てみよう。

STYモデル及びHSVモデルは、家計のライフサイクル構造が分析可能なため、マクロ経済における経済格差だけではなく、世代内における経済格差も分析対象に出来る。図2は、2004年の全国消費実態調査から計算した資産ジニ係数とモデルにおける資産ジニ係数をプロットしたものである^{*20}。実際の値もモデルも、世代内格差は右下がりであり、年齢とともにジニ係数で測った資産格差は低下する。世代内資産格差は、40歳代から60歳代にかけての中年期で、モデルの方が実際の値を大幅に下回る。表4から全世代での資産格差は日本経済よりもモデルの方が高いにも関わらず、世代内の資産格差に関してはモデルはデータよりも低めになる。このことは、表4における資産格差が貯蓄プロファイルに基づく世代間資産格差の影響を受けていることを示唆している。中年期に実際の資産格差があまり低下しない理由として、親からの遺産受取や家購入の可能性が指摘されている (De Nardi 2004)。

^{*20} HSV IIモデルにおける若年期の資産ジニ係数が極端な動きをするのは、この時期にほとんどの家計の資産がゼロのためである。紙面の制約から図示していないが、HSV IIモデルは、資産プロファイル及び労働時間プロファイルが実際のデータとかなり異なっている。また、一時的ショックの分散をゼロにすると、STYモデルやHSV Iモデルでも若年期における貯蓄がほとんどゼロになり、世代内資産格差が定義されなくなる。そのため、一時的ショックの存在は世代内資産格差を説明する上で重要な役割を果たしている。

[図 2 挿入：年齢階層毎の資産格差]

最後に、年齢毎の対数所得分散及び対数消費分散を確認していこう。阿部 (2008) が分析しているように、日本における対数所得分散及び対数消費分散は年齢と共に増加していく。図 3 は、各モデルにおけるライフサイクルでの対数所得分散と、Abe and Yamada (2005) が推計した 1999 年の全国消費実態調査のデータを比較したものである。HSV モデルは労働供給が内生的であり、年齢とともに労働時間の格差が広がっていく。そのため、HSV I モデルは実際のデータと似た凸型の対数所得分散プロファイルを描く。STY モデルは、 $\rho < 1$ の仮定の下では実際の日本経済のデータを綺麗には複製できないが、どちらも水準としては日本経済と近くなっている。一方、対数消費分散プロファイルは、水準が実際の値よりも低く、どちらのケースも日本経済の形状とあまり似ていない。水準が低い理由としては、(1) 固定効果の影響がもっと大きい、(2) モデルにおける公的年金水準が高すぎる、といった理由が考えられる。Storesletten et al. (2004a) は対数消費分散プロファイルは凹関数型になる事を明らかにしており、アメリカにおける消費格差プロファイルと形状も水準もうまくトレース出来ている。一方、日本経済における対数消費分散プロファイルは特殊な形状をしており、20 歳代から 40 歳にかけてほぼフラットになる。この形状を通常のライフサイクルモデルで説明することは困難である。また、HSV II モデルは、両プロファイルとも、日本経済と水準も形状も似ていない。

[図 3 挿入：対数所得分散プロファイル]

[図 4 挿入：対数消費分散プロファイル]

5 まとめと今後の展望

本稿では、経済主体の異質性を考慮した動学的一般均衡モデルを用いて、日本の資産格差の説明を試みた。日本の資産格差は、ライフサイクルを考慮したモデルを用いれば、極端な高資産階層を除いて、うまく説明する事が出来る。しかし、世代内にまで視点移すと、中年層の資産格差やライフサイクルにおける消費格差等、説明が困難な部分も残されている事が明らかになった。Bewley モデルは、安全資産のみでリスクシェアリングを行うという意味で単純な構造のモデルであり、これだけで所得リスクと経済格差の関係を説明するには限界がある。近年では、内生的なリスクシェアリング契約 (Krueger and Perri, 2005) や集計リスクの導入 (Krusell and Smith, 1998) 等、Bewley モデルをベースにして更なる研究が進んでいる。

本稿で用いた動学的一般均衡モデルは多岐にわたって応用されている。例えば、Heatcote et al. (2004) は PSID を用いて所得リスクの時系列的推移を推計し、それをカリブレーション値として動学的一般均衡モデルのインプットにし、近年のアメリカにおける消費格差の推移を分析している。Storesletten et al., (2007) は、所得リスクの分散が景気循環と逆相関し、高齢者層が危険資産を多く保有する事からリスクプレミアムパズルを説明している。また、Nishiyama and Smetters (2005) は所得リスクが存在する世代重複モデルにおける消費税の厚生の帰結を分析している。デ

フォルトリスクを考慮した Chatterjee et al. (2007) は、高度なコンピューテーションと経済理論が融合した最先端の応用研究である。阿部 (2008) がレビューしているように、動学モデルとマイクロデータを利用した Method of Simulated Moment を用いた構造推計も近年、様々な分野で応用されている。動学的一般均衡理論と実証研究、特にマイクロ計量経済学の結果は互いに補完的關係にある。マイクロ計量経済学に関しては、近年、日本においても様々な分野で応用されてきている。一方で、そのユーザーである動学的一般均衡モデルに基づく研究についてはまだ敷居が高いようであり、これからも精力的な研究が望まれる。

参考文献

- [1] 阿部修人 [2008], 「家計消費・貯蓄の実証研究」 未定稿論文
- [2] 加藤涼 [2006], 『現代マクロ経済学講義 - 動学的一般均衡モデル入門』 東洋経済新報社.
- [3] 黒田祥子・山本勲 [2006], 「人々は賃金の変化に応じて労働供給をどの程度変えるのか?: 労働供給弾性値の概念整理とわが国のデータを用いた推計」 ディスカッション・ペーパー・シリーズ、2006-J-3、日本銀行金融研究所.
- [4] 黒田祥子・山本勲 [2007], 「労働供給弾性値はどのように変化したか?: マクロとマイクロの双方の視点から」 Project on Intergenerational Equity Discussion Paper No. 339.
- [5] 小原美紀 [2000], 「失業給付は失業を長期化させるか?」 『季刊・社会保障研究』 第 36 巻、第 3 号、pp.365-377.
- [6] 高山憲之・有田富美子 [1994], 「家計資産の分配とその変遷」 石川経夫編 『日本の所得と富の分配』 東京大学出版会, pp. 59-78.
- [7] Abe, N. and T. Yamada [2006], “Nonlinear Income Variance Profile and Consumption Inequality over the Life Cycle,” *Bank of Japan Working Paper Series*, No. 06-E-01.
- [8] Adda, J. and R. Cooper [2003], “*Dynamic Economics*,” Cambridge: The MIT Press
- [9] Aiyagari, S.R. [1994], “Uninsured Idiosyncratic Risk and Aggregate Saving,” *Quarterly Journal of Economics*, 109, pp. 659-684.
- [10] Auerbach, A.J. and L.J. Kotlikoff [1987], *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [11] Bewley, T.F. [1986], “Stationary Monetary Equilibrium with a Continuum of Independently Fluctuating Consumers,” in W. Hildenbrand and A. Mas-Colell (eds.), *Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gerard Debreu*, North-Holland.
- [12] Braun, R.A., D. Ikeda, and D.H. Joines [2005], “Saving and Interest Rates in Japan: Why They have Fallen and Why They will Remain Low,” *CIRJE Discussion Paper Series*, F-328.
- [13] Browning, M., L.P. Hansen, and J.J. Heckman [1999], “Micro Data and General Equilibrium Models,” in J.B. Taylor and M. Woodford (eds.), *Handbook of Macroeconomics Vol. I*, North-Holland.

- [14] Budría, S., J. Díaz-Dimenes, V. Quadrini and J.V. Ríos-Rull [2002], “Updated Facts on the U.S. Distributions of Earnings, Income, and Wealth,” *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 26, pp. 2-35.
- [15] Cagett, M. and M. De Nardi [2005], “Wealth Inequality: Data and Models,” forthcoming *Macroeconomic Dynamics*.
- [16] Castañeda, A., J. Díaz-Giménez and J.V. Ríos-Rull [2003], “Accounting for Earnings and Wealth Inequality,” *Journal of Political Economy*, 111, pp. 818-857.
- [17] Chatterjee, S., D. Corbae, M. Nakajima and J.V. Ríos-Rull [2007], “A Quantitative Theory of Unsecured Consumer Credit with Risk of Default,” *Econometrica*, 75, pp. 1525-1589.
- [18] De Nardi, M. [2004], “Wealth Inequality and Intergenerational Links,” *Review of Economic Studies*, 71, pp. 743-768.
- [19] Díaz-Dimenes, A., J. Pijoan-Mas and J.V. Ríos-Rull [2003], “Habit Formation: Implications for the Wealth Distribution,” *Journal of Monetary Economics*, 50, pp. 1257-1291.
- [20] Hansen, L.P., and J.J. Heckman [1996], “The Empirical Foundations of Calibration,” *Journal of Economic Perspectives*, 10, pp. 87-104.
- [21] Hansen, G.D. and S. İmrohoroğlu [2006], “Consumption over the Life Cycle: The Role of Annuities,” *NBER Working Paper Series*, No. 12341.
- [22] Hayashi, F. and E.C. Prescott [2002], “The 1990s in Japan: A Lost Decade,” *Review of Economic Dynamics*, 5, pp. 206-35.
- [23] Heathcote, J., K. Storesletten and G.L. Violante [2004], “The Cross-Section Implications of Rising Wage Inequality in the United States,” *mimeo*, University of Oslo.
- [24] Heathcote, J., K. Storesletten and G.L. Violante [2007], “Insurance and Opportunities: A Welfare Analysis of Labor Market Risk,” forthcoming *Journal of Monetary Economics*.
- [25] Huggett, M. [1996], “Wealth Distribution in Life-Cycle Economies,” *Journal of Monetary Economics*, 38, pp. 469-494.
- [26] Krueger, D. and F. Perri [2005], “Does Income Inequality Lead to Consumption Inequality? Evidence and Theory,” *Review of Economic Studies*, 73, pp. 163-193.
- [27] Krusell, P. and A.A. Smith Jr. [1998], “Income and Wealth Heterogeneity in the Macroeconomy,” *Journal of Political Economy*, 106, pp. 867-896.
- [28] Ljungqvist, L. and T. Sargent [2004], *Recursive Macroeconomic Theory*, Massachusetts: The MIT Press.
- [29] Nishiyama, S. and K. Smetters [2005], “Consumption Taxes and Economic Efficiency with Idiosyncratic Wage Shocks,” *Journal of Political Economy*, 113, pp. 1088-1115.
- [30] Quadrini, V. [2000], “Entrepreneurship, Saving, and Social Mobility,” *Review of Economic Dynamics*, 3, pp. 1-40.
- [31] Stokey, N.L. and R.E. Lucas Jr. with E.C. Prescott [1989], *Recursive Methods in Economic*

Dynamics, Massachusetts: Harvard University Press.

- [32] Storesletten, K., C. Telmer, and A. Yaron [2004a], “Consumption and Risk Sharing Over the Life Cycle,” *Journal of Monetary Economics*, 51, pp. 609-633.
- [33] Storesletten, K., C. Telmer, and A. Yaron [2004b], “Cyclical Dynamics in Idiosyncratic Labor-Market Risk,” *Journal of Political Economy*, 112, pp. 695-713.
- [34] Storesletten, K., C. Telmer, and A. Yaron [2007], “Asset Pricing with Idiosyncratic Risk and Overlapping Generations,” *Review of Economic Dynamics*, 10, pp. 519-548.
- [35] Tauchen, G. [1986], “Finite State Markov-Chain Approximations to Univariate and Vector Autoregressions,” *Economics Letters*, 20, pp. 177-181.

付録 A 動学的一般均衡モデルの数値計算法

モデルを実際に数値的に解くことは、いままで数値計算を用いたことのない人にとってはハードルが高く感じるようである*²¹。そこで、補論ではアルゴリズムを丁寧に解説することによって、ブラックボックス化しやすい数値計算手法を明らかにしていきたい*²²。既に述べたように、Bewleyモデルにおいて解析的に政策関数や分布関数を導出することは不可能である。そのため、定常均衡を計算するためには、まず政策関数を近似的に導出し、その後で状態の推移式を使って分布を計算して均衡を探す必要がある。

A.1 アルゴリズムの概観: Bewley モデル

基本的なアルゴリズムは、Aiyagari (1994) と同じである。計算には大きく分けて、(1) 政策関数を導出する部分と、(2) 定常分布の計算と利率のアップデートをする 2 段階のステップが存在する。

ステップ 1: 最初に任意に初期利率 r_0 を (主観割引率以下となるように) 設定する。生産関数は Cobb-Douglas 型なので、利率と総労働供給 N から、賃金 w_0 と総資本需要 K_0 を計算する事が出来る。よって、各家計は (r_0, w_0) を所与として、最適化問題 (1) 式を解く事が出来る。ステップ 1 の目的は各家計の政策関数を得ることであるから、政策関数を得られるならばどのような方法でも大丈夫である。この点について、すぐ下で詳細に解説を加える。

ステップ 2: 労働保有量の推移確率は与えられているため、上で得た政策関数を使って (2) 式より定常分布を計算することが可能である。分布関数が得られたら、積分によって総資本供給を計算することが出来る。総資本供給が必要と十分に近ければ、その時の利率が均衡利率である。もし一致していない場合には、別の利率の下で新たな政策関数を計算するために、再びステップ 1 を計算する。総資本供給と総資本需要が一致する利率が見つかるまで、ステップ 1 とステップ 2 を繰り返す。

一見すると需給が一致する利率を探す事は困難に見えるが、Aiyagari (1994) モデルであれば、利率の上限は主観割引率となり下限も資本減耗率で設定できるため、その間を探せばよい。

*²¹ Kubler and Schmedders (2005) は、数値計算によって導出された近似均衡解の特性について議論している。

*²² 数値計算に関する包括的な文献として、Judd (1998) を挙げておく。Judd (1998) は基本的な数値計算のツールを丁寧に解説しているが、大部であり初心者には目的を見失いやすいテキストでもある。本稿のモデルを解くためには、近似法 (6 章) と最適化 (4 章)、更に AR(1) 過程を近似する Tauchen (1986) の方法を理解するために求積法 (7 章) が必要になる。本稿の数値計算は全て Fortran 90/95 でコーディングされ、一部で数値計算ライブラリの IMSL を利用している。

A.2 政策関数の導出

では、各ステップをより細かく見ていこう。政策関数の導出については様々な方法が既に提案されている。一般的にどれかの方法が必ずしも最適な方法になるわけではない。そのため、いくつかの方法を知っておき、問題に合わせて解法を選択する必要がある。本稿では、一番有名で応用しやすい価値関数を用いた方法とオイラー方程式を用いた方法の2種類を紹介する^{*23}。

価値関数繰り返し法 (Value Function Iteration: VFI) まずは一番有名である価値関数を用いたアルゴリズムを解説しよう。この方法を選択する理由は、価値関数を繰り返し計算する場合には縮小写像の性質があるので比較的計算が安定しているためである。VFIは、モデルが複雑であってもそのモデルをベルマン方程式の形にすることが出来れば分析可能にしてくれる非常に便利なツールである。

ステップ1:(グリッド生成) 状態空間を有限個のグリッドに区切る。労働保有量 e については既に有限個になっているので、資産水準を $\{a^1, \dots, a^I\}$ と区切れればよい。グリッドは等分である必要はなく、流動性制約に直面しやすいゼロ近辺を多めにする方が精度が高くなる。更に、この有限個のグリッド上における価値関数の値 \hat{v}^i の初期値を推測 (Initial Guess) する。価値関数は収束するので、始めは0からスタートしても大丈夫である。グリッドの下限については借入制約から $a^1 = 0$ で決定済みであるが、上限については必ずしも自明ではないため、いろいろ試しながら最終決定をする必要がある。

ステップ2(近似・評価): 近似点 a^i 上にはない価値関数の値については、線形補間や多項式、スプライン補間などを使って近似する必要があるため、その係数を計算する^{*24}。 $\hat{v}(a, e; \mathbf{b})$ をパラメータ \mathbf{b} を使って近似した時の、 a 上での価値関数の値とする。

ステップ3(最適化): 各 a^i について

$$v^i(a^i, e) = \max u((1+r)a^i + we - a') + \beta \sum \pi(e'|e) \hat{v}(a', e'; \mathbf{b})$$

を計算する。最適解を得るためには、ニュートン法などの手法が必要になる^{*25}。このステップで新しい価値関数 $\{v^i\}$ を得る。

ステップ4: 新しいデータ $\{v^i\}$ を使って、価値関数を求めるためにステップ2に戻る。ステップ2と3を繰り返していくことによって価値関数は収束していくため、十分に価値関数の繰り返し誤差が小さくなったらそこでストップする。ただし、価値関数の収束速度は比較的遅い点に注意する必要がある。

^{*23} Aruoba et al. (2004) は、動的的最適化問題を実際に解くときの計算精度やスピードについて様々な手法を比較検討している。

^{*24} 関数の近似法については、Judd (1998) の6章を参照して欲しい。

^{*25} 最適化については、Judd (1998) の4章を参照して欲しい。

内生的格子点法 (Endogenous Gridpoints Method: EGM) VFI は非常に幅広いクラスの動学的最適化問題に応用可能であり、実際に多くのモデルを解く際に利用されてきた。しかし、価値関数の収束は遅く、各グリッド上における最適化のステップは時間がかかる上、安定度からも改善の余地が大きい。そこで、VFI と比較した場合に一階条件が必要になることから応用可能性は狭まるものの、安定して計算速度も速い Carroll (2006) による内生的格子点法を紹介しよう。このアプローチはグリッドの取り方を工夫する事によって最適化が不必要になる。そのため、オイラー方程式が計算可能であれば、利用しやすいアプローチである。

EGM の一番のポイントは、VFI では現在の状態変数 a を有限個のグリッドで近似するのに対して、次期の資産 a' の方を有限個に区切る点にある。価値関数の右辺第 2 項を

$$\Omega(a'_{t+1}, e_t) = \beta \sum \pi(e'_{t+1}|e_t) v(a'_{t+1}, e'_{t+1}),$$

と定義し直そう。現金保有高 $x_t \equiv (1+r)a_t + we_t$ 上の消費関数を $g^c(x_t, e_t)$ と書くことにする。このとき、包絡線定理から

$$\begin{aligned} c_t^{-\gamma} &= \Omega'(a'_{t+1}, e_t), \\ &= \beta(1+r) \sum \pi(e'_{t+1}|e_t) g^c(x'_{t+1}, e'_{t+1})^{-\gamma}. \end{aligned}$$

である。そのため、消費関数 $g^c(x_{t+1}, e_{t+1})$ の初期値を (例えば線形ルールで) 与えれば、各資産水準 $\{a_{t+1}^1, \dots, a_{t+1}^I\}$ 上で $\Omega'(a'_{t+1}, e_t)$ を容易に計算出来る。

CRRA 型の限界効用関数は逆関数を計算する事が可能なので、 $c_t^i = [\Omega'(a_{t+1}^i, e_t)]^{-\frac{1}{\gamma}}$ が各グリッド a_{t+1}^i 上で計算出来る。現金保有高は $x_t^i = c_t^i + a_{t+1}^i$ で求められるので、逆算する事によって現金保有高上の新しい政策関数 $g^c(x_t, e_t)$ を導出する事が可能になる。これを繰り返していき、収束したものがオイラー方程式を満たす政策関数である。

導出した政策関数 では、上記の数値計算手法を使って実際に計算された結果を見ていこう。図 A1 は、労働保有量が 2 種類のケースで政策関数をプロットしたものである。横軸に現在の貯蓄水準、縦軸に次期の貯蓄水準をとっている。太線は雇用されている家計の意思決定を表し、点線は失業している家計のものである。雇用されている家計は、45 度線より上であることから次期には現在よりも多くの資産を残そうとする。一方で失業している家計は 45 度線よりも下なので、現在保有している資産の一部を切り崩して消費に回している事が読み取れる。また、貯蓄水準がゼロに近くで失業している家計は流動性制約に直面している。

[図 A1 挿入: 政策関数]

A.3 分布関数の導出

分布関数を計算する方法は大きく分けて、(1) 乱数を使ってシミュレーションをする方法と (2) 分布関数を数式から直接、導出する方法の 2 種類がある。シミュレーションに関しては政策関数が

得られた後であれば比較的簡単に実行できるが、シミュレーション数次第で結果が変わる可能性がある点が問題である。

そこで、上のステップで求めた政策関数 $g(a, e)$ を使って、分布を計算する方法を簡単に解説しよう。分布関数も連続な関数であるため、貯蓄空間を有限個に区切り各グリッド上における分布を計算する必要が出てくる。通常、グリッドの数は政策関数の導出の時よりも細かくする必要がある。まず、分布関数 $\Psi_0(a^i, e)$ の初期値を設定しよう。Bewley モデルでは分布は収束することが知られているため、一様分布などからスタートして問題ない。現時点で (a, e) である家計が次期に \hat{a}' だけ貯蓄するとしよう。しかし、必ずしも \hat{a}' がグリッド上にあるとは限らない。そこで、定数 ω を次のように設定する。

$$\omega = \frac{\hat{a}' - a_\ell}{a_h - a_\ell}, \hat{a}' \in [a_\ell, a_h]$$

$[a_\ell, a_h]$ は \hat{a}' を挟むグリッド値である。このとき、 (a, e) である家計は次期に a_ℓ と a_h に

$$\begin{cases} \pi(e'|e)(1 - \omega)\Psi_0(a, e) \\ \pi(e'|e)\omega\Psi_0(a, e) \end{cases}$$

という形で振り分けられる。こうして繰り返し計算をしていけば、定常分布を計算する事が可能である^{*26}。

A.4 ライフサイクルモデル

A.4.1 一階条件

オリジナルの動学的最適化問題は、

$$v_j(a, e) = \max_{c, a'} \{u(c_j, \bar{h} - h_j) + s_{j+1}\beta E v_{j+1}(a', e')\}, \quad (5)$$

subject to

$$\begin{aligned} c_j + a_{j+1} &= (1 + r)a_j + (1 - \tau^{ss})w\kappa_j e_j h_j + \xi, \\ c_j + a_{j+1} &= (1 + r)a_j + wbL + \xi \end{aligned}$$

である^{*27}。

ベルマン方程式の一階条件から、

$$\begin{aligned} u'_c(c_j, \bar{h} - h_j) - \lambda &= 0, \\ -\lambda + s_{j+1}\beta E_j \frac{\partial v_{j+1}(a', e')}{\partial a'} &\leq 0, \\ -u'_\ell(\tilde{c}_j, \bar{h} - h_j) + \lambda(1 - \tau^{ss})w\kappa_j e_j &= 0, \\ \frac{\partial v_j(a, e)}{\partial a} &= (1 + r)u'_c(c_j, \bar{h} - h_j) \end{aligned}$$

^{*26} より詳細な点については、Aiyagari and McGrattan (1998) を参照してほしい。

^{*27} 以下、HSV I モデルに基づいて解説を加えているが、計算の詳細は基本的に共通である。

を得る。ただし、 λ は予算制約に関する Lagrange 乗数である。

Envelope 定理及び Cobb=Douglas 型効用関数から一階条件は、

$$\begin{aligned} \frac{[c_j^\sigma(\bar{h} - h_j)^{1-\sigma}]^{1-\gamma}}{c_j} &= s_{j+1}\beta(1+r) E_j \left\{ \frac{[c_{j+1}^\sigma(\bar{h} - h_j)^{1-\sigma}]^{1-\gamma}}{c_{j+1}} \right\}, \\ (1-\sigma) \frac{[c_j^\sigma(\bar{h} - h_j)^{1-\sigma}]^{1-\gamma}}{\bar{h} - h_j} &= \sigma \frac{[c_j^\sigma(\bar{h} - h_j)^{1-\sigma}]^{1-\gamma}}{c_j} (1 - \tau^{ss}) w \kappa_j e_j, \end{aligned} \quad (6)$$

とまとめられる。同時点間の一階条件から労働供給関数は、

$$h_j = \max \left[\bar{h} - \left(\frac{1-\sigma}{\sigma} \right) \frac{c_j}{(1 - \tau^{ss}) w \kappa_j e_j}, 0 \right],$$

となる。ただし、 $h_j \in [0, \bar{h}]$ である。

A.4.2 推移関数

政策関数と労働生産性の推移確率 $\pi(e'|e)$ から、状態 (a, e, j) の推移関数 $Q_t(\cdot, \cdot)$ と状態空間上の分布関数を作る事が出来る。即ち、ある資産を保有し、生産性が e' である家計がどれだけ存在してるかの分布を計算する事が出来る。 $((A \times E \times \mathcal{J}), \mathcal{B}((A \times E \times \mathcal{J})), \Phi_j)$ を確率空間 (Probability Space) する。但し、 $\mathcal{B}((A \times E \times \mathcal{J}))$ は Borel σ -field であり、 $\Phi_j(S)$ は $S \in \mathcal{B}((A \times E \times \mathcal{J}))$ 上の確率測度 (Probability Measure) である。確率測度は個人の状態空間の部分空間上で定義され、状態が $S \in \mathcal{B}((A \times E \times \mathcal{J}))$ である人達の割合も示している。経済に参入したての消費者の分布は、資産ゼロの家計しかないため、 Φ_1 は $a_{1,t} = 0$ 上で 1 を取る。推移関数 $Q_j : (A \times E \times \mathcal{J}) \times \mathcal{B}((A \times E \times \mathcal{J})) \rightarrow [0, 1]$ を

$$Q_j((A \times E \times \mathcal{J}), S) = \sum_{e' \in S} \begin{cases} \pi(e'|e) & \text{if } g_j^a(a, e) \in S \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \text{ for all } j = 1, \dots, J.$$

と定義する^{*28}。即ち、現在の状態が (a, e, j) である j 歳消費者が次期に状態 S へ推移する確率を示している。

初期分布 $\Phi_{1,t}$ からスタートして、各年齢 j 毎の分布 $\{\Phi_j\}_{j=1}^J$ は次式で推移する。

$$\Phi_{j+1}(S) = \int Q_j((A \times E \times \mathcal{J}), S) d\Phi_j, \quad (\forall B \in \mathcal{B}((A \times E \times \mathcal{J}))), \quad j = 1, \dots, J,$$

人口分布については μ_j で調整をするため、ここでの分布は純粋に同一世代内の分布であり、(確率測度の) 合計は常に 1 になる。推移関数の数値計算法は A.3 節と同様である。

A.4.3 Endogenous Gridpoint Method

ライフサイクルモデルにおける政策関数を導出には、計算の安定性及びスピードから前述の EGM を用いた。労働・余暇選択が入った場合の EGM については、Krueger and Ludwig (2006) の補論に従った。

^{*28} より厳密な議論については、Hopenhayn and Prescott (1992) を参照せよ。

ベルマン方程式 (5) 及びオイラー方程式 (6) の右辺第二項を、

$$\begin{aligned}\Gamma_j(a', e) &= s_{j+1}\beta E_{j+1}v_{j+1}(a', e'), \\ \Gamma'_j(a', e) &= s_{j+1}\beta(1+r)E_j u'_c(c_{j+1}, \bar{h} - h_{j+1})\end{aligned}$$

と再定義し、選択変数 $a' \in [\underline{a}, \bar{a}]$ を離散個に区切る。区切るグリッド数は 500 個とした。上式から異時点間の一階条件は

$$u'_c(c_{j,t}, \bar{h} - h_j) = \Gamma'_j(a', e) \quad (7)$$

であるから、離散個の状態 (a', e) について Γ'_j を計算して、その後で効用関数の逆関数を計算すれば各状態における現金保有高 $x_j \stackrel{\text{def}}{=} (1+r)a_j + (1-\tau^{ss})w\kappa_j e_j \bar{h} + \xi$ の消費量 $c_j(x, e)$ が求まる。Envelope 定理及び限界効用関数から、

$$u'_c(c_{j+1}, \bar{h} - h_{j+1}) = \sigma \frac{[c_{j+1}^\sigma (\bar{h} - h_{j+1})^{1-\sigma}]^{1-\gamma}}{c_{j+1}}$$

である。更に、後ろ向き帰納法によって次期の消費関数及び労働供給関数が

$$\begin{aligned}c_{j+1} &= g_{j+1}^c(a, e), \\ h_{j+1} &= g_{j+1}^h(a, e), \text{ if } j+1 \leq j_r,\end{aligned}$$

として既に解かっているとしよう。このとき 500 個のグリッド $\{a'_{j,i}\}_{i=1}^{500}$ 毎に $\Gamma'_{j+1}(a', e)$ を計算する事が出来る。よって、後ろ向き帰納法によって消費関数が計算可能になる。

A.4.4 効用関数の逆関数

一階条件 (7) 式から、 $u'_c(c_j, \bar{h} - h_j)$ を c_j について逆関数が取れば、 a_j を選択変数とした時の c_j が計算出来る。余暇に関するオイラー方程式を利用すると*29、

$$u'_c(c_j, \bar{h} - h_j) = c_j^{-\gamma} \sigma \left(\frac{1-\sigma}{\sigma(1-\tau^{ss})w\kappa_j e_j} \right)^{(1-\sigma)(1-\gamma)}.$$

を得る。これは明らかに逆関数が計算可能であるので、

$$c_j^i = u^{-1} \cdot \Gamma'_j(a', e)$$

を計算する事が可能である。消費量が既知であれば h_j^i もすぐに計算出来る。 $\{c_j^i, h_j^i, a_j^i\}$ のセットが得られたため、現金保有高 $x_j^i = a_j^i + \check{c}_j^i$ も計算可能である。但し、 $\check{c}_j^i \equiv c_j^i + (\bar{h} - h_j^i)$ である。

*29 労働供給が一切ない場合であっても逆関数を計算する事は可能である。

$$\sigma \frac{[c_j^\sigma (\bar{h} - h_j)^{1-\sigma}]^{1-\gamma}}{c_j} = c_j^{\sigma(1-\gamma)-1} (\sigma(\bar{h} - h_j)^{(1-\sigma)(1-\gamma)})$$

を得る。後半部分は定数であるため、簡単に c_j に関する逆関数を計算出来る。

A.4.5 定常均衡

定常均衡の計算手法は基本的に Aiyagari (1994) 及び Huggett (1996) と同じである。財、資本及び労働市場が存在しているが、要素価格は資本装備率 K/L で決定し、ワルラス法則から財市場は均衡する。そのため、市場均衡価格 (r, w) を得るための K/L と、政府の予算制約を満たすための変数 τ^{ss} の 2 変数なので、ループは二つであるが、本稿のモデルでは政府予算は単純化されており、一度、政府の予算制約を満たす社会保険料率を見つければよい^{*30}。

1. (K^0, L^0) を一つ与える (Initial Guess)。 K/L から要素価格の組を計算する。
2. (r^0, w^0, K^0, L^0) を得られたので、政府の予算制約に基づいて τ^{ss} を計算する。
3. (r^0, w^0, τ^{ss}) を所与として、前述の EGM を用いて後ろ向き帰納法を使って解き、政策関数から年齢階層別の分布関数 Φ^0 を計算する。
4. 分布関数 Φ^0 を使って集計変数 (K^1, L^1) を積分から導出する。
5. 新しい集計変数 (K^1, L^1) と (K^0, L^0) が十分に近ければ、市場均衡が得られたことになるためストップ。そうでなければ、別の要素価格の組で、2~4 を繰り返し、計算をする。

参考文献

- [1] Aiyagari, S.R. and E.R. McGrattan [1998], “The Optimum Quantity of Debt,” *Journal of Monetary Economics*, 42, pp. 447-469.
- [2] Aruoba, B., J. Fernández-Villaverde, and J.F. Rubio-Ramírez [2006], “Comparing Solution Methods for Dynamic Equilibrium Economies,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30, pp. 2447-2508.
- [3] Carroll, C.D. [2006], “The Method of Endogenous Gridpoints for Solving Dynamic Stochastic Optimization Problems,” *Economics Letters*, 91, 312-320.
- [4] Floden, M. [2006], “A Note on the Accuracy of Markov-Chain Approximations to Highly Persistent AR(1)-Process,” forthcoming *Economics Letters*.
- [5] Hopenhayn, H. and E.C. Prescott [1992], “Stochastic Monotonicity and Stationary Distributions for Dynamic Economies,” *Econometrica*, 60, pp. 1387-1406.
- [6] Judd, K.L. [1998], “*Numerical Methods in Economics*,” The MIT Press.
- [7] Krueger, D. and A. Ludwig [2006], “On the Consequences of Demographic Change for Rates of Returns to Capital, and the Distribution of Wealth and Welfare,” *Journal of Monetary Economics*, 54, pp. 49-87.

^{*30} 資産 a のグリッド数は 500 個、一時的ショック ε_j 及び固定効果 α のグリッド数はそれぞれ 2 個、分布関数のグリッド数は 5000 個とした。持続的ショック z_j については、AR(1) 過程をマルコフ環で近似した。Floden (2006) は、持続性が高い場合、グリッドの数を十分に多くしないと Tauchen (1986) 法による近似の精度が低くなることを指摘している。そのため、グリッド数は 15 個とした。

- [8] Kubler, F. and K. Schmedders [2005], “Approximate Versus Exact Equilibria in Dynamic Economies,” *Econometrica*, 73, pp. 1205-1235.

表1: 日米の資産格差

	全国消費実態調査				SCF
	1989	1994	1999	2004	1998
資産ジニ係数	0.627	0.596	0.572	0.587	0.803
資産第1分位	0.88	0.96	0.26	-0.32	-0.30
資産第2分位	5.05	5.78	6.05	5.63	1.30
資産第3分位	10.22	11.49	13.12	12.95	5.00
資産第4分位	18.30	19.79	22.57	22.84	12.20
資産第5分位	65.56	61.97	58.00	58.90	81.70
資産上位5-10%	12.81	12.59	12.71	13.04	11.30
資産上位1-5%	19.64	18.30	16.04	16.49	23.10
資産上位1%	17.24	14.69	11.45	11.13	34.70

備考：世帯主が10歳代の家計、農業漁業従事者及び法人経営者を除く。SCFは、Budria et al. (2002)より作成。

表2: 失業リスクモデル

	ベンチマークモデル				確率的割引因子		
	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=5$	$\theta=0.4$	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=5$
資本産出比率	2.42	2.43	2.49	3.23	2.47	2.45	2.49
均衡利子率	4.14%	4.10%	3.78%	4.15%	3.91%	4.00%	3.80%
予備的貯蓄	0.27%	0.77%	4.49%	0.16%	2.94%	1.88%	4.22%
対数消費分散	0.0042	0.0036	0.0024	0.0074	0.0834	0.0527	0.0117
資産ジニ係数	0.2291	0.2077	0.1419	0.2485	0.6481	0.4646	0.1999
資産第1分位	9.77	10.61	13.14	9.26	3.68	6.49	11.92
資産第2分位	15.03	15.57	17.19	14.35	5.90	9.66	15.69
資産第3分位	19.01	19.20	19.81	18.63	7.48	12.10	18.34
資産第4分位	23.61	23.31	22.55	23.80	9.39	15.68	21.52
資産第5分位	32.58	31.31	27.31	33.95	73.52	56.07	32.53
資産上位5-10%	8.23	7.90	6.88	8.60	15.49	12.97	7.88
資産上位1-5%	7.66	7.28	6.04	8.08	26.21	18.10	8.43
資産上位1%	2.38	2.25	1.74	2.53	19.00	10.41	3.35

備考：予備的貯蓄は所得リスクが存在しない場合の資本水準と比較して、どの程度、資本水準が増えたかを表している。

表3: 所得リスクモデル

	$\sigma(\eta)=0.05$				$\sigma(\eta)=0.1$			
	$\rho=0.98$	$\rho=0.95$	$\rho=0.90$	$\rho=0.60$	$\rho=0.98$	$\rho=0.95$	$\rho=0.90$	$\rho=0.60$
資本産出比率	2.54	2.48	2.44	2.41	2.87	2.66	2.54	2.42
均衡利子率	3.53%	3.81%	4.00%	4.15%	2.16%	2.96%	3.52%	4.09%
予備的貯蓄	7.80%	4.19%	1.96%	0.19%	28.58%	15.58%	7.87%	0.91%
対数消費分散	0.1133	0.0401	0.0197	0.0095	0.3533	0.1101	0.0444	0.0108
資産ジニ係数	0.6795	0.5729	0.4969	0.4237	0.7218	0.6113	0.5239	0.4143
資産第1分位	0.00	0.30	1.35	3.53	0.00	0.18	0.95	3.69
資産第2分位	0.93	4.23	7.10	9.42	0.77	3.27	6.18	9.86
資産第3分位	7.39	12.51	14.93	16.09	5.72	10.80	14.10	16.34
資産第4分位	23.23	25.85	25.98	25.31	19.37	24.35	25.78	25.13
資産第5分位	68.46	57.11	50.65	45.65	74.14	61.40	52.99	44.98
資産上位5-10%	17.46	14.52	12.85	11.57	18.26	15.51	13.42	11.38
資産上位1-5%	20.02	15.59	13.41	11.82	23.81	17.55	14.27	11.65
資産上位1%	7.64	5.67	4.76	4.10	10.22	6.76	5.18	4.08

備考：相対的危険回避度 γ は、全てのケースで2とした。

表4: ライフサイクルモデル

	STY			HSV I			HSV II		
	b=50%	b=25%	b=0.1%	b=50%	b=25%	b=0.1%	b=50%	b=25%	b=0.1%
資本産出比率	2.77	3.23	4.07	2.39	2.60	2.94	2.55	2.99	3.82
均衡利子率	2.55%	1.00%	-0.93%	4.01%	3.03%	1.72%	2.98%	1.33%	-0.77%
総労働変化率	-	-	-	0.00%	2.82%	6.17%	0.00%	-6.55%	-14.47%
労働時間変化率	-	-	-	0.00%	3.43%	7.93%	0.00%	-8.12%	-17.12%
対数消費分散	0.1353	0.1299	0.1557	0.1414	0.1433	0.1586	0.1607	0.3558	1.0648
対数賃金分散	0.5589	0.5589	0.5589	1.3636	0.8886	0.4879	0.4289	0.7253	6.4278
対数所得分散	0.3811	0.4195	1.3696	0.3737	0.3323	0.3096	0.3376	0.7328	6.3734
資産ジニ係数	0.6762	0.6542	0.6166	0.6570	0.6497	0.6389	0.6418	0.6471	0.6474
資産第1分位	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
資産第2分位	0.40	0.58	1.18	0.70	0.58	0.43	0.36	0.11	0.02
資産第3分位	7.66	9.07	11.48	8.51	8.86	9.38	9.34	8.56	8.12
資産第4分位	24.84	26.13	27.68	26.09	27.10	28.55	28.15	28.94	29.73
資産第5分位	67.07	64.15	59.44	64.70	63.46	61.64	62.14	62.39	62.13
資産上位5-10%	16.74	16.07	14.98	16.31	16.03	15.60	15.82	15.92	15.90
資産上位1-5%	19.25	17.99	16.15	18.04	17.38	16.42	16.61	16.42	16.04
資産上位1%	7.92	7.13	5.94	7.00	6.60	6.03	5.97	5.78	5.47

備考：所得=賃金+利子所得。「私的年金」ケース以外では、意図せざる遺産は定額で再分配されている。

図1:ローレンツ曲線

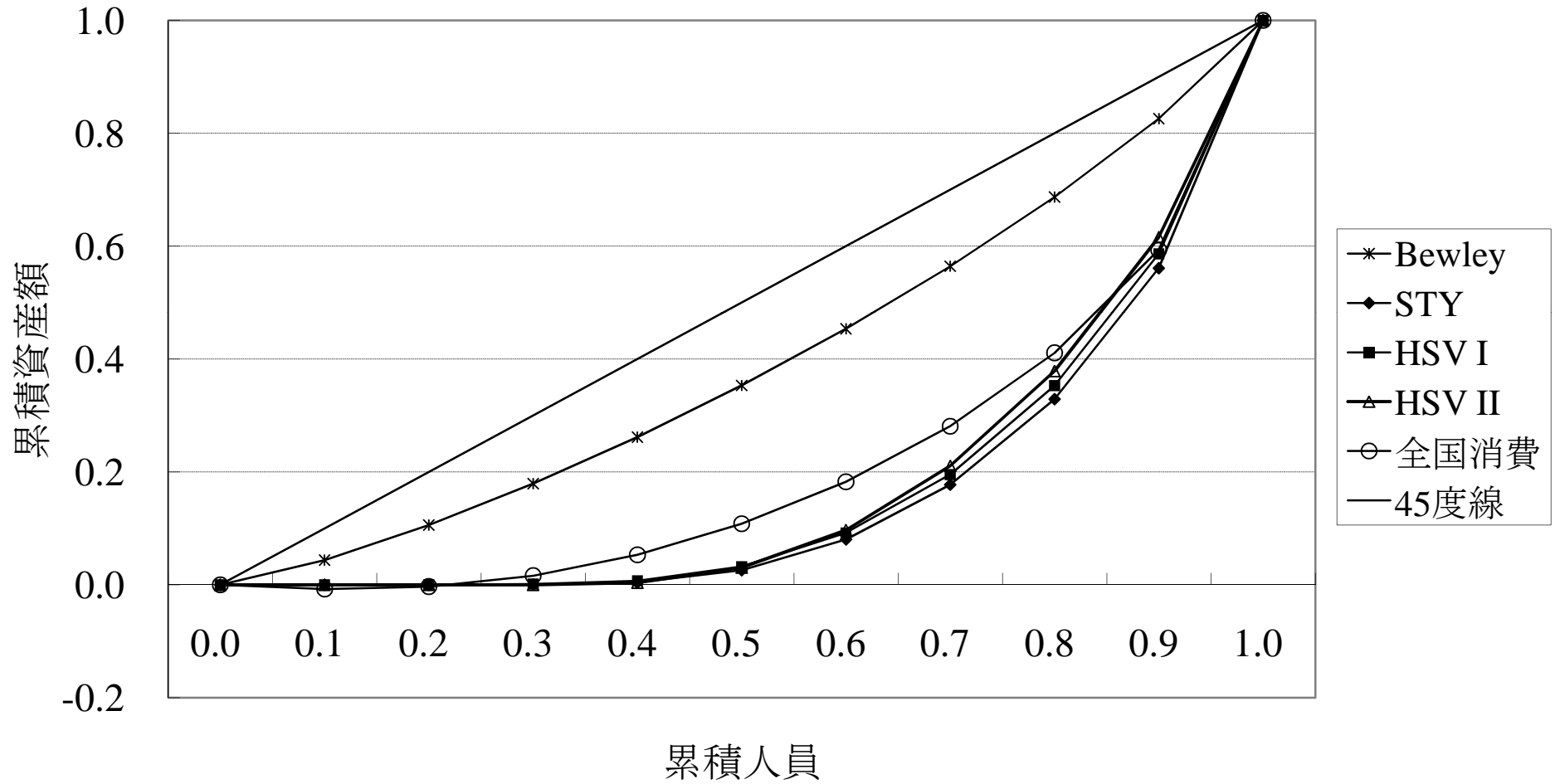


図2: 年齢階層毎の資産格差

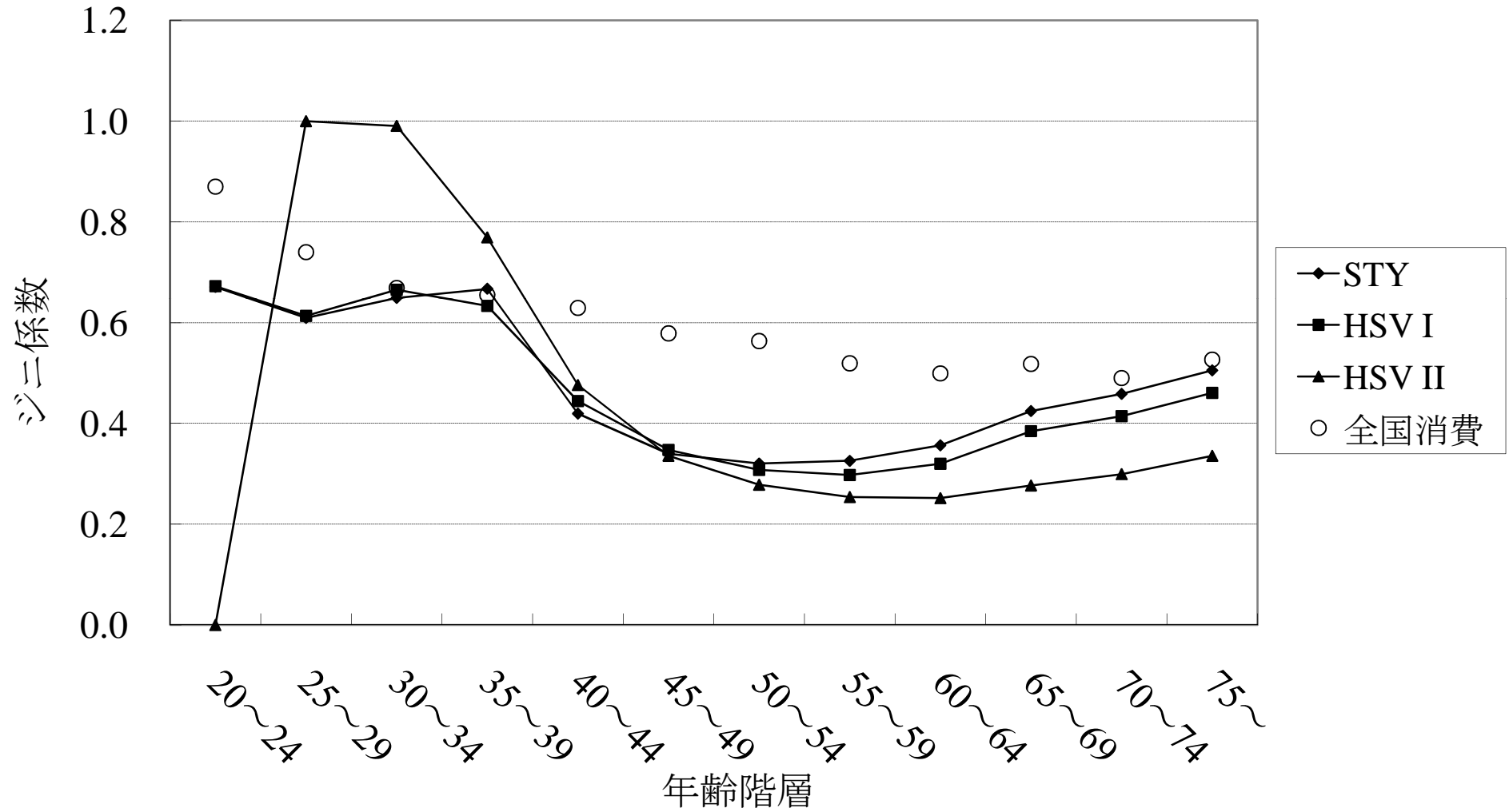


図3: 対数所得分散プロファイル

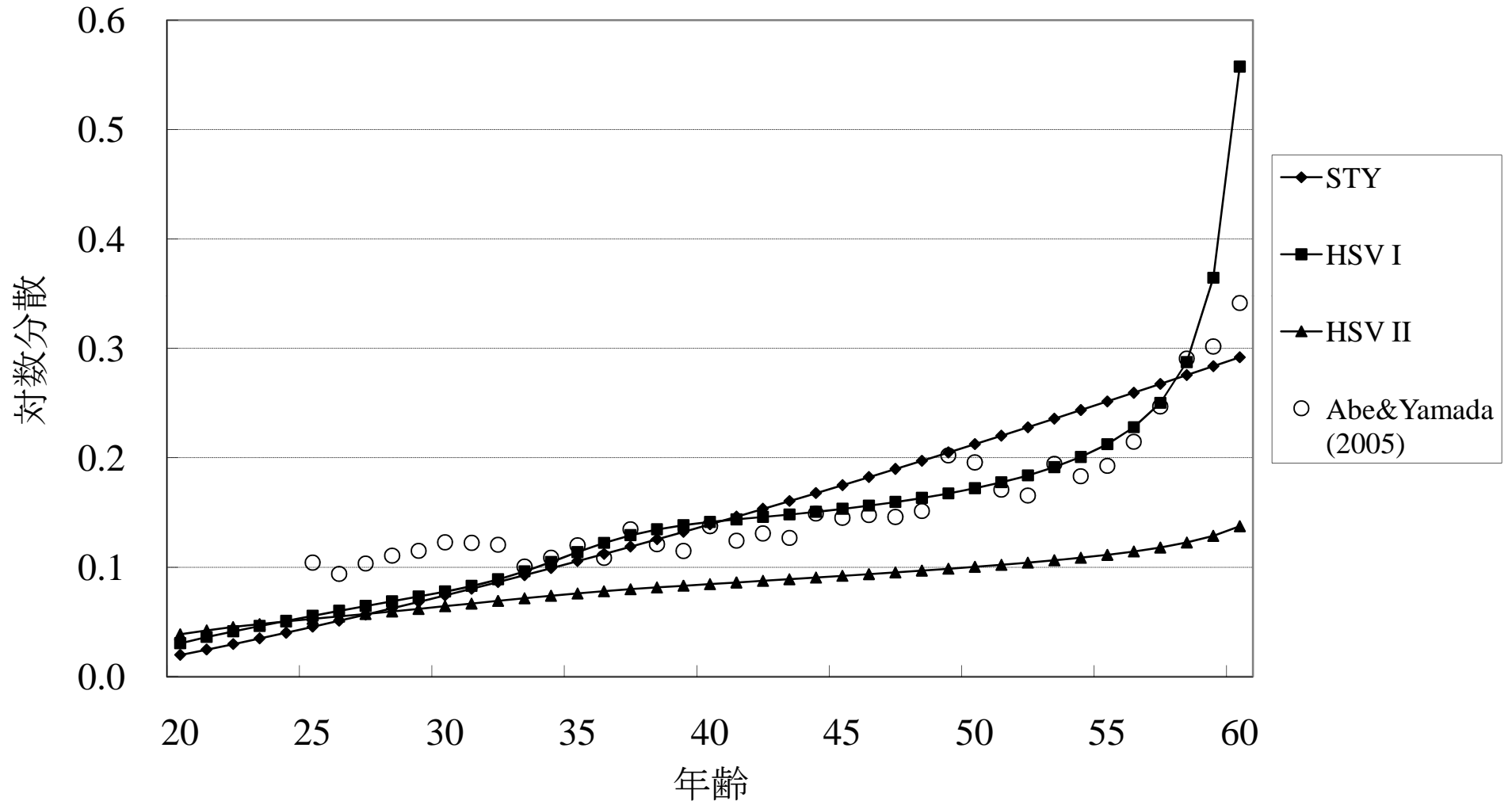
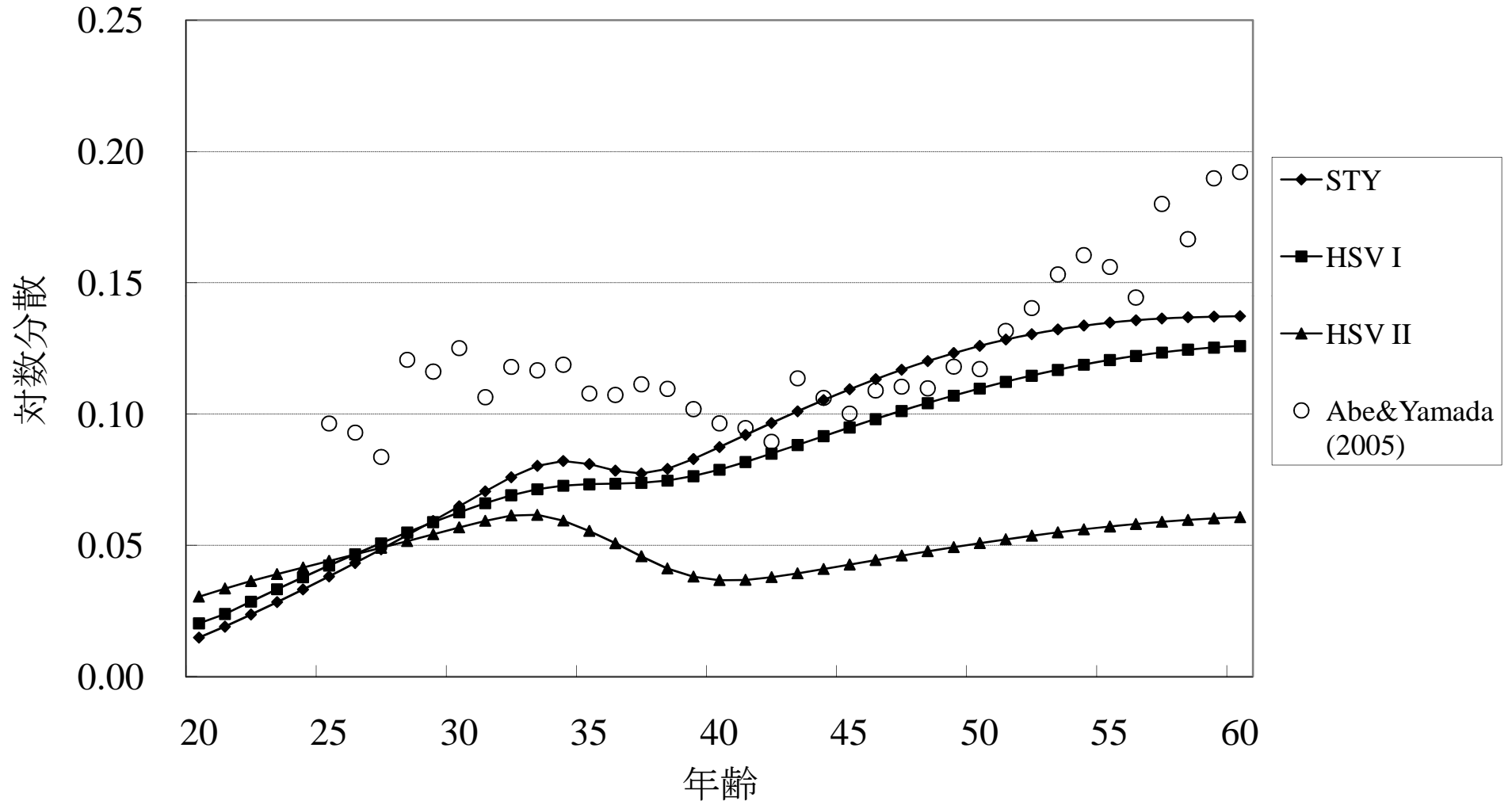


図4: 対数消費分散プロファイル



図A1：政策関数

