

圧縮センシングの数理

東京工業大学
情報理工学院
樺島祥介

概要

- 導入
 - スパースな信号, 圧縮センシングとは
 - 背景1: AD変換と標本化定理, 背景2: 信号の統計性と疎表現
- 信号復元の方法
 - 劣決定1次方程式と正則化
 - 代表的な方法
 - Orthogonal Matching Pursuit (OMP), Basis Pursuit と線形計画法

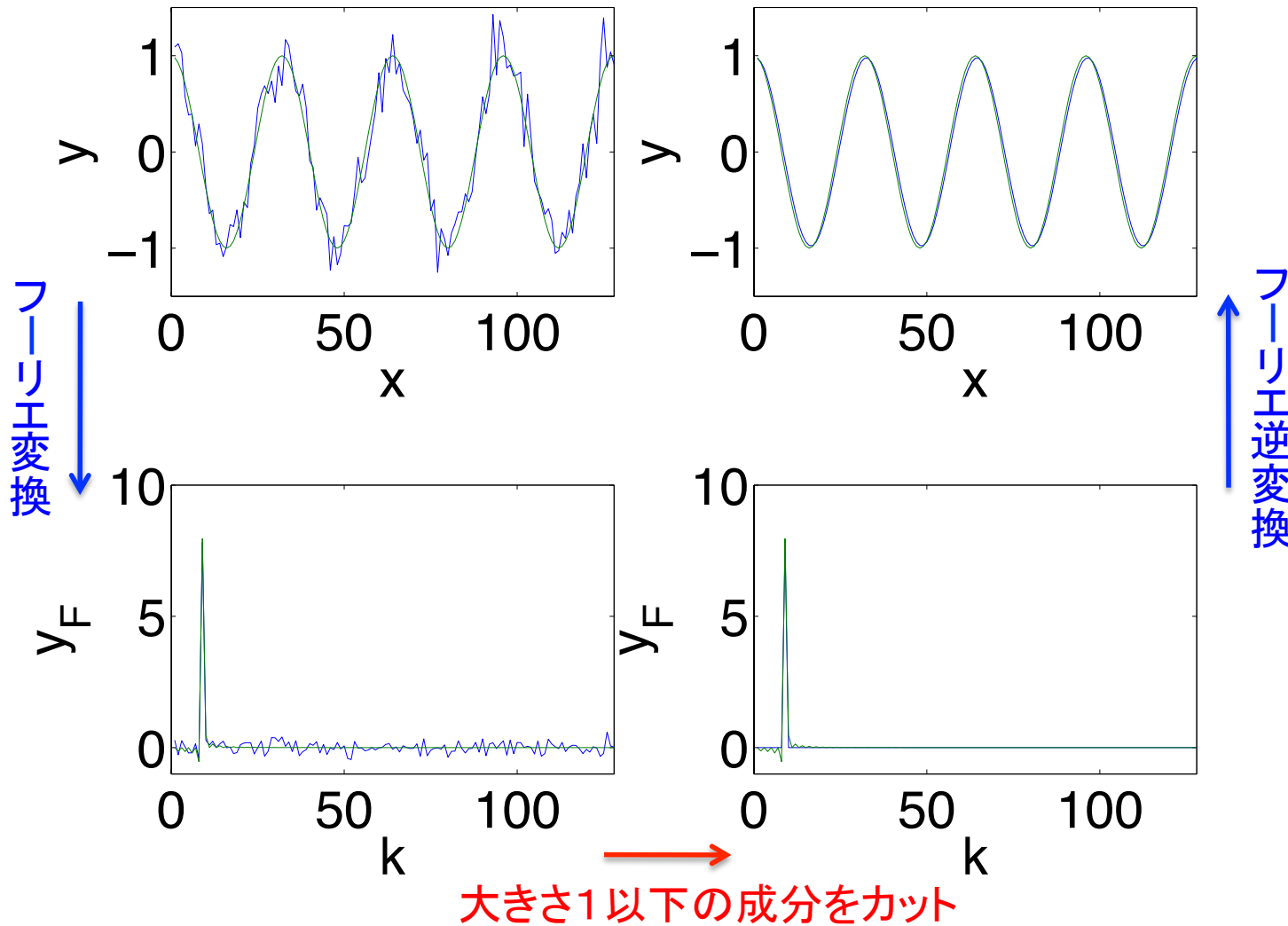
導入

スパースな信号

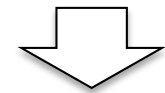
- 適当な基底をもちいるとスパース(ゼロ成分が多くなるよう)に表現できる信号にはいろいろと都合のよいことがある.

例) ノイズ除去

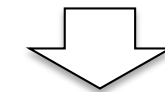
$$y = \cos(2\pi \times \underline{4} \times x/128) + \underline{0.2}\eta(x)$$



スパース
→強度が局在



スパース表現に
変換して弱成分
をカット



ノイズをきれい
に除去できる

例) データ圧縮

[Romberg and Wakin, 2007]

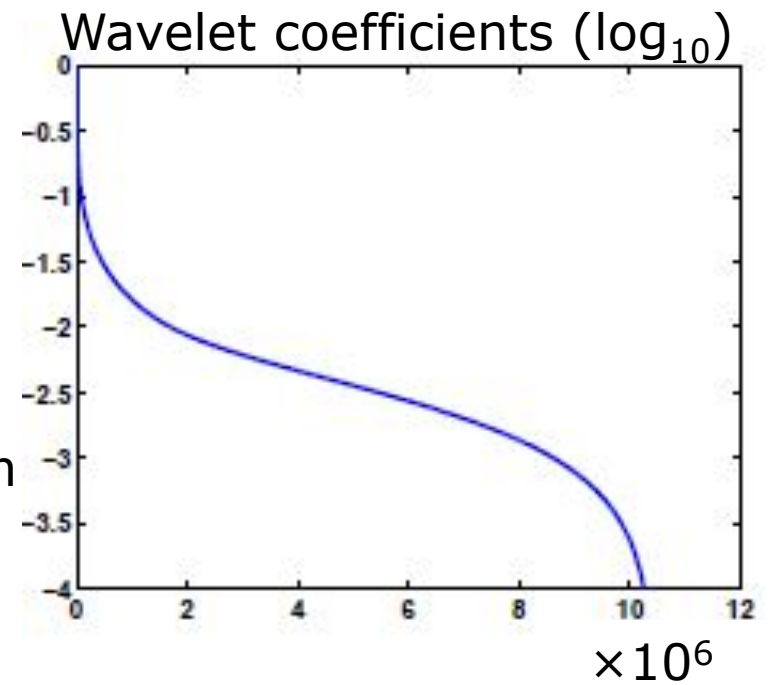


例) データ圧縮

[Romberg and Wakin, 2007]



→
wavelet
transformation

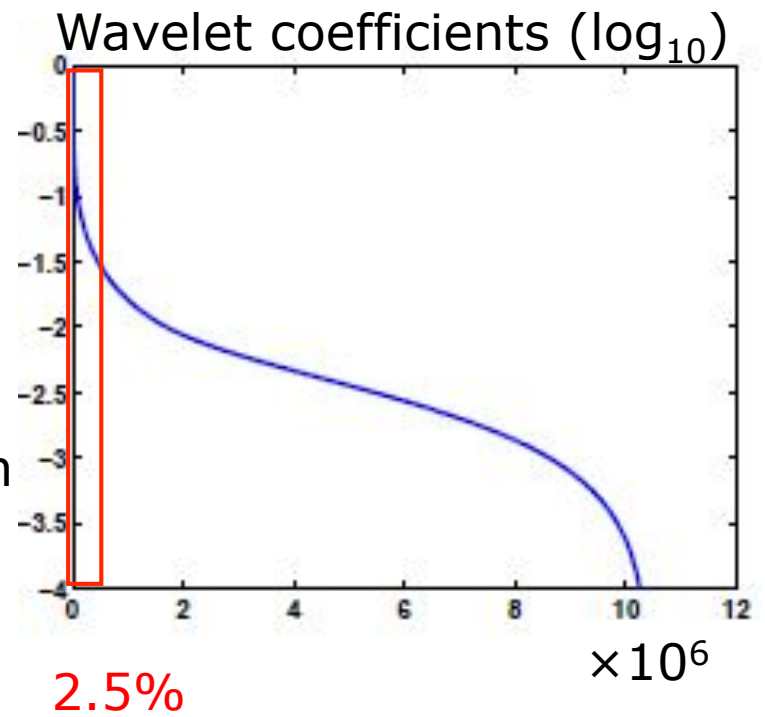


例) データ圧縮

[Romberg and Wakin, 2007]

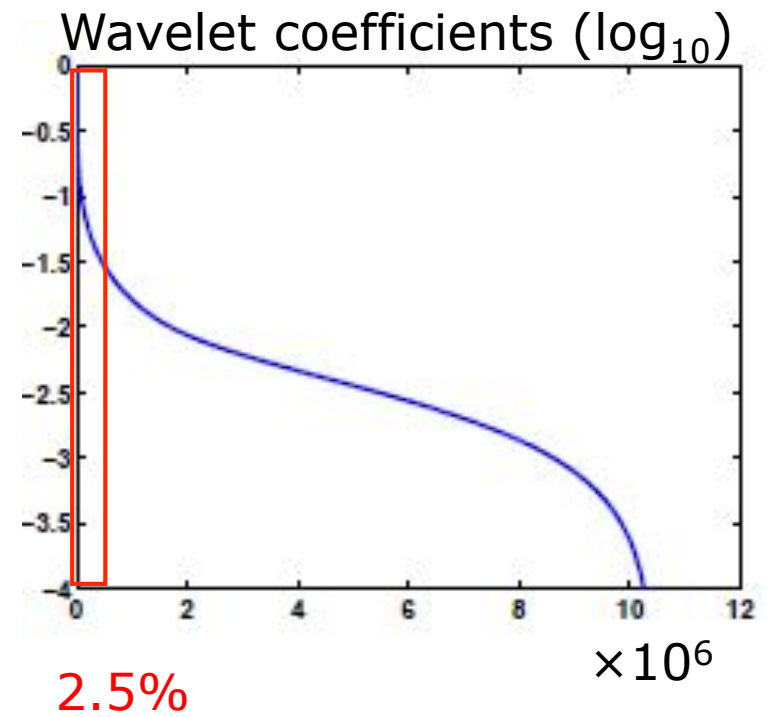


→
wavelet
transformation



例) データ圧縮

[Romberg and Wakin, 2007]



例) データ圧縮

[Romberg and Wakin, 2007]

Original Image



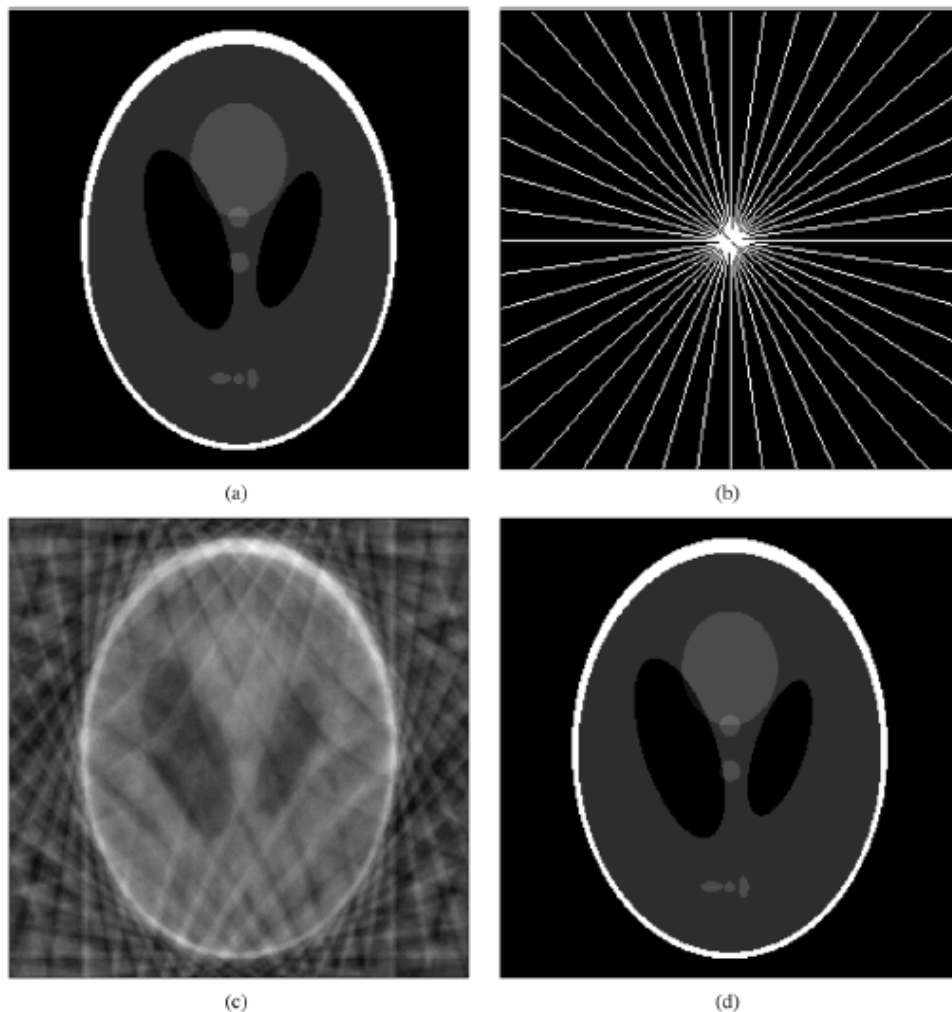
Reconstructed image from
2.5% coefficients



圧縮センシングとは

- (適切な基底の下で) スパースに表現できる (多くの成分の大きさがゼロ, または, ゼロとみなせるほど小さい) 信号に対して, 少数の計測結果からの再構成を可能にする 枠組み.
- 応用領域
 - 反射法地震探査
 - トモグラフィー (X線CT, MRI)
 - 1ピクセルカメラ
 - 画像ノイズ除去
 - Data Streaming Computing
 - Group Testing
 - etc.

Candes-Ronberg-Tao (2006)からの例



トモグラフィーのシミュレーション

左上: 原画像(Logan-Shepp Phantom)
#512x512

右上: 2次元フーリエ変換のサンプル値
を22方向から512点採取.

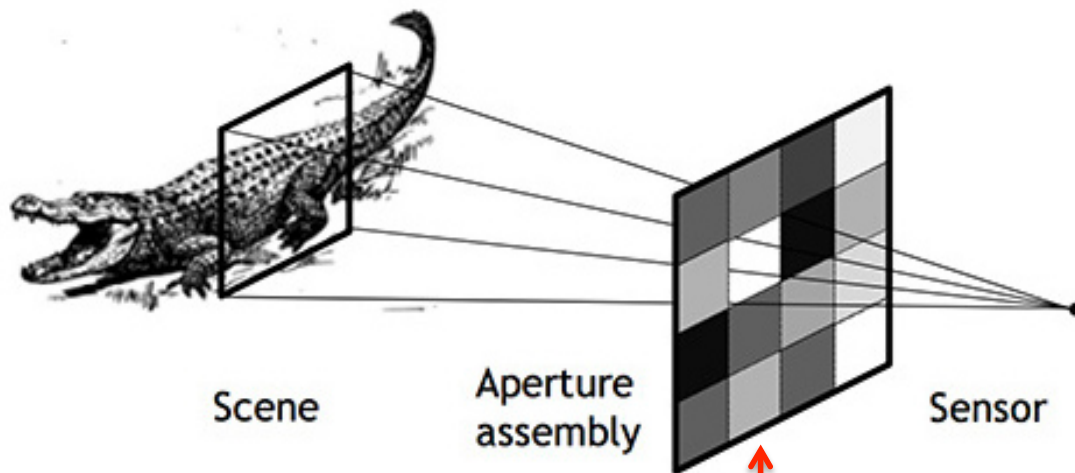
左下: 一般化逆行列による復元結果.

右下: 画素値の空間変化率がスパースであることを考慮した復元結果.
原画像が完全に復元されている.

ナイキストレートの約1/50のサンプル
レートで完全復元できている
→標本化定理の限界が破られている

1ピクセルカメラ

Gang Huang@Bell Lab et al.



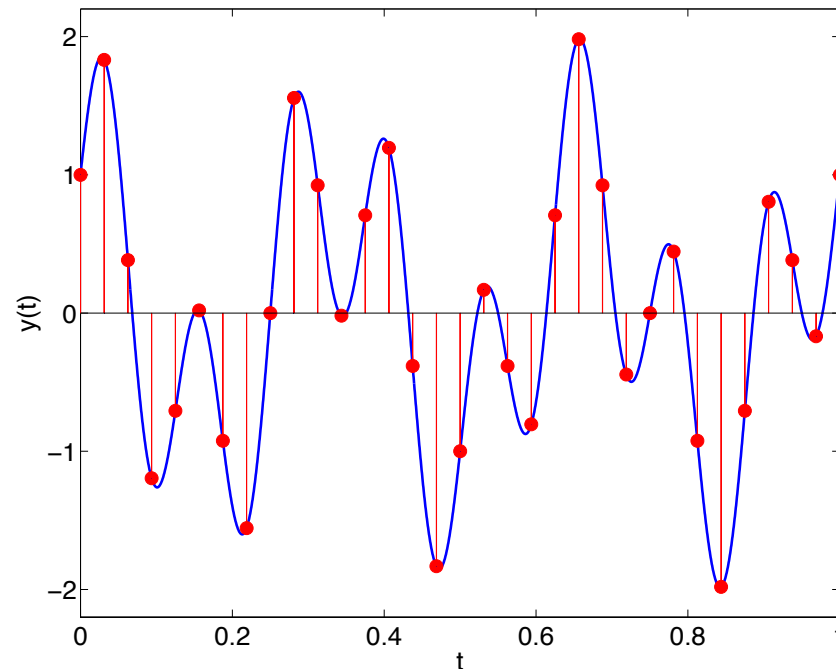
さまざまな方向からの光をランダムに絞り値(透過率)を変えながら集約し単一のセンサで沢山計測



下図: 従来比1/4のデータからの再構成画像

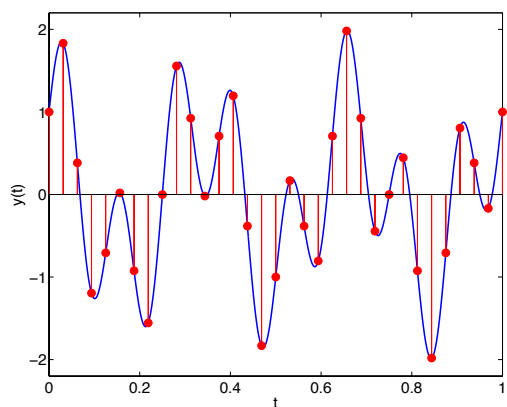
背景1: AD変換と標本化定理

- アナログ信号(連続時間信号) $y(t)$ を一定の時間間隔 T_s でサンプリングする(→AD変換).
- 得られたサンプル値 $y(nT_s)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) から原信号 $y(t)$ を完全に再構成できる条件は？



標本化定理

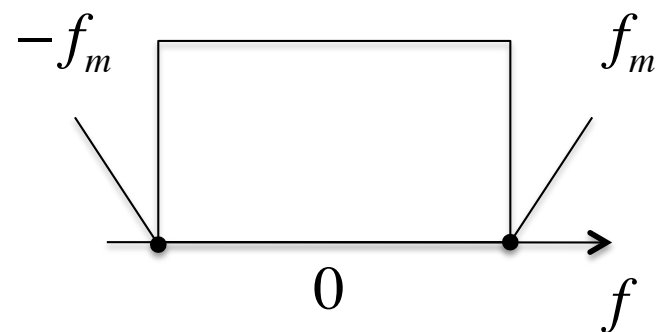
- 原信号をフーリエ変換した際に非ゼロの値を取る最大の周波数を f_m とする.
- サンプル周波数 $f_s = T_s^{-1}$ が $f_s > 2f_m$ を満たせばサンプル値 $y(nT_s)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) から任意の原信号をサンプル点以外も含めて完全に復元することが可能である.



フーリエ変換



原信号 $y(t)$ の周波数帯域

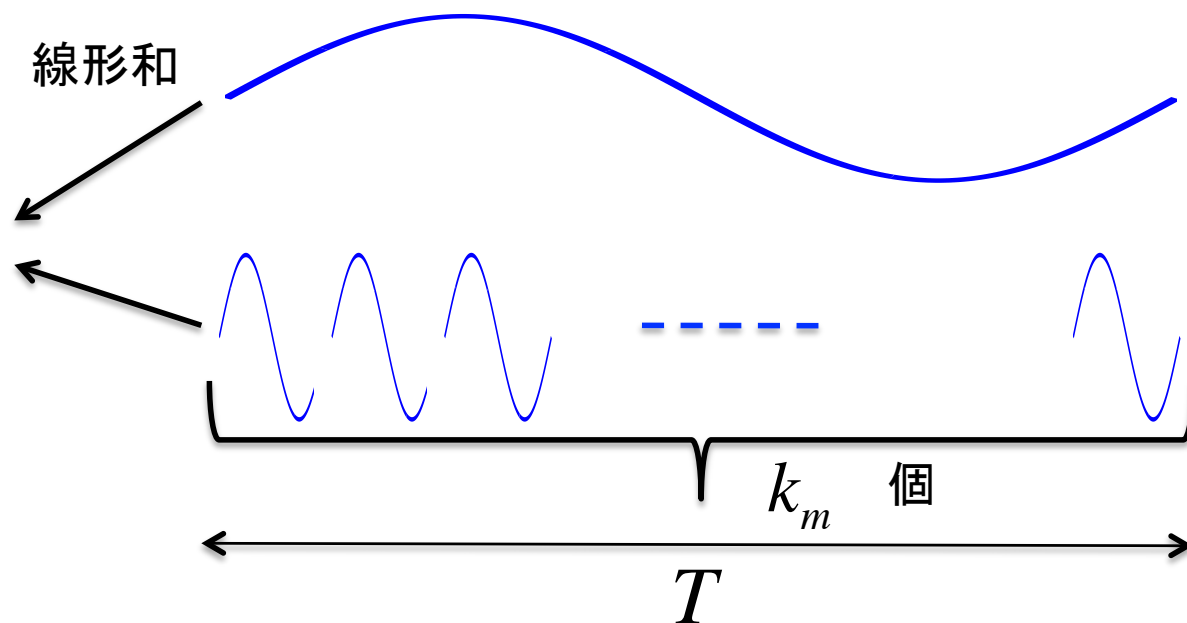
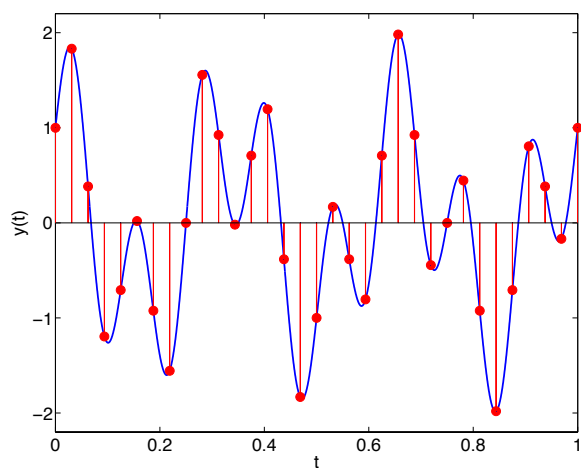


標本化定理の意味すること

- 原信号が周期 T の信号の場合を考える。
→ フーリエ級数展開できる。1周期内の最大波数を k_m とする

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{k_m} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right) \quad 2k_m + 1 \text{ 個ある}$$

- 信号 $y(t)$ を完全に同定する。
⇔ フーリエ係数 $\{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{k_{\max}}, b_{k_{\max}}\}$ がすべてわかる。



標本化定理の意味すること

- 等間隔のサンプリングはフーリエ係数間の独立な1次方程式を与える.

$$y(nT_s) = a_0 + \sum_{k=1}^{k_m} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi knT_s}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi knT_s}{T}\right) \right)$$

- 求めたい未知変数の数 = $2k_m + 1$.
- よって, 1周期の間に $2k_m + 1$ 点以上サンプリングすれば完全な信号復元は可能になる.

1次方程式の解が一意に定まる条件

方程式の数 \geq 未知変数の数

行列形式で書くと

周波数一定の三角関数

$$\begin{pmatrix} y\left(\frac{T}{2k_m+1}\right) \\ y\left(\frac{2T}{2k_m+1}\right) \\ y\left(\frac{3T}{2k_m+1}\right) \\ y\left(\frac{4T}{2k_m+1}\right) \\ \vdots \\ y\left(\frac{(2k_m+1)T}{2k_m+1}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\left(\frac{2\pi}{2k_m+1}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{2k_m+1}\right) & \cos\left(\frac{4\pi}{2k_m+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{2k_m\pi}{2k_m+1}\right) \\ 1 & \cos\left(\frac{2\pi \cdot 2}{2k_m+1}\right) & \sin\left(\frac{2\pi \cdot 2}{2k_m+1}\right) & \cos\left(\frac{4\pi \cdot 2}{2k_m+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{2k_m\pi \cdot 2}{2k_m+1}\right) \\ 1 & \cos\left(\frac{2\pi \cdot 3}{2k_m+1}\right) & \sin\left(\frac{2\pi \cdot 3}{2k_m+1}\right) & \cos\left(\frac{4\pi \cdot 3}{2k_m+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{2k_m\pi \cdot 3}{2k_m+1}\right) \\ 1 & \cos\left(\frac{2\pi \cdot 4}{2k_m+1}\right) & \sin\left(\frac{2\pi \cdot 4}{2k_m+1}\right) & \cos\left(\frac{4\pi \cdot 4}{2k_m+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{2k_m\pi \cdot 4}{2k_m+1}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \cos\left(\frac{2\pi \cdot (2k_m+1)}{2k_m+1}\right) & \sin\left(\frac{2\pi \cdot (2k_m+1)}{2k_m+1}\right) & \cos\left(\frac{4\pi \cdot (2k_m+1)}{2k_m+1}\right) & \cdots & \sin\left(\frac{2k_m\pi \cdot (2k_m+1)}{2k_m+1}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ b_{k_{\max}} \end{pmatrix}$$

$2k_m + 1$ 個のサンプル値

$(2k_m + 1) \times (2k_m + 1)$ 行列
(逆行列の存在が保証される)

$2k_m + 1$ 個の未知変数
(フーリエ係数)

標本化定理を得るためには

サンプリングレートで表現する

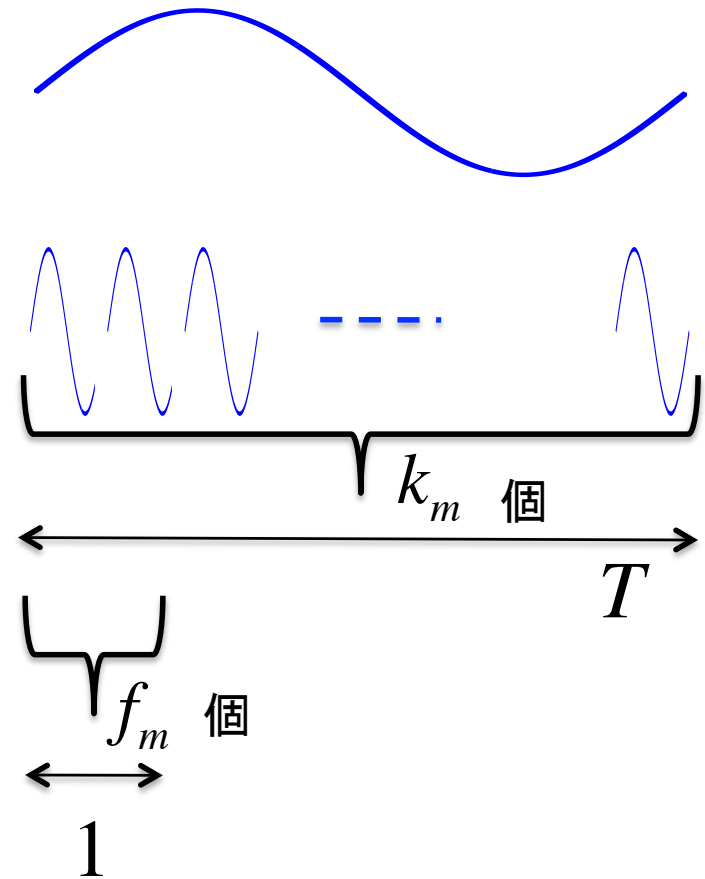
$$f_s > \frac{2k_m + 1}{T} \quad (\text{時間 } T \text{ の間に } 2k_m + 1 \text{ 個取る})$$

右図より

$$f_m = \frac{k_m}{T}$$

任意の信号を考えるため周期を無限大とする

$$f_s > \frac{2k_m + 1}{T} = 2f_m + \frac{1}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 2f_m$$



考察

- 標本化定理はフーリエ係数に関する1次方程式の解が一意に定まるための条件.

サンプル値
(わかるもの)

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}$$

フーリエ係数
(知りたいもの)

フーリエ基底
(知っているもの)

考察

- 以下は本質的ではない。
 - 等間隔のサンプリング
 - フーリエ係数の個数と同じ個数の独立なサンプル値さえあればよい
 - 行列がフーリエ基底であること
 - 可逆な行列を両辺に掛けても同じ
 - ウェーブレット基底でもよい。別の基底でもよい。直交基底である必要すらない。
 - より一般には「行列＝計測方法×基底」

計測結果

サンプル値の線形和を与える計測行列

$$\mathbf{y}' = M\mathbf{y} = M(F\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

- 今後は計測(センシング)の問題を以下で数理的に表現

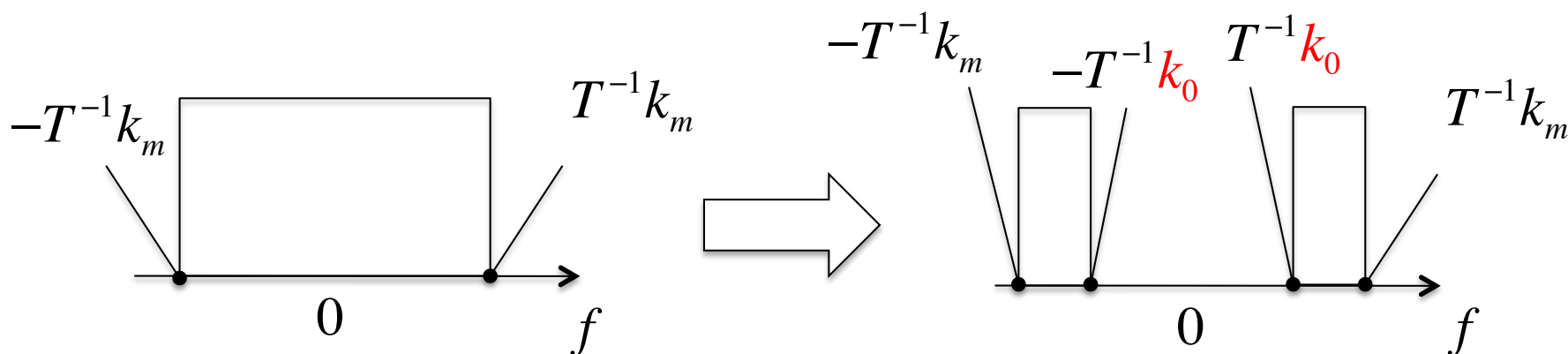
$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

背景2: 信号の統計性と疎表現

- 標本化定理の結果よりも少ないサンプル数で信号復元が可能な例は簡単に作ることができる.

$$y(nT_s) = \sum_{n=k_0}^{k_m} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi knT_s}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi knT_s}{T}\right) \right)$$

たとえば, 周波数の最小値の方にも制限を付ける

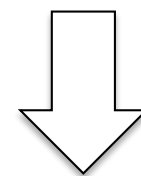


$2(k_m - k_0 + 1)$ 個のサンプルで信号復元が可能

数式で考えると

- 未知変数(フーリエ係数)の一部がゼロであると保証されている場合に対応

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x}_S$$



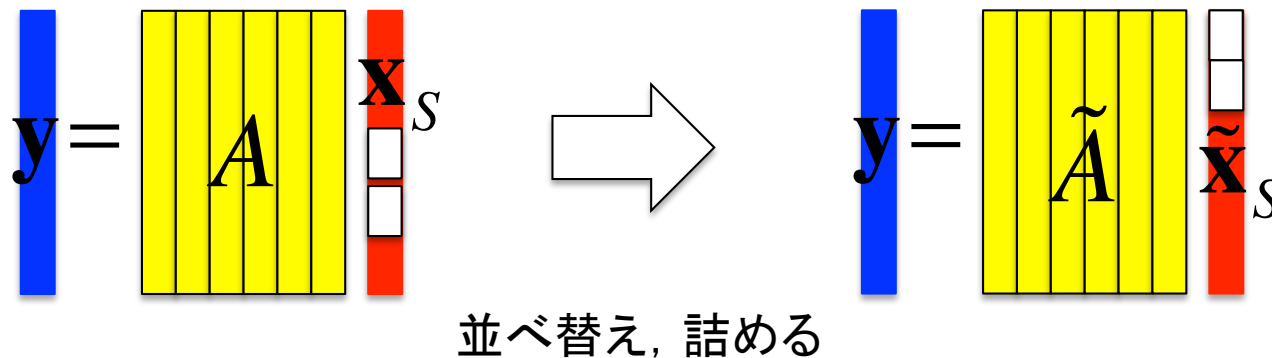
サンプル数が少なくて済む!

$$\mathbf{y}_S = \mathbf{A}_S^T \mathbf{y} = \mathbf{A}_S^T \mathbf{A}_S \mathbf{x}_S$$

A_S^T を掛ける

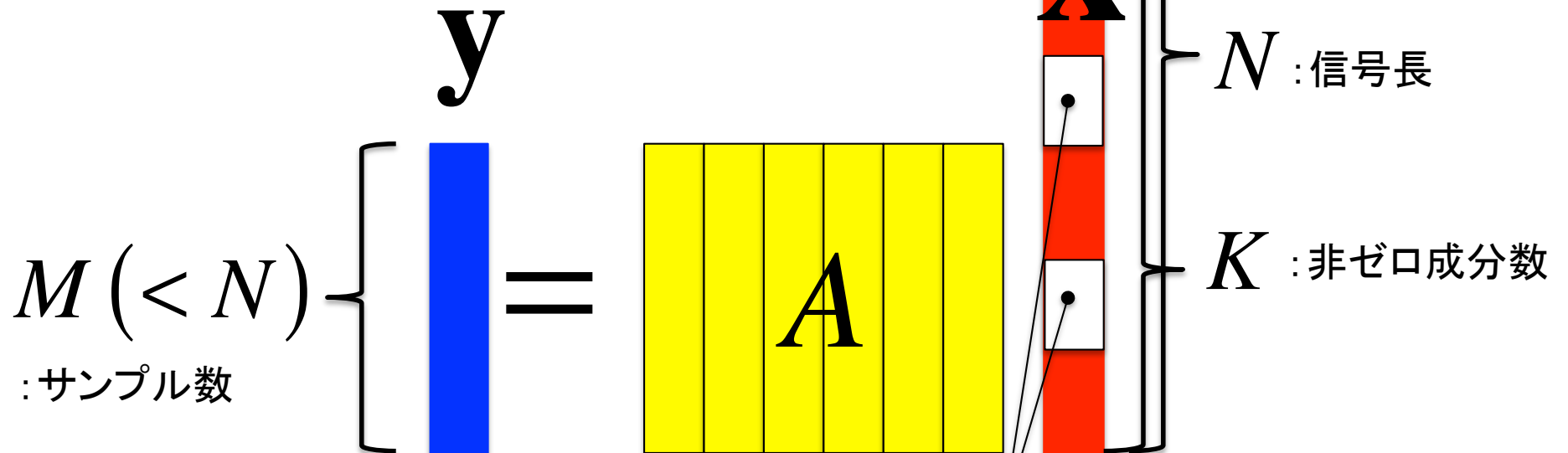
一般化する

- 多くの信号では高周波側がナイキスト周波数よりも低いところで、飛び飛びに、成分がゼロになっていることも多い。
 - とはいえ、ゼロになっている場所が既知だと先の例に帰着.



圧縮センシング

- では、ゼロの場所が未知の場合はどうなる？
- 圧縮センシングの問題
 - 適当な横長行列を掛けてサンプル数を少なくした状況から、ゼロの場所が未知のスパースな信号を復元する。



場所不明.
でも, ゼロ成分が多い
ことは分かっている

問題意識の背景

- 自然界, 人工物問わず多くの信号の高周波数成分ではゼロになる(ゼロとみなせる)ものが統計的に多い.
 - 音声, 画像, 地震波, ...
 - ナイキスト周波数以下の周波数をすべて考慮するのはもったいない.
 - ゼロ成分の周波数を適応的に見つけて少ないデータから効率的に信号復元ができないか?

論点

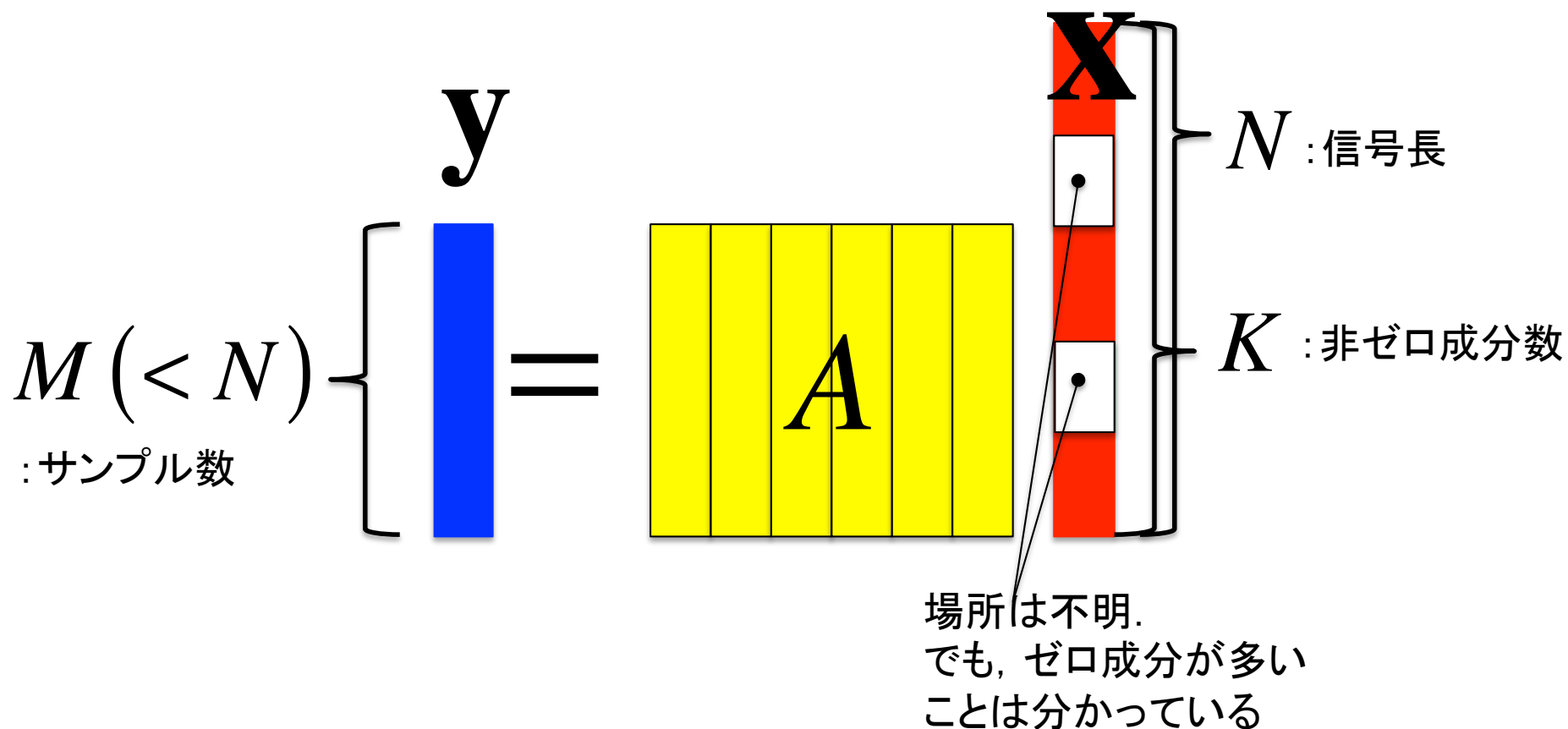
- アルゴリズムの開発
 - どのような方法で, 少ないサンプルから信号復元を行うか?
- ~~性能保証・性能解析~~
 - ~~非斉次1次方程式に関するスパース解の性質を探る.~~
 - ~~各アルゴリズムが信号復元できる条件を明らかにする.~~
- ~~応用・発展~~
 - ~~どういった問題に使うか~~
 - ~~どういった数理的発展があり得るか~~

時間の関係上, 本日はスキップ

信号復元の方法

劣決定1次方程式

- 圧縮センシングの問題は劣決定1次方程式で表現される。
 - 見かけの自由度よりも少ないサンプル数から信号復元するので。



正則化

- こうした問題を解く標準的な方法は、サンプル値による制約の下で、適当なコスト関数 $J(\mathbf{x})$ を最小化すること(=正則化)

$$(P_J): \min_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}) \text{ subj. to } \mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

– では、どのような $J(\mathbf{x})$ を使えばよいのか？

l_0 復元

- 答え：計算コストを考慮しなければ，どのような場合でも $J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_0$ (非ゼロ成分の個数) とするのが最良.

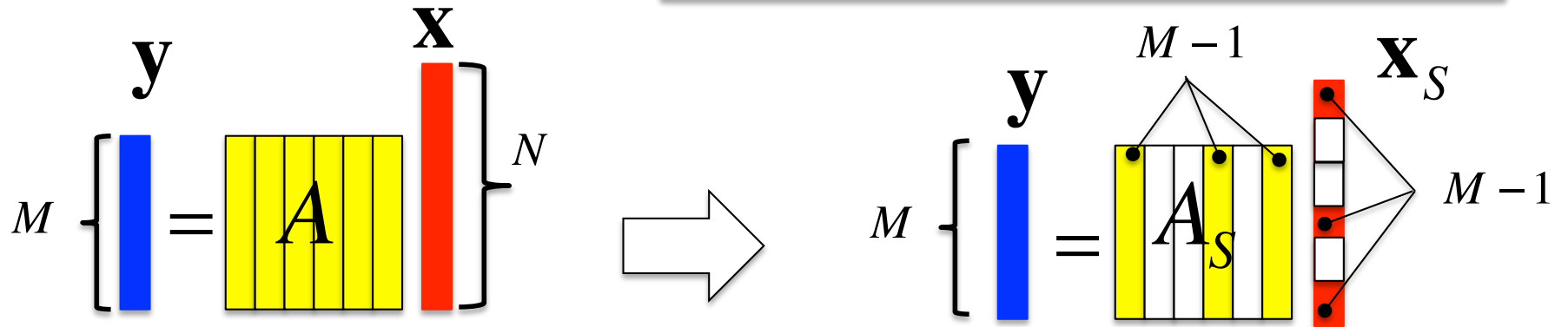
- 理由

- $M > K$ ならば必ず正しい解を復元することができる.
- $M \leq K$ ならば正しい復元は原理的に不可能.

l_0 復元アルゴリズム

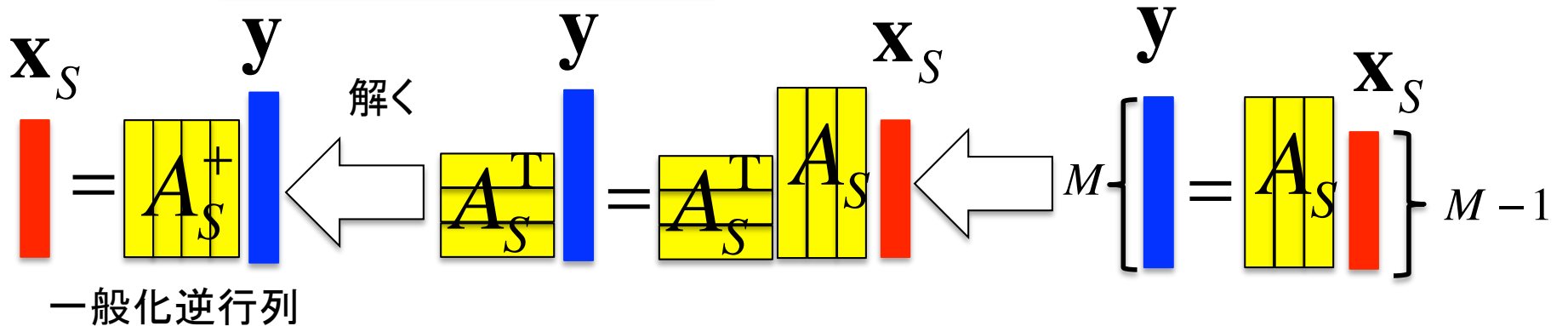
#任意の $M - 1$ 個の列ベクトルの
#組は線形独立であるとする。

$M - 1$ 個の非ゼロ成分の選び方 S すべて
に対して以下を行う



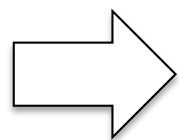
テストする
 $y - Ax_S = \mathbf{0}$ or not

並べ替え,
詰める



考察

- $K \leq M - 1$ ならば正しい解は必ず S の選び方の中に含まれる.
 - 正しい解は必ずテストに合格.
 - 他の解は必ずテストに不合格. } テストに合格した解が正しい解



$M > K \rightarrow I_0$ 復元は必ず成功する.

- ただし、残念ながらこの方法は計算量的に困難.
 - 必要計算量

$$O({}_N C_{M-1}) \sim O(\exp(\gamma N)) \quad \text{if } M \propto N$$

現実的解決法

- 貪欲法 (greedy algorithms)
 - すべての組合せの中で最良のサポートを選ぶのではなく, 1つずつ最良の候補を付け加えてサポートを構成する.
 - **Orthogonal Matching Pursuit (OMP)**, MP, Weak MP, LS-OMP, Iterative Hard Thresholding, ...
- 凸緩和法 (convex relaxation)
 - コスト関数を最適化が容易な, 凸関数で近似する.
 - **Basis Pursuit (BP)**(= l_1 復元), Iterated-Reweighted-Least-Squares (IRLS), Least Angle Regression (LARS)(=ホモトピー法), ...
- 確率推論 (probabilistic inference)
 - 統計的な推論を (近似的に) 行う
 - Approximate message passing (AMP), EM-BP, ...

貪欲法(Greedy Algorithms)

- 核となるアイデア
 - サンプルベクトル \mathbf{y} は行列 A の列ベクトル \mathbf{a}_i に関する線形和

The diagram shows a blue vertical bar representing vector \mathbf{y} on the left. To its right is a yellow matrix A with columns labeled $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$. To the right of the matrix is a vertical stack of colored segments representing coefficients x_1, x_2, \dots, x_N . The top segment is red, the middle is white, and the bottom is red. An equals sign follows, leading to the equation $x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_N \mathbf{a}_N$.

$$\mathbf{y} = \begin{matrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_N \\ \hline A \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{matrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_N \mathbf{a}_N$$

- \mathbf{y} を単一の列ベクトル \mathbf{a}_i の成分のみで近似することを考える.
- 最も良く近似するものからサポート S に加えていく.

Orthogonal Matching Pursuit (OMP)

- **Initialization:** Initialize $k = 0$, and set

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}, \mathbf{r}^0 = \mathbf{y} - A\mathbf{x}^0, S^0 = \phi$$

- **Main iteration:** Increment k by 1 and perform the followings:

- **Sweep:**

$$\epsilon(i) = \min_{x_i} |x_i \mathbf{a}_i - \mathbf{r}^{k-1}|^2 = |\mathbf{r}^{k-1}|^2 - \frac{(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}^{k-1})^2}{|\mathbf{a}_i|^2}$$

近似誤差の評価

- **Update Support:**

$$i_0 = \arg \min_{i \notin S^{k-1}} \{\epsilon(i)\}, S^k = S^{k-1} \cup \{i_0\}$$

サポートの更新

- **Update Provisional Solution:**

$$\hat{\mathbf{x}}^k = \arg \min_{\mathbf{x}_{S^k}} |\mathbf{y} - A_{S^k} \mathbf{x}_{S^k}|^2$$

サポート内での最良解

- **Update Residual:**

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{y} - A_{S^k} \hat{\mathbf{x}}^k$$

残差の評価

- **Stopping Rule:** Stop if $|\mathbf{r}^k| < \epsilon_0$ holds. Otherwise, apply another iteration.

考察

- 必要計算量: 最終的なサポートの大きさを k_0 とすると

$$O(MNk_0) \longleftarrow O(MN^{k_0} k_0^2)$$

OMP

大幅な削減 列挙法(厳密)

バリエーション

- **LS-OMP: Sweep** ステップで, 近似誤差 $\epsilon(i)$ をサポート候補 $S^{k-1} \cup \{i\}$ に対して評価
 - 計算コストは増大するが, より精密な評価.

- **MP: Update Provisional Solution** で $\hat{\mathbf{x}}^k = \hat{\mathbf{x}}^{k-1} + \frac{(\mathbf{a}_{i_0} \cdot \mathbf{r}^{k-1})}{|\mathbf{a}_{i_0}|^2} \mathbf{a}_{i_0}$

- サポート全体に対して解き直さないので手抜きをしている.

- **Weak-MP: Sweep** ステップで, $\epsilon(i)$ に関する最適化の手を抜く.

Stop the sweep when $\frac{(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}^{k-1})^2}{|\mathbf{a}_i|^2} \geq t |\mathbf{r}^{k-1}|^2 \quad (t \in [0,1])$

- すべてを評価するのではなく条件を満たせば途中で止める.

凸緩和法 (convex relaxation)

- 核となるアイデア
 - l_0 復元は離散最適化問題なので難しい。
→ 連続関数で近似すればよい。

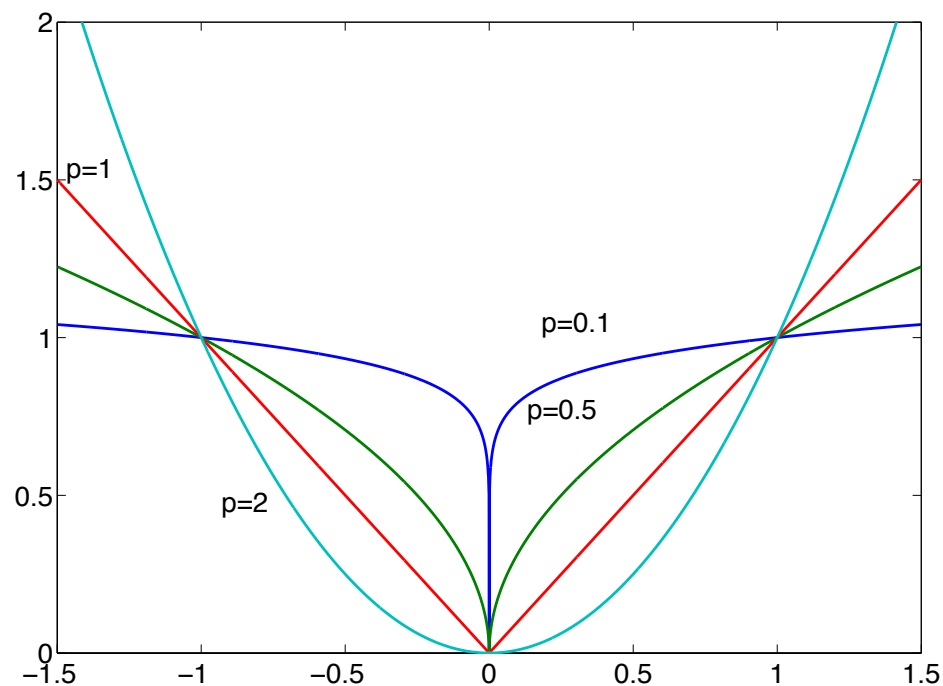
l_0 ノルム

$$\|\mathbf{x}\|_0 = \lim_{p \rightarrow +0} \sum_{i=1}^N |x_i|^p$$

l_p ノルム

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$|x|^p$ のグラフ



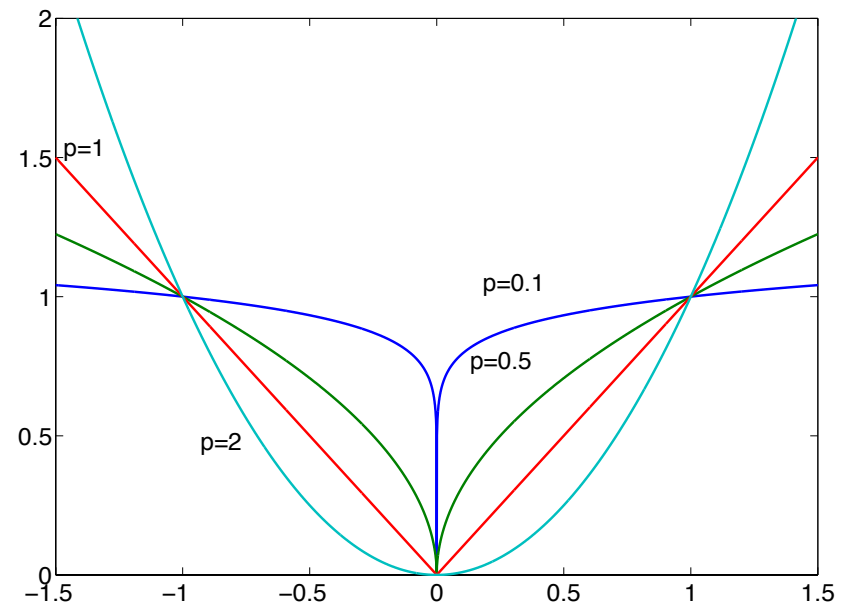
凸緩和法 (convex relaxation)

- その中でも凸関数になるものは都合がよい. $\rightarrow p \geq 1$
 - 最適化が容易である.
 - 解の唯一性が保証される.
 - 数理的な研究の蓄積があり汎用解法が充実.
- ただし, 解が l_0 の解と異なるのは困る. $\rightarrow p \leq 1$
 - スパースな最適解を持つこと: 必要.
- 有力な候補

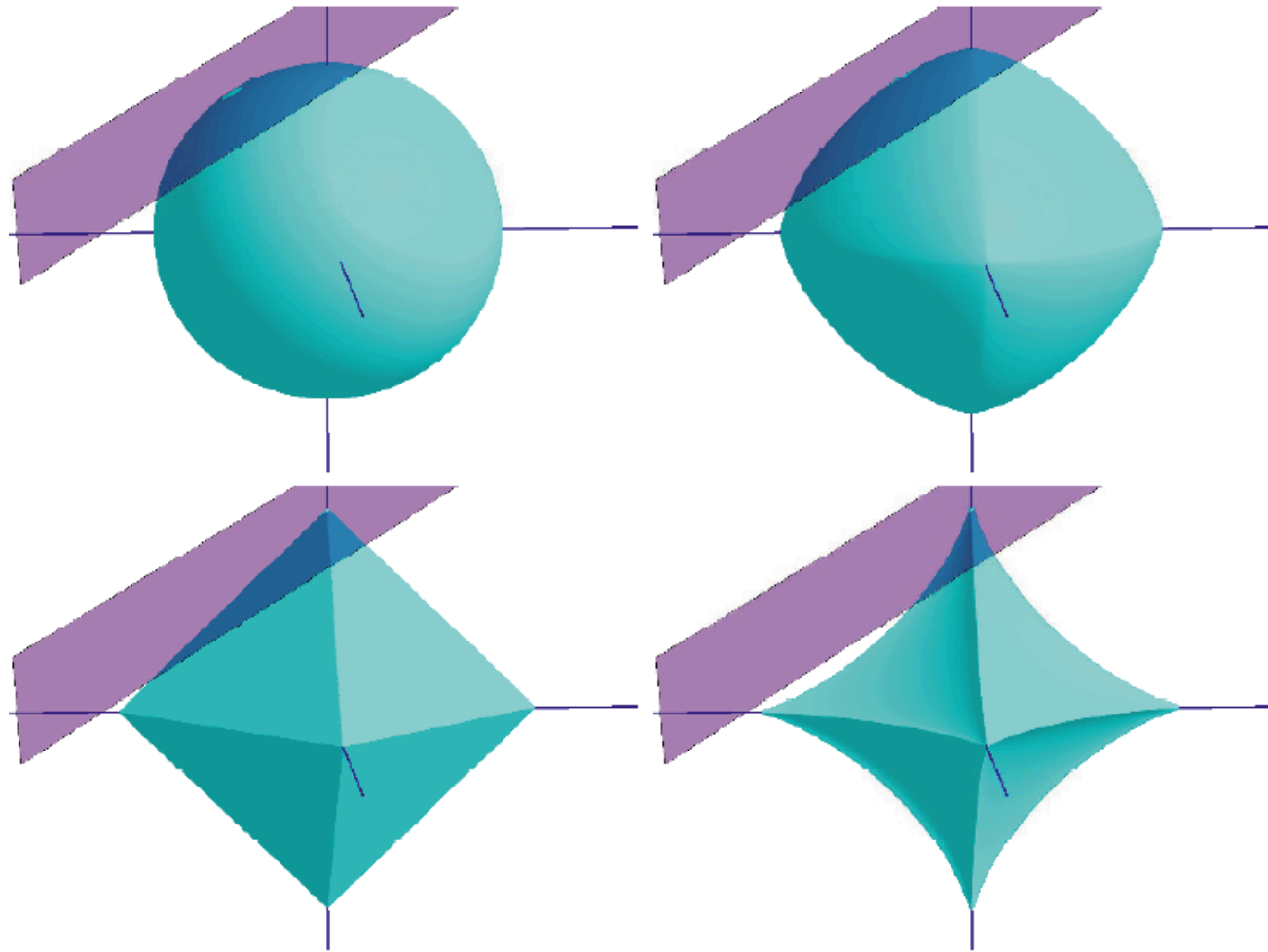
l_1 ノルム

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$$

$|x|^p$ のグラフ



ノルムと解の様子



紫色の平面:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

緑色の図形:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \text{const}$$

(l_p ボール)

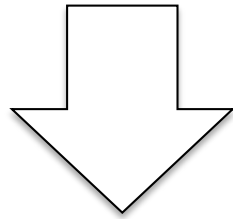
右上: $p > 1$

左下: $p = 1$

右下: $p < 1$

l_1 復元=Basis Pursuit (BP)

$$(P_0): \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \text{ subj. to } \mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

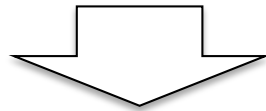


$$(P_1): \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ subj. to } \mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

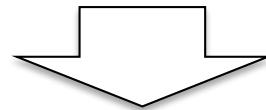
線形計画法への書き換え

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \begin{cases} \mathbf{u} : \mathbf{x} \text{の正成分はそのまま, 負成分をゼロ} \\ \mathbf{v} : \mathbf{x} \text{の正成分はゼロ, 負成分はその絶対値} \end{cases}$$

$$\mathbf{z} = [\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T]^T \in \mathbb{R}^{2N}$$



$$\|\mathbf{x}\|_1 = \mathbf{1}^T (\mathbf{u} + \mathbf{v}), \quad A\mathbf{x} = A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = [A, -A]\mathbf{z}$$



$$(P_1) \Leftrightarrow \min_{\mathbf{z}} \mathbf{1}^T \mathbf{z} \text{ subj. to } \mathbf{y} = [A, -A]\mathbf{z} \text{ and } \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$$

線形計画問題 (Linear Programming)

l_1 復元の解き方

- 様々なアルゴリズム, パッケージがあるので具体的な求解はそれらを利用する.
 - アルゴリズム
 - シンプレックス法, 内点法, ホモトピー法, etc.
 - パッケージ
 - LAPACK, GPLK, l1-magic, CVX, L1-LS, Sparselab, etc.
- 必要な計算量は $O(N^3)$ であることが保証される.
 - 内点法に対する証明.
 - 経験的にはシンプレックス法も速い.
- 解けた結果の l_0 解との関係は？
 - 「性能保証・性能評価の方法」の観点で研究されている.
 - 時間の関係上割愛

まとめ

- 圧縮センシングに関する数理的な話題(の一部)を紹介した.
 - 膨大かつ研究分野が多岐にわたり過ぎて全体を網羅するのは困難.
 - 他の話題や詳細については, 以下の文献等をご参照ください.
- 参考文献
 - M Elad, Sparse and Redundant Representations, Springer (2010)
 - ライス大学 Compressive Sensing Resources
<http://dsp.rice.edu/cs>
 - 平林晃, Compressed Sensing –基本原理と最新研究動向–, 信学技報, CAS2009-11, VLD2009-16, SIP2009-28, pp. 55-60 (2009)
 - 和田山正, 圧縮センシングにおける完全再現十分条件について, 日本神経回路学会誌 Vol. 17 No. 2, pp. 63–69 (2010)
 - 樺島祥介, 圧縮センシングへの統計力学的アプローチ, 日本神経回路学会誌 Vol. 17 No. 2, 70–78 (2010)
 - 田中利幸, 圧縮センシングの数理, IEICE Fundamentals Review Vol. 4 No. 1, pp. 39–47 (2012)
 - 三村和史, 圧縮センシング–疎情報の再構成とそのアルゴリズム –, RIMS 共同研究報告集, No.1803, pp. 26–56 (2012)
 - Kazunori Hayashi, Masaaki Nagahara, Toshiyuki Tanaka: A User's Guide to Compressed Sensing for Communications Systems. IEICE Transactions 96-B(3): 685-712 (2013)

おわりに

- 情報処理に関する従来の設計原理⇒「最小自乗法」
 - なぜ？→解析的に解けるから。
 - 計算機のない時代／能力の低い時代では唯一の現実的選択肢
- 圧縮センシングの背後にある状況の変化
 - 計算機が高速になり、廉価になった
→必ずしも「解析的に解けること」に頼らなくてもよくなった。
- 設計原理が変わりつつあることの反映
 - 現在は、従来「最小自乗法」にもとづいて作られてきた様々な基本的情報処理手法を「スパース性」を原理にしたものに書き換えている状況にある。
 - 基盤的、原理的な部分に関わる変革であり、限定的な分野での一時的な流行では終わらない可能性が高い。