ACTA ARITHMETICA
XII (1967)

Решение одной проблемы фигурных чисел

Э. Т. Аванесов (Иваново)

Главными направлениями в развитии теории фигурных чисел являются: установление различных свойств в связи с другими проблемами теории чисел, нахождение классов фигурных чисел, удовлетворяющих некоторым заранее выбранным условиям, и определение соотношений между фигурными числами разной природы (см. например, обзор некоторых результатов по фигурным числам в [1], стр. 84-87).

Наибольшие трудности, связанные с изучением нетривиальных свойств фигурных чисел, объясняются отсутствием общих методов, позволяющих дать непосредственный ответ на основные вопросы существования фигурных чисел данного вида, отделения совокупности фигурных чисел фиксированного свойства, либо, в крайнем случае, установления оценки числа элементов такой совокупности.

Предметом исследования в этой статье являются тетраэдральные и треугольные числа.

Введем определения.

Определение 1. *Тетраэдральными числами* называются числа вида $T_x = \frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$ при натуральном x.

Определение 2. Числа вида $t_y = \frac{1}{2}y(y+1)$, где y — натуральное число, называются *треугольными числами.*

Геометрическая интерпретация треугольных чисел очевидна, название же тетраэдральных чисел происходит от числа шаров равного радиуса, укладываемых в тетраэдр.

Метод, использованный в статье, опирается на исследования Морделла об особенностях разложения в произвольном кубическом поле и о сведении формулируемой задачи к представлению чисел бинарными биквадратичными формами; привлечение метода Биллевича для определения основных единиц соответствующих полей и локального метода Сколема вложения поля алгебраических чисел во все его пополнения позволяет получить полное решение проблемы P^2_{98} (см. [2], стр. 121), а именно доказывается, что числа $1, 10, 120,$

1540 и 7140 — единственные тетраэдральные числа, являющиеся одновременно треугольными числами.

Непосредственно из определений 1 и 2 вытекает, что решение указанной проблемы P_{98}^2 равносильно решению в целых положительных числах неопределенного уравнения

$$3y(y+1) = x(x+1)(x+2). \tag{1}$$

Для дальнейшего изложения нам необходимы будут следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 1. *Все решения уравнения*

$$u^2+3v^2 = w^2$$

в натуральных числах u, v и w, где u и v — взаимно простые числа, можно получить из тождества

$$(3m^2-n^2)^2+3(2mn)^2 = (3m^2+n^2)^2,$$

в котором параметры m, n удовлетворяют следующим условиям:

$$(m, n) = 1, \quad m+n \equiv 1 \pmod 2.$$

Справедливость леммы 1 очевидна.

Лемма 2. *Диофантово уравнение*

$$n^4+36nm^3+36m^4 = 1 \tag{2}$$

имеет ровно два целых решения $n_1 = 1, m_1 = 0$ и $n_2 = 1, m_2 = -1$ (заметим, что решения (n, m) и $(-n, -m)$ здесь и далее не считаются различными).

Доказательство. Обозначим через η произвольный корень уравнения

$$\eta^4-36\eta+36 = 0. \tag{3}$$

Тогда элемент η порождает поле $K_1(\eta)$ четвертой степени, обладающее следующими арифметическими характеристиками: базис целых чисел поля $K_1(\eta)$ есть $[1, \eta, \frac{1}{6}\eta^2, \frac{1}{6}\eta^3]$ (см. [3]), кубической резольвентой для (3) служит уравнение

$$g(z) = z^3-144z-1296 = 0,$$

не имеющее целых корней, поэтому группа Галуа уравнения (3) симметрическая; дискриминант поля $K_1(\eta)$ равен $D(\eta) = -2^4\cdot 3^2\cdot 179 < 0$, значит, уравнение (3) имеет два действительных корня и пару комплексных сопряженных корней, ввиду чего, на основании теоремы Дирихле, поле $K_1(\eta)$ содержит две основные единицы, а единственными особенными единицами будут $+1$ и -1.

С точки зрения теории единиц, решение уравнения (2) сводится к нахождению единиц специального, двучленного вида, и таким образом, задача решения уравнения (2) эквивалентна задаче решения следующего показательного уравнения

$$n+m\eta = \pm\sigma\varepsilon_1^{\alpha}\varepsilon_2^{\beta} \tag{4}$$

с двумя неизвестными целыми показателями α и β, где σ — особенная единица, причем $\sigma = \pm 1$, а ε_1 и ε_2 — основные единицы поля $K_1(\eta)$.

Можно показать, что основными единицами поля $K_1(\eta)$ будут

$$\varepsilon_1 = \tfrac{1}{6}\eta^3+\tfrac{1}{6}\eta^2-6 \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = \tfrac{8}{3}\eta^3+\tfrac{23}{3}\eta^2+22\eta-33;$$

доказательство этого факта основано на методе, изложенном в [4].

Заметим, что для наших целей достаточно определить основные единицы кольца $R(\eta)$, и легко обнаружить, что в качестве основных единиц кольца $R(\eta)$ могут быть выбраны

$$\begin{aligned} \bar\varepsilon_1 &= -\varepsilon_1^{-2} = -(\tfrac{1}{6}\eta^3+\tfrac{1}{6}\eta^2-6)^{-2} = -(-\tfrac{1}{6}\eta^2)^2 = 1-\eta, \\ \bar\varepsilon_2 &= -\varepsilon_2^{-6} = -(\tfrac{1}{3}\eta^2-2\eta+3)^6 = \\ &= -24156\eta^3+22494\eta^2+207144\eta-211085. \end{aligned} \tag{5}$$

Итак, решение уравнения (2) с учетом замечания, сформулированного в условии леммы 2, равносильно решению показательного уравнения

$$n+m\eta = \bar\varepsilon_1^{\alpha}\bar\varepsilon_2^{\beta}, \tag{6}$$

где $\bar\varepsilon_1$ и $\bar\varepsilon_2$ определены из (5).

Для исследования последнего уравнения воспользуемся известным p-адическим методом Сколема, развитым в [5]. Пусть $\alpha = 9\gamma+r$, где $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ или 8. Прямым вычислением обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} \bar\varepsilon_1^9 &= 1+3A, \quad A \equiv 2\eta^3 \pmod 3, \\ \bar\varepsilon_2 &= 1+3B, \quad B \equiv \eta^2 \pmod 3. \end{aligned} \tag{7}$$

Введем обозначение: $\bar\varepsilon_1^{r}\cdot\bar\varepsilon_2^{\beta} = V(r, \beta)$. Непосредственно находим:

$$\begin{gathered} V(0, \beta) \equiv 1, \quad V(1, \beta) \equiv -\eta+1, \quad V(2, \beta) \equiv \eta^2+\eta+1, \\ V(3, \beta) \equiv -\eta^3+1, \quad V(4, \beta) \equiv -\eta^3-\eta+1, \\ V(5, \beta) \equiv -\eta^3+\eta^2+\eta+1, \quad V(6, \beta) \equiv \eta^3+1, \\ V(7, \beta) \equiv \eta^3-\eta+1, \quad V(8, \beta) \equiv \eta^3+\eta^2+\eta+1 \pmod 3. \end{gathered} \tag{8}$$

Из таблицы (8) видно, что условию (6) двучленности единицы по mod3 удовлетворяют лишь $V(0,\beta)$ и $V(1,\beta)$ при любом целом β. Соответственно каждой из этих возможностей проведем исследование:

Случай 1.

$$n+m\eta = \bar{\varepsilon}^{9\gamma}\bar{\varepsilon}_2^{\beta} = (1+3A)^{\gamma}(1+3B)^{\beta} = 1+3(A\gamma+B\beta)+3^2(\ )+\ldots$$

Подставив значения A и B из (7), получим:

$$n+m\eta = 1+3(2\eta^3\gamma+\eta^2\beta)+3^2(\ )+\ldots,$$

откуда

$$(9)\qquad \begin{cases} 0 = 2\gamma+0\cdot\beta+3(\ )+3^2(\ )+\ldots,\\ 0 = 0\cdot\gamma+\beta+3(\ )+3^2(\ )+\ldots \end{cases}$$

Но определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv -1(\mathrm{mod}\,3),$$

и так как $(\Delta, 3) = 1$, то, в силу известной теоремы (см. [5], стр. 179), система уравнений (9) имеет единственное решение $\beta = \gamma = 0$, откуда $n+m\eta = \bar{\varepsilon}_1^0\bar{\varepsilon}_2^0 = 1$, и, следовательно, $n_1 = 1, m_1 = 0$.

Случай 2.

$$\begin{aligned} n+m\eta = \bar{\varepsilon}_1^{9\gamma+1}\bar{\varepsilon}_2^{\beta} &= (1-\eta)(1+3A)^{\gamma}(1+3B)^{\beta} = \\ &= (1-\eta)[1+3(A\gamma+B\beta)+3^2(\ )+\ldots] = \\ &= 1-\eta+3[2\eta^3\gamma+(-\eta^3+\eta^2)\beta]+3^2(\ )+\ldots \end{aligned}$$

Аналогично (9) получим следующую систему уравнений

$$(10)\qquad \begin{cases} 0 = 2\gamma-\beta+3(\ )+3^2(\ )+\ldots,\\ 0 = 0\cdot\gamma+\beta+3(\ )+3^2(\ )+\ldots \end{cases}$$

Так как определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$$

взаимно прост с 3, то система (10) имеет единственное решение, и легко видеть, что таким решением будет $\beta = \gamma = 0$. Тогда $n+m\eta = \bar{\varepsilon}_1\bar{\varepsilon}_2^0 = \bar{\varepsilon}_1 = 1-\eta$, т.е. уравнение (2) имеет решение $n_2 = 1, m_2 = -1$, и лемма 2 доказана.

Подобным же образом устанавливается справедливость и следующих лемм.

Лемма 3. *Диофантово уравнение*

$$(11)\qquad 9n^4+12nm^3+4m^4 = 1$$

имеет только одно целое решение $n = 1, m = -1$.

Лемма 4. *Диофантово уравнение*

$$(12)\qquad n^4-12n^3m+18n^2m^2+9m^4 = 1$$

имеет только два решения в целых числах $n_1 = 1$, $m_1 = 0$; $n_2 = 2$, $m_2 = 1$.

Лемма 5. *Диофантово уравнение*

$$(13)\qquad n^4+18n^2m^2+36nm^3+9m^4 = 1$$

имеет только одно целое решение $n = 1, m = 0$.

Лемма 6. *Диофантово уравнение*

$$(14)\qquad n^4-12n^3m-18n^2m^2+9m^4 = 1$$

имеет только одно целое решение $n = 1, m = 0$.

Лемма 7. *Диофантово уравнение*

$$(15)\qquad n^4-18n^2m^2-36nm^3+9m^4 = 1$$

имеет только одно решение в целых числах $n = 1, m = 0$.

Замечание. Уравнения (3),

$$\eta^4-12\eta^3+18\eta^2+9 = 0 \quad \text{и} \quad \eta^4-18\eta^2-36\eta+9 = 0$$

определяют три различных поля 4 степени, принадлежащих одному и тому же дискриминанту $D = -2^4\cdot 3^2\cdot 179$.

Переходим к непосредственному исследованию уравнения (1). Проведя в (1) замену

$$X = 2x+2, \quad Y = 2y+1,$$

мы придем к эквивалентному (1) уравнению

$$(16)\qquad 6Y^2 = X^3-4X+6.$$

Рассмотрим кубическое поле $K_2(\lambda)$, порожденное целым алгебраическим числом λ, являющимся произвольным корнем уравнения

$$(17)\qquad f(\lambda) = \lambda^3-4\lambda+6 = 0.$$

Поле $K_2(\lambda)$ обладает (см. [6], стр. 113) такими арифметическими характеристиками: базис поля степенной, число классов идеалов равно $h = 1$, а значит, разложение в этом поле однозначно; далее дискриминант поля равен $D(\lambda) = -2^2\cdot 179 < 0$, и легко найти (см. [4]) единственную, в силу теоремы Дирихле, основную единицу этого поля $\varepsilon_0 = 40\lambda^2-101\lambda+95$.

Впрочем в дальнейшем для упрощения вычислений будем пользоваться обратной единицей $\varepsilon = 1/\varepsilon_0 = \lambda^2-5\lambda-19$. В кубическом поле $K_2(\lambda)$ справедливы следующие формулы нормы элемента:

$$(18)\qquad N(a+b\lambda+c\lambda^2) = a^3-6b^3+36c^3+8a^2c-4ab^2+16ac^2+24bc^2+18abc$$

и квадрата элемента поля:

$$(19)\qquad (a+b\lambda+c\lambda^2)^2 = a^2-12bc+\lambda(2ab+8bc-6c^2)+\lambda^2(b^2+2ac+4c^2).$$

Разложив правую часть (16) в кубическом поле $K_2(\lambda)$, получим:

$$6Y^2 = (X-\lambda)(X^2+\lambda X+\lambda^2-4).$$

Легко установить, что

$$(20)\qquad X-\lambda = \pm d\varepsilon^{q_1}(a+b\lambda+c\lambda^2)^2,$$

где d определяется общими делителями выражений $X-\lambda$ и $X^2+\lambda X+\lambda^2-4$. В самом деле, как указано в [7], для всех значений X число общих идеальных множителей идеалов $(X-\lambda)$ и $(X^2+\lambda X+\lambda^2-4)$ конечно. С другой стороны, эти общие идеальные множители должны быть либо делителями главных идеалов, порожденных числами 2 и 3 и определяющих коэффициент при Y^2 в левой части (16), либо делителями идеала $(3\lambda^2-4)$, в последнем случае нормы этих идеалов являются делителями дискриминанта $D(\lambda) = -2^2\cdot 179$ кубической формы $f(\lambda)$.

Заметим, что ввиду того, что $h=1$, всякий идеал в поле (17) является главным. Так как простое число 2 входит множителем в дискриминант этого поля, то главный идеал, соответствующий числу 2, есть куб идеала. Непосредственно находим базис $2, \lambda, \lambda^2$ этого идеала, откуда

$$(21)\qquad 2 = -(\lambda^2+\lambda-4)^3\varepsilon^{-1}.$$

Простое число 3 не входит в дискриминант, поэтому из разложения в произведение трех сопряженных идеалов получим:

$$(22)\qquad 3 = (\lambda-1)(2\lambda+5)(3\lambda^2+4\lambda-9)\varepsilon^{-1} = (\lambda-1)(2\lambda+5)(\lambda^2-3\lambda+3),$$

где элементы $\lambda-1$, $2\lambda+5$ и $3\lambda^2+4\lambda-9$ определяются идеалами нормы 3, базисы которых соответственно

$$3, \lambda-1, \lambda^2-1;\qquad 3, \lambda+1, \lambda^2-1;\qquad 3, \lambda, \lambda^2.$$

И наконец, используя представление

$$3\lambda^2-4 = (\lambda^2+\lambda-4)^2(45\lambda^2-114\lambda+107),$$

где $N(45\lambda^2-114\lambda+107) = 179$, преобразуем (20) к окончательному виду, учитывая (21) и (22),

$$(23)\qquad X-\lambda = \pm\varepsilon^{q_1}(\lambda^2+\lambda-4)^{q_2}(\lambda^2-3\lambda+3)^{q_3}\times \\ \times(\lambda-1)^{q_4}(2\lambda+5)^{q_5}(45\lambda^2-114\lambda+107)^{q_6}(a+b\lambda+c\lambda^2)^2.$$

Без ограничения общности можно принять, что каждый из показателей q_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ равен 0 либо 1. Далее очевидно, что $q_2 = 1$, а из чисел q_3, q_4 и q_5 либо произвольный один показатель, либо все три одновременно отличны от нуля. Покажем теперь, что всегда $q_6 = 0$.

Действительно, если $q_6 = 1$, то, перейдя в (23) к нормам, получим: $X^3-4X+6 = \pm 2\cdot 3\cdot 179Z^2$, или, считая $X = 2\bar{X}$,

$$(24)\qquad 4\bar{X}^3-4\bar{X}+3 = 4\bar{X}(\bar{X}^2-1)+3 = \pm 3\cdot 179Z^2.$$

Но левая часть (24) будет $\equiv 3 \pmod 8$, тогда как в правой части $179\equiv 3\pmod 8$, а ввиду нечетности Z имеем: $Z^2\equiv 1\pmod 8$, и таким образом, приходим к невозможному сравнению.

$$\pm 3\cdot 179Z^2 \equiv \pm 3\cdot 3 \equiv \pm 1 \not\equiv 3 \pmod 8.$$

Итак, окончательно

$$(25)\qquad X-\lambda = \pm(\lambda^2-5\lambda-19)^{q_1}(\lambda^2+\lambda-4)\times \\ \times(\lambda^2-3\lambda+3)^{q_3}(\lambda-1)^{q_4}(2\lambda+5)^{q_5}(a+b\lambda+c\lambda^2)^2,$$

а для показателей q_i $(i = 1, 3, 4, 5)$ имеем 8 различных возможностей, а именно:

$$(q_1, q_3, q_4, q_5) = (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (0,1,1,1), \\ (1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (1,1,1,1).$$

Проведем исследование соответственно каждой из этих возможностей.

Первый случай: $(q_1, q_3, q_4, q_5) = (0,1,0,0)$. При этом

$$X-\lambda = \pm\lambda(a_1+b_1\lambda+c_1\lambda^2)^2,\qquad\text{или}\qquad X\lambda-\lambda^2 = \pm(a+b\lambda+c\lambda^2)^2.$$

Учитывая (19), получим систему уравнений:

$$(26)\qquad b^2+2ac+4c^2 = \pm 1,$$

$$(27)\qquad a^2-12bc = 0,$$

$$(28)\qquad 2ab+8bc-6c^2 = \mp X.$$

Так как из (27) следует четность a, то в правой части (26), а отсюда и в (28), нужно взять верхний знак, в противном случае уравнение (26) не будет иметь места, если его рассматривать по mod 4. Легко установить взаимную простоту b и c, в самом деле, если $(b, c)\neq 1$, то левая часть (26), а значит, и правая часть, т.е. число 1, делится на (b, c), что невозможно. Итак, $(b, c) = 1$, но, с другой стороны, из (26) следует: $b \equiv 1 \pmod 2$. Используя это обстоятельство, получим из (27) два случая:

1) $b = n^2$, $c = 3m^2$, $a = 6mn$, откуда, подставив в (26), найдем:

$$n^4+36nm^3+36m^4 = 1.$$

Последнее уравнение совпадает с (2), и, в силу леммы 2, оно имеет два решения: $n_1 = 1, m_1 = 0, b = 1, a = c = 0$ и из (28) $X_1 = 0$, далее $n_2 = 1, m_2 = -1, b = 1, c = 3, a = -6$, отсюда $X_2 = 42$.

2) $b = 3n^2$, $c = m^2$, $a = 6mn$, и из (26) вытекает:

$$9n^4+12nm^3+4m^4 = 1.$$

На основании леммы 3 находим единственное решение этого уравнения:

$$n = 1,\ m = -1,\ b = 3,\ c = 1,\ a = -6,\ X_3 = 18.$$

Итак, первый случай определяет три целых решения $X = 0, 18, 42$ уравнения (16).

Второй случай: $(q_1, q_3, q_4, q_5) = (0, 0, 1, 0)$. Тогда

$$\begin{aligned} X-\lambda &= \pm(\lambda^2+\lambda-4)(\lambda-1)(a+b\lambda+c\lambda^2)^2 = \\ &= \mp(\lambda+2)(a+b\lambda+c\lambda^2)^2 = \\ &= \mp[\lambda^2(2b^2+2c^2+2ab+4ac+8bc)+ \\ &\quad +\lambda(a^2+4b^2+4c^2+4ab+8ac+4bc)+(2a^2-6b^2-24c^2-12ac-24bc)] \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем

$$b^2+c^2+ab+2ac+4bc = 0,$$
$$a^2+4b^2+4c^2+4ab+8ac+4bc = 1,$$

или, комбинируя первое и второе уравнения,

(29) $$b^2+c^2+ab+2ac+4bc = 0,$$

(30) $$a^2 = 12bc+1,$$

(31) $$X = -2a^2+6b^2+24c^2+12ac+24bc.$$

Из (30) следует: $(a, 2) = (a, 3) = (a, b) = (a, c) = 1$.

Решая (29) как квадратное уравнение относительно b, получим: $2b = -(a+4c)\pm\sqrt{a^2+12c^2}$, т.е.

(32) $$a^2+3(2c)^2 = t^2.$$

С помощью леммы 1 параметризуем уравнение (32). Тогда

$$a = 3m^2-n^2,\quad 2c = 2mn,\quad b_1 = n(n-2m),\quad b_2 = -m(3m+2n)$$

Исходя из первого значения для b, находим ввиду (30):

$$n^4-12n^3m+18n^2m^2+9m^4 = 1.$$

Решение $n = 1, m = 0$ последнего уравнения, совпадающего с (12), дает: $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$ и $X_4 = 4$. Используя второе решение $n = 2, m = 1$, легко обнаружить, что $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$, откуда $X_5 = 70$.

Значение $b_2 = -m(3m+2n)$ приводит (30) к уравнению вида:

$$n^4+18n^2m^2+36nm^3+9m^4 = 1,$$

тривиальное решение которого $n = 1$, $m = 0$ определяет: $a^2 = 1$, $b = c = 0$, $X_6 = -2$.

Дополняя проведенное исследование леммами 4 и 5, формулируем вывод: во втором случае имеется ровно три целых решения $X = -2, 4, 70$ уравнения (16).

Третий случай: $(q_1, q_3, q_4, q_5) = (0, 0, 0, 1)$. Здесь

$$\begin{aligned} X-\lambda &= \pm(\lambda^2+\lambda-4)(2\lambda+5)(a+b\lambda+c\lambda^2)^2 = \\ &= \pm(7\lambda^2+5\lambda-32)(a+b\lambda+c\lambda^2)^2. \end{aligned}$$

Отсюда легко выводится следующая система уравнений:

(33) $$7a^2-4b^2-46c^2+10ab-8ac-44bc = 0,$$

(34) $$5a^2-22b^2-64c^2-8ab-44ac-92bc = \pm 1.$$

Очевидно, система (33)-(34) неразрешима в целых числах, так как из (33) должно быть $a \equiv 0 \pmod 2$, в то время как уравнение (34) справедливо лишь при нечетном a.

Итак, третий случай не определяет решений (16).

Четвертый случай: $(q_1, q_3, q_4, q_5) = (0, 1, 1, 1)$. В этом случае представление

$$\begin{aligned} X-\lambda &= \pm(\lambda^2+\lambda-4)(\lambda^2-3\lambda+3)(\lambda-1)(2\lambda+5)(a+b\lambda+c\lambda^2)^2 = \\ &= \pm 3(\lambda^2+\lambda-4)(a+b\lambda+c\lambda^2)^2 \end{aligned}$$

приведет к системе уравнений

$$f_1(a, b, c) = 0,$$
$$3f_2(a, b, c) = \pm 1,$$

где f_1 и f_2 — квадратичные формы с целыми коэффициентами от неизвестных a, b, c. Неразрешимость такой системы легко усматривается.

Пятый случай: $(q_1, q_3, q_4, q_5) = (1, 1, 0, 0)$. Несложное вычисление дает

$$X\lambda - \lambda^2 = \pm(\lambda^2 - 5\lambda - 19)(a + b\lambda + c\lambda^2)^2,$$

откуда

$$19a^2 - 30b^2 - 156c^2 + 12ab - 60ac - 180bc = 0, \tag{35}$$

$$a^2 - 15b^2 - 30c^2 - 10ab - 30ac - 52bc = \pm 1. \tag{36}$$

Из уравнения (35) вытекает, что $a \equiv 0 \pmod 2$; тогда ввиду (36) должно быть $b \equiv 1 \pmod 2$. Рассматривая (35) как сравнение по mod 4, находим:

$$19a^2 - 30b^2 - 156c^2 + 12ab - 60ac - 180bc \equiv -30b^2 \equiv 2b^2 \equiv 2 \pmod 4,$$

что невозможно.

Значит, в пятом случае тоже нет решений уравнения (16).

Шестой случай: $(q_1, q_3, q_4, q_5) = (1, 0, 1, 0)$. Аналогично из представления

$$X - \lambda = \pm(\lambda^2 - 5\lambda - 19)(\lambda^2 + \lambda - 4)(a + b\lambda + c\lambda^2)^2 =$$
$$= \pm(3\lambda^2 + 25\lambda + 44)(a + b\lambda + c\lambda^2)^2$$

найдем следующую систему уравнений относительно неизвестных a, b, c:

$$3a^2 + 56b^2 + 74c^2 + 50ab + 112ac + 164bc = 0, \tag{37}$$

$$25a^2 + 82b^2 - 8c^2 + 112ab + 164ac + 148bc = \pm 1. \tag{38}$$

Очевидно, уравнения (37) и (38) несовместны, ибо из (37) следует четность a, в то время как (38) верно лишь при a нечетном, и таким образом, шестой случай также не определяет решений уравнения (16).

Седьмой случай: $(q_1, q_3, q_4, q_5) = (1, 0, 0, 1)$. В этом случае

$$X - \lambda = \pm(\lambda^2 - 5\lambda - 19)(\lambda^2 + \lambda - 4)(2\lambda + 5)(a_1 + b_1\lambda + c_1\lambda^2)^2 =$$
$$= \pm(\lambda^2 - 5\lambda - 19)(7\lambda^2 + 5\lambda - 32)(a_1 + b_1\lambda + c_1\lambda^2)^2 =$$
$$= \pm(\lambda^2 - 5\lambda - 19)^{-1}(7\lambda^2 + 5\lambda - 32)(a + b\lambda + c\lambda^2)^2 =$$
$$= \mp(\lambda - 2)(a + b\lambda + c\lambda^2)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, приходим, после аналогичного со 2 случаем упрощения, к системе уравнений относительно неизвестных a, b, c, X:

$$b^2 + 7c^2 - ab + 2ac - 4bc = 0, \tag{39}$$

$$a^2 - 12bc = 1, \tag{40}$$

$$2a^2 + 6b^2 + 24c^2 + 12ac - 24bc = X. \tag{41}$$

Соответственно устанавливается, что $(a, 2) = (a, 3) = (a, b) = (a, c) = 1$. Далее решаем (39) как квадратное уравнение относительно b, откуда $2b = a + 4c \pm \sqrt{a^2 - 12c^2}$, или

$$a^2 - 3(2c)^2 = t^2. \tag{42}$$

Параметризуя (42) по лемме 1, получим:

$$a = 3m^2 + n^2, \quad 2c = 2mn, \quad b_1 = n(2m + n), \quad b_2 = m(3m + 2n).$$

Первая возможность для b после подстановки в (40) дает уравнение

$$n^4 - 12n^3m - 18n^2m^2 + 9m^4 = 1,$$

к которому применима лемма 6. Очевидное решение его $n = 1, m = 0$ приведет к $a^2 = 1, b^2 = 1, c = 0$, и наконец, $X_7 = 8$. Исходя же из значения $b_2 = m(3m + 2n)$, уравнение (40) определит следующее представление:

$$n^4 - 18n^2m^2 - 36nm^3 + 9m^4 = 1.$$

В силу леммы 7 находим, что $b = c = 0, a^2 = 1$, откуда $X_8 = 2$. Следовательно, в седьмом случае определены еще два целых решения $X = 2$ и 8 уравнения (16).

Наконец, как и в 4 случае, показывается невозможность наличия решений в 8 случае.

Итак, резюмируя вышеизложенное, можно сделать вывод, что уравнение (16) имеет целые решения лишь при $X = -2, 0, 2, 4, 8, 18, 42$ и 70. Переход к эквивалентному уравнению (1) и отбрасывание неположительных решений $x = -2, -1$ и 0 этого уравнения позволяет установить решение проблемы P_{98}^2 в следующей формулировке:

Кроме чисел 1, 10, 120, 1540 и 7140, не существует других тетраэдральных чисел, являющихся одновременно треугольными числами.

Цитированная литература

[1] W. Sierpiński, *Elementary theory of numbers*, Warszawa 1964.

[2] — *A selection of problems in the theory of numbers*, Warszawa 1964.

[3] К. К. Биллевич и Т. К. Шуликина, *Нахождение базиса алгебраического поля n-го порядка*, Труды СКГМИ, вып. 19, Математика, Орджоникидзе (1963), стр. 13-25.

[4] К. К. Биллевич, *Об единицах алгебраических полей третьего и четвертого порядков*, Мат. сборник, 40 (82), I (1956), стр. 123-136.

[5] Th. Skolem, *Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen und diophantische Gleichungen*, 8de Skand. Math.-Kongress, Stockholm (1934), стр. 163-188.

[6] Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеев, *Теория иррациональностей третьей степени*, Москва-Ленинград 1940.

[7] L. J. Mordell, *On the integer solutions of the equation* $ey^2 = ax^3+bx^2+cx+d$, Proc. Lond. Math. Soc. 21, 6 (1923), стр. 415-419.

Reçu par la Rédaction le 26. 8. 1966

ACTA ARITHMETICA
XII (1967)

The number of solutions of a system of equations in a finite field

by

CHARLES WELLS (Cleveland, Ohio)

1. Introduction. Let $GF(q)$, where $q = p^z$, p prime, denote the finite field of order q. Let $k_1, \ldots, k_n, s_1, \ldots, s_t$ denote positive integers, $a_1, \ldots, a_n$ nonzero elements of $GF(q)$, and b_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, t)$ arbitrary elements of $GF(q)$. Let

$$c_i = \sum_{j=1}^{t} b_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.1}$$

We consider the number N of solutions in $GF(q)$ of the system of equations

$$y_i^{k_i} = a_i + \sum_{j=1}^{t} b_{ij} x_j^{s_j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

where for c_i as in (1.1)

$$c_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.3}$$

and

$$a_i c_k \neq a_k c_i \quad (i \neq k,\ i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.4}$$

L. Carlitz and the author [1] proved that for $t = 1$, $N = q + O(q^{1/2})$ as $q \to \infty$. Here the following generalization is proved:

THEOREM 1. *The number of solutions of the system* (1.1) *satisfies*

$$N = q^t + O(q^{t-1/2}) \quad (q \to \infty).$$

As in [1] the proof uses the Riemann hypothesis for an algebraic function field over $GF(q)$, proved by A. Weil [3]. If we use a weaker result of Davenport [2], we have

$$N = q^t + O(q^{t-\delta})$$

for some $\delta > 0$.