Université de Reims Champagne Ardenne
UFR Sciences Exactes et Naturelles

Année universitaire 2013-2014
MA 0803 - Master 1

CM3

Espaces affines euclidiens : Paramétrages et équations dans l'espace

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. L'espace est ainsi identifié à $\mathbb{R}^3$. On note E l'espace vectoriel associé à $\mathcal{E}$.

1 Équations des droites et plans de l'espace

1.1 Définitions et rappels

Définition 1 *La droite affine $\mathcal{D}$ passant par le point A dirigée par le vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, soit :*

$$\mathcal{D} = \{M \ \mid \ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}\}.$$

On la note aussi $\mathcal{D} = A + Vect(\overrightarrow{u})$ et la droite vectorielle $D = Vect(\overrightarrow{u})$ est la direction de $\mathcal{D}$.

Proposition 2 *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de l'espace. Alors il y a trois possibilités :*

1. *$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ contient au moins deux points distincts, alors $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues.*
2. *$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{A\}$, alors $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un A. Elles sont alors aussi coplanaires.*
3. *$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$, alors il y a deux cas possibles :*
   - *(a) $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles et donc aussi coplanaires.*
   - *(b) $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles. Elles ne sont alors pas coplanaires.*

Définition 3 *Le plan affine $\mathcal{P}$ passant par le point A dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ est coplanaire avec $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, soit :*

$$\mathcal{P} = \{M \ \mid \ \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u_1} + \mu \overrightarrow{u_2}\}.$$

On le note aussi $\mathcal{P} = A + Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ et le plan vectoriel $P = Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est la direction de $\mathcal{P}$.

Proposition 4 *Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l'espace. Il y a alors trois possibilités :*

1. *$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont confondus.*
2. *$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite.*
3. *$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$, alors $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.*

Proposition 5 *Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Il y a trois cas possibles :*

1. *$\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ contient au moins deux points distincts, et alors $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.*
2. *$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{A\}$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants en A.*
3. *$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles.*

1.2 Paramétrage des droites et des plans de l'espace

Proposition 6 *Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ un point et $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ un vecteur. Alors la droite $\mathcal{D}$ de l'espace passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ a pour équations paramétriques :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_A + \lambda a \\ y & = & y_A + \lambda b \\ z & = & z_A + \lambda c \end{array} \right. \qquad \textit{où } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

L'ensemble des points de la droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$ ce qui explique les équations paramétriques de $\mathcal{D}$.

Remarque. Étant données les équations paramétriques d'une droite $\mathcal{D}$ (formule (**??**)), on a immédiatement un point de $\mathcal{D}$ (le point de coordonnées (x_A, y_A, z_A)) et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ (le vecteur de coordonnées (a, b, c)).

Proposition 7 *Soient un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs non colinéaire $\overrightarrow{u_1}(a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{u_2}(a_2, b_2, c_2)$. Alors le plan $\mathcal{P}$ de l'espace passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ a pour équations paramétriques :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_A + \lambda a_1 + \mu a_2 \\ y & = & y_A + \lambda b_1 + \mu b_2 \\ z & = & z_A + \lambda c_1 + \mu c_2 \end{array} \right. \qquad \textit{où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

L'ensemble des points de $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u_1} + \mu \overrightarrow{u_2}$ ce qui explique les équations paramétriques de $\mathcal{P}$.

Remarque. Étant données les équations paramétriques d'un plan $\mathcal{P}$ (formule (**??**)), on a immédiatement un point de $\mathcal{P}$ (le point de coordonnées (x_A, y_A, z_A)) et deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$ (les vecteurs de coordonnées (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2)).

1.3 Équations cartésiennes

Proposition 8

- *Tout plan $\mathcal{P}$ de l'espace admet une équation cartésienne du type $ax + by + cz + d = 0$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ vérifie $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.*
- *Réciproquement, toute équation du type $ax + by + cz + d = 0$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ vérifie $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, est l'équation d'un plan dont le vecteur normal est $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$.*

Remarques. Soit $\mathcal{P}$ le plan défini par un point A et deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ non colinéaires.

- Les points de $\mathcal{P}$ sont les points M tels que $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ soient coplanaires. On obtient donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ en développant l'équation $Det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{AM}) = 0$.
- $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$. Alors $Det(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{AM}) = 0 \Leftrightarrow \left\langle \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{AM} \right\rangle = 0$. Ainsi $\mathcal{P}$ est aussi défini comme le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$.

Proposition 9 *Soient deux plans non parallèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ et soit $\mathcal{D}$ la droite intersection de ces plans. Alors le vecteur $\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.*

Lorsqu'une droite $\mathcal{D}$ est définie comme intersection de deux plans, le système formé par les équations de ces plans définit alors la droite $\mathcal{D}$.

Proposition 10

- *Toute droite $\mathcal{D}$ de l'espace admet un système d'équations du type :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 & = & 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

  où $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathbb{R}^4$ et $(a_2, b_2, c_2, d_2) \in \mathbb{R}^4$ sont tels que (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) ne soient pas proportionnels.
- *Réciproquement tout système d'équations du type précédent définit une droite $\mathcal{D}$ de l'espace.*

2 Distances

Proposition 11 *Soit une droite $\mathcal{D}$ de l'espace, et soient A un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Alors pour tout point M de l'espace, la distance de M à $\mathcal{D}$ est*

$$d(M,\mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

Preuve. Notons H la projection orthogonale du point M sur la droite $\mathcal{D}$. La distance de M à la droite $\mathcal{D}$ est égale à $\|\overrightarrow{HM}\|$, et on a compte tenu de la colinéarité de $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{u}$:

$$\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{AH} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{HM}\| \cdot \|\overrightarrow{u}\|.$$

□

Proposition 12 *Soient deux droites $\mathcal{D}_1 = A_1 + Vect(\overrightarrow{u_1})$ et $\mathcal{D}_2 = A_2 + Vect(\overrightarrow{u_2})$ de l'espace. Si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, il existe une perpendiculaire commune et une seule aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, c'est-à-dire une droite Δ et une seule telle que :*

- *Δ est perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et est donc dirigée par le produit vectoriel $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$.*
- *Δ rencontre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ en deux points H_1 et H_2.*

Enfin, la distance de $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{D}_2$ est égale à H_1H_2 et on a :

$$d(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2) = H_1H_2 = \frac{\|[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{A_1A_2}]\|}{\|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\|}.$$

Preuve.

- *Existence et unicité de la perpendiculaire commune*

  Si une perpendiculaire commune Δ existe, elle appartient nécessairement :

  – au plan déterminé par $\mathcal{D}_1$ et Δ, c'est-à-dire au plan $\mathcal{P}_1 = A_1 + Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2})$,

  – au plan déterminé par $\mathcal{D}_2$ et Δ, c'est-à-dire au plan $\mathcal{P}_2 = A_2 + Vect(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2})$.

  C'est donc nécessairement l'intersection de ces deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, d'où son unicité.

  Réciproquement, considérons les deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ainsi définis. Ils ne sont pas parallèles, car sinon leurs directions $Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2})$ et $Vect(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2})$ seraient identiques et les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ coplanaires, ce qui est impossible car $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ étant non colinéaires, $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2})$ forme une base de E. Ces deux plans se coupent donc suivant une droite Δ et on vérifie que :

  – la direction de $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est l'intersection des directions de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, c'est-à-dire:

  $$Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}) \bigcap Vect(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}) = Vect(\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}).$$

  La direction de Δ est donc orthogonale à celles de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

  – la droite Δ coupe $\mathcal{D}_1$ en un point H_1 car Δ est dans le plan $\mathcal{P}_1$ et est orthogonale à $\mathcal{D}_1$.

  – la droite Δ coupe $\mathcal{D}_2$ en un point H_2 car Δ est dans le plan $\mathcal{P}_2$ et est orthogonale à $\mathcal{D}_2$.

- *Distance des deux droites*

  Considérons un point M_1 sur $\mathcal{D}_1$ et un point M_2 sur $\mathcal{D}_2$. Projetons orthogonalement M_2 en M sur le plan parallèle à $\mathcal{D}_2$ contenant $\mathcal{D}_1$, qui est orthogonal à la perpendiculaire commune H_1H_2. Le théorème de Pythagore donne :

  $$M_1M_2^2 = M_1M^2 + MM_2^2 \geq MM_2^2 = H_1H_2^2.$$

  Ainsi, H_1H_2 réalise une plus courte distance entre un point de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{D}_2$, et on a :

  $$\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right] = \left\langle \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{A_1A_2} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_2A_2} \right\rangle.$$

  Compte tenu de l'orthogonalité de $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ à $\overrightarrow{A_1H_1}$ et $\overrightarrow{H_2A_2}$, on obtient enfin :

  $$\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right]\right| = \left|\left\langle \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{H_1H_2} \right\rangle\right| = \|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\| \cdot H_1H_2.$$

□

Remarque. On déduit de ce résultat que les deux droites $\mathcal{D}_1 = A_1 + Vect(\overrightarrow{u_1})$ et $\mathcal{D}_2 = A_2 + Vect(\overrightarrow{u_2})$, qu'elles soient parallèles ou non, sont coplanaires si et seulement si $\left[\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = 0$.

Proposition 13 *La distance d'un point $M(x_M, y_M, z_M)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $ux + vy + wz + h = 0$ est égale à :*

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ux_M + vy_M + wz_M + h|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Preuve. La distance de M à $\mathcal{P} = A + Vect(\overrightarrow{n})^{\perp}$, avec $\overrightarrow{n}(u, v, w)$, est HM où H est la projection orthogonale du point M sur le plan $\mathcal{P}$ et on a :

- $\left|\left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{HM} \right\rangle\right| = \|\overrightarrow{n}\| \cdot \|\overrightarrow{HM}\|$ car ces vecteurs sont orthogonaux à $\mathcal{P}$, donc colinéaires.
- $\left|\left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{HM} \right\rangle\right| = |u(x_M - x_H) + v(y_M - y_H) + w(z_M - z_H)| = |ux_M + vy_M + wz_M + h|$, en utilisant le fait que $H \in \mathcal{P}$ et donc $ux_H + vy_H + wz_H + h = 0$.

Alors
$$d(M, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{HM}\| = \frac{\left|\left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{HM} \right\rangle\right|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|ux_M + vy_M + wz_M + h|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

□

3 Sphères

3.1 Équation d'une sphère

La sphère de centre A et de rayon $R \geq 0$ est l'ensemble des points M tels qu'on ait $AM = R$ et on la note $\mathcal{S}(A; R)$

Proposition 14 *Les sphères $\mathcal{S}$ sont les ensembles dont une équation est*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_A x - 2y_A y - 2z_A z + c = 0 \text{ avec } x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 \geq c.$$

Et dans ce cas, le point $A(x_A, y_A, z_A)$ est le centre de la sphère $\mathcal{S}$ et $\sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - c}$ son rayon.

Preuve. D'après la définition de la sphère de centre A et de rayon $R > 0$, on a :

$$M \in \mathcal{S}(A; R) \Leftrightarrow AM = R \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2.$$

La sphère $\mathcal{S}(A; R)$ a ainsi pour équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_A x - 2y_A y - 2z_A z + (x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - R^2) = 0.$$

On constate que $c = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - R^2$, ce qui implique $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 \geq c$.

Inversement, montrons que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x_A x - 2y_A y - 2z_A z + c = 0$, avec $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 \geq c$, est l'équation d'une sphère de centre $A(x_A, y_A, z_A)$. L'équation s'écrit aussi

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - c.$$

Donc

- si $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - c > 0$, on a la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - c}$
- si $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - c = 0$, on a l'ensemble réduit au seul point A.
- si $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - c < 0$, on a l'ensemble vide.

□

Proposition 15 *Si A et B sont deux points distincts de l'espace, l'ensemble des points M tels que l'angle $\widehat{AMB}$ soit droit, ou tels que $\left\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$, est la sphère de diamètre AB.*

Preuve. Notons I le milieu du segment AB et considérons un repère orthonormé dont l'axe Ix est porté par (AB) de sorte que A et B ont pour coordonnées $(\pm a, 0, 0)$.
L'ensemble des points M tels que l'angle $\widehat{AMB}$ est droit a pour équation :

$$\left\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right\rangle = (x+a)(x-a) + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

C'est la sphère de centre I et de rayon a, c'est-à-dire la sphère de diamètre AB. □

3.2 Plan tangent

Définition 16

- *On appelle plan tangent en P à la sphère $\mathcal{S}(A; R)$ le plan passant par P et perpendiculaire au rayon AP. Son équation est donné par la relation $\left\langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PM} \right\rangle = 0$.*
- *On appelle tangente en P à la sphère $\mathcal{S}(A; R)$ toute droite passant par P et perpendiculaire au rayon AP. Les tangentes en P à la sphère sont ainsi les droites qui passent par P et qui sont incluses dans le plan tangent en P.*

Remarques.

- Un plan est tangent à la sphère si et seulement s'il est à la distance R du centre A.
- Une droite est tangente à la sphère si et seulement si elle est à la distance R du centre A.

3.3 Intersections

Proposition 17 *Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre A et de rayon R, et soit $\mathcal{P}$ un plan. On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. L'intersection de $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{P}$ est alors donnée par :*

1. *si $d(A, \mathcal{P}) > R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.*
2. *si $d(A, \mathcal{P}) = R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \{H\}$.*
3. *si $d(A, \mathcal{P}) < R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est le cercle inclus dans $\mathcal{P}$, de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - (d(A, \mathcal{P}))^2}$.*

Proposition 18 *Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre A et de rayon R, et soit $\mathcal{D}$ une droite. On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. L'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{D}$ est alors donnée par :*

1. *si $d(A, \mathcal{D}) > R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.*
2. *si $d(A, \mathcal{D}) = R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \{H\}$.*
3. *si $d(A, \mathcal{D}) < R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \{H_1, H_2\}$, où H_1 et H_2 sont les points de $\mathcal{D}$ situés à une distance égale $\sqrt{R^2 - (d(A, \mathcal{D}))^2}$ de H.*

Proposition 19 *L'intersection de deux sphères non concentriques est soit vide, soit réduite à un point, soit égale à un cercle.*