Fonction non développable en série entière

Introduction

Nous savons qu'une fonction développable en série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Dans ce problème, nous allons montrer que la réciproque n'est pas vraie en considérant la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0. \end{cases}$$

Nous allons démontrer que φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle n'est pas développable en série entière.

I. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

3. En déduire l'existence et la valeur des limites $\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi'(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi'(x)$.

4. En déduire que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(0) = 0$.

II. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$

1. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[, \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'existence et la valeur des limites $\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi^{(n)}(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi^{(n)}(x)$.

4. En déduire par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $\varphi^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(n)}(0) = 0$.

5. Conclure que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

III. Développement en série entière de φ

Dans cette partie, on suppose que la fonction φ est développable en série entière. Ainsi, il existe un nombre réel $r > 0$ et une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Rappeler l'expression de a_n en fonction de φ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire que φ n'est pas développable en série entière.

Fin