ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LÉON CHARVE

# De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série*, tome 11 (1882), p. 119-134

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1882_2_11__119_0>

DE LA

# RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES QUATERNAIRES POSITIVES,

PAR M. LÉON CHARVE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.

Je me propose d'appliquer aux formes quadratiques quaternaires positives la méthode de réduction donnée par M. Selling (*Journal de Borchardt,* t. LXXVII, et *Journal de M. Resal,* 3e série, t. III), pour les formes quadratiques ternaires positives. Dans un travail inséré au supplément du tome VIII des *Annales de l'École Normale,* année 1880, j'ai reproduit la méthode très remarquable de M. Selling et j'ai fait ensuite l'étude des substitutions qui conduisent à la réduite équivalente à une forme donnée.

Je vais reprendre pour les formes quaternaires la même méthode et la même étude.

Je montrerai d'abord qu'*il y a toujours une et une seule forme réduite équivalente à une forme donnée;* je montrerai ensuite que *la réduction peut toujours être obtenue par l'emploi répété de deux substitutions seulement.*

1. Soit

$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 + 2Exy + 2Fxz + 2Gxt + 2Hyz + 2Kyt + 2Lzt$$

une forme quadratique quaternaire que je suppose positive et dans laquelle les coefficients A, B, ..., K, L sont quelconques, rationnels ou irrationnels.

Si dans la forme $f$ on remplace $x, y, z, t$ par les valeurs fournies par la substitution

$$
(1)\qquad \begin{cases} x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z + \alpha''' T, \\ y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z + \beta''' T, \\ z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z + \gamma''' T, \\ t = \delta X + \delta' Y + \delta'' Z + \delta''' T, \end{cases}
$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \gamma''', \delta'''$ sont des nombres entiers, on obtiendra une forme

$$
\begin{aligned} F = {} & A'X^2 + B'Y^2 + C'Z^2 + D'T^2 + 2E'XY + 2F'XZ + 2G'XT \\ & + 2H'YZ + 2K'YT + 2L'ZT, \end{aligned}
$$

qui sera équivalente à la forme $f$ si le déterminant de la substitution est égal à $\pm 1$.

2. Cela posé, introduisons dans $f$ une cinquième variable $u$, en remplaçant $x, y, z, t$ respectivement par $x-u, y-u, z-u, t-u$, on obtiendra une forme qu'on peut écrire

$$
\begin{aligned} \varphi = {} & a(x-y)^2 + b(x-z)^2 + c(x-t)^2 + d(x-u)^2 + e(y-z)^2 + f(y-t)^2 \\ & + g(y-u)^2 + h(z-t)^2 + k(z-u)^2 + l(t-u)^2, \end{aligned}
$$

dans laquelle $a, b, \ldots, k, l$ ont des relations faciles à établir avec A, B, ..., K, L, et qui devient identique à $f$ quand on fait $u = 0$.

Et de même, si nous introduisons dans F une cinquième variable U en changeant X, Y, Z, T, respectivement en $X-U$, $Y-U$, $Z-U$, $T-U$, nous obtiendrons une forme

$$
\begin{aligned} \Phi = {} & a'(X-Y)^2 + b'(X-Z)^2 + c'(X-T)^2 + d'(X-U)^2 + e'(Y-Z)^2 \\ & + f'(Y-T)^2 + g'(Y-U)^2 + h'(Z-T)^2 + k'(Z-U)^2 + l'(T-U)^2, \end{aligned}
$$

et il est évident que l'on passerait directement de $\varphi$ à $\Phi$ en posant

$$
(2)\qquad \begin{cases} x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z + \alpha''' T + \alpha^{\text{iv}} U, \\ y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z + \beta''' T + \beta^{\text{iv}} U, \\ z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z + \gamma''' T + \gamma^{\text{iv}} U, \\ t = \delta X + \delta' Y + \delta'' Z + \delta''' T + \delta^{\text{iv}} U, \\ u = 0. \end{cases}
$$

les quantités $\alpha^{\text{IV}}$, $\beta^{\text{IV}}$, $\gamma^{\text{IV}}$, $\delta^{\text{IV}}$ étant définies par les relations

$$\begin{gathered}
\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\alpha^{\text{IV}}=0,\\
\beta+\beta'+\beta''+\beta'''+\beta^{\text{IV}}=0,\\
\gamma+\gamma'+\gamma''+\gamma'''+\gamma^{\text{IV}}=0,\\
\delta+\delta'+\delta''+\delta'''+\delta^{\text{IV}}=0,
\end{gathered}$$

et, comme $x, y, z, t$ n'entrent dans $\varphi$ que par leurs différences, la substitution (2) est équivalente à la substitution

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
x&=\alpha_1 X+\alpha_2 Y+\alpha_3 Z+\alpha_4 T+\alpha_5 U,\\
y&=\beta_1 X+\beta_2 Y+\beta_3 Z+\beta_4 T+\beta_5 U,\\
z&=\gamma_1 X+\gamma_2 Y+\gamma_3 Z+\gamma_4 T+\gamma_5 U,\\
t&=\delta_1 X+\delta_2 Y+\delta_3 Z+\delta_4 T+\delta_5 U,\\
u&=\varepsilon_1 X+\varepsilon_2 Y+\varepsilon_3 Z+\varepsilon_4 T+\varepsilon_5 U,
\end{aligned}\right.$$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ sont liés à $\alpha, \alpha', \ldots, \delta'', \delta'''$, par les relations suivantes :

$$\begin{array}{llll}
\alpha=\alpha_1-\varepsilon_1, & \beta=\beta_1-\varepsilon_1, & \gamma=\gamma_1-\varepsilon_1, & \delta=\delta_1-\varepsilon_1,\\
\alpha'=\alpha_2-\varepsilon_2, & \beta'=\beta_2-\varepsilon_2, & \gamma'=\gamma_2-\varepsilon_2, & \delta'=\delta_2-\varepsilon_2,\\
\alpha''=\alpha_3-\varepsilon_3, & \beta''=\beta_3-\varepsilon_3, & \gamma''=\gamma_3-\varepsilon_3, & \delta''=\delta_3-\varepsilon_3,\\
\alpha'''=\alpha_4-\varepsilon_4, & \beta'''=\beta_4-\varepsilon_4, & \gamma'''=\gamma_4-\varepsilon_4, & \delta'''=\delta_4-\varepsilon_4,\\
\alpha^{\text{IV}}=\alpha_5-\varepsilon_5, & \beta^{\text{IV}}=\beta_5-\varepsilon_5, & \gamma^{\text{IV}}=\gamma_5-\varepsilon_5, & \delta^{\text{IV}}=\delta_5-\varepsilon_5,
\end{array}$$

de sorte que les coefficients de l'une des lignes, par exemple $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$, restent complètement arbitraires.

Nous pourrons donc remplacer la forme $f$ et toutes les formes équivalentes par des formes à cinq variables; nous passerons d'une forme à une autre par des substitutions analogues à la substitution (3); il est d'ailleurs toujours facile de revenir de la substitution (3) à la substitution (1) : il suffit de retrancher des coefficients de chacune des lignes les coefficients de la cinquième et de faire ensuite $u=0$, $U=0$. On voit donc que la substitution (3) donnera une forme $\Phi$ équivalente à $\varphi$, toutes les fois que la substitution (1) aura son déterminant égal à $\pm 1$.

3. Considérons donc la forme

$$\begin{aligned}
\varphi = {} & a(x-y)^2+b(x-z)^2+c(x-t)^2+d(x-u)^2+e(y-z)^2+f(y-t)^2\\
& +g(y-u)^2+h(z-t)^2+k(z-u)^2+l(t-u)^2;
\end{aligned}$$

je dirai que cette forme est *réduite*, si elle satisfait à l'une des trois conditions suivantes, que j'ai publiées l'an dernier dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

1° *Ou bien tous les coefficients* $a, b, \ldots, k, l$ *sont positifs;*

2° *Ou bien* $a$ *est seul négatif et il est inférieur en valeur absolue à* $b$, $c, d, e, f, g$;

3° *Ou bien* $a$ *et* $h$ *sont seuls négatifs, de plus* $a$ *est inférieur en valeur absolue à* $b, c, d, e, f, g$; *en même temps* $h$ *est inférieur en valeur absolue à* $b, c, e, f, k, l$; *enfin* $a+h$ *est inférieur en valeur absolue à* $b, c, e, f$.

Ces conditions peuvent s'énoncer ainsi :

1° *Ou bien tous les coefficients sont positifs.*

2° *Ou bien un seul est négatif et il est inférieur en valeur absolue aux six coefficients qui multiplient des différences contenant une des deux lettres de la différence dont le coefficient est négatif.*

3° *Ou bien deux coefficients sont négatifs et deux seulement. De plus, les différences multipliées par ces deux coefficients n'ont aucune lettre commune; chacun d'eux est inférieur en valeur absolue aux six coefficients des différences qui ont une lettre commune avec la différence multipliée par ce coefficient négatif. Enfin la somme de ces deux coefficients négatifs est inférieure en valeur absolue à l'un quelconque des quatre coefficients des différences formées avec deux des quatre lettres contenues dans les deux différences dont les coefficients sont négatifs.*

Pour que cette définition de la *réduite* soit précise, il faut démontrer : 1° qu'il y a toujours une forme équivalente à la forme donnée et vérifiant l'une des trois conditions précédentes; 2° que cette forme est unique ([1]), par quoi il faut bien entendre que, si l'on trouve une forme vérifiant l'une des conditions de réduction, il n'existera aucune forme équivalente satisfaisant soit à cette première condition, soit à l'une des deux autres.

4. Je commence par démontrer que la *réduite ainsi définie existe toujours*.

---

([1]) Nous considérerons comme identiques les formes qu'on déduit d'une forme donnée par la permutation des variables.

Je dis que si, parmi les formes équivalentes à une forme donnée, on choisit celle pour laquelle la somme des coefficients

$$a+b+c+d+e+f+g+h+k+l$$

est la plus petite possible, cette forme vérifie l'une des conditions de réduction.

Supposons en effet que $\varphi$ soit cette forme pour laquelle la somme des coefficients est minima; si cette forme $\varphi$ a quelque coefficient négatif, une permutation des variables permet toujours de supposer que $a$ est négatif; faisons alors la substitution

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{T}-\mathrm{Z}, \\ y &= \mathrm{X}-\mathrm{U}, \\ z &= \mathrm{Y}-\mathrm{U}, \\ t &= \mathrm{T}-\mathrm{U}, \\ u &= 0, \end{aligned}$$

nous aurons la transformée

$$\begin{aligned} \Phi = {} & a(\mathrm{T}-\mathrm{Z}-\mathrm{X}+\mathrm{U})^2 + b(\mathrm{T}-\mathrm{Z}-\mathrm{Y}+\mathrm{U})^2 + c(\mathrm{Z}-\mathrm{U})^2 + d(\mathrm{Z}-\mathrm{T})^2 \\ & + e(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2 + f(\mathrm{X}-\mathrm{T})^2 + g(\mathrm{X}-\mathrm{U})^2 + h(\mathrm{Y}-\mathrm{T})^2 \\ & + k(\mathrm{Y}-\mathrm{U})^2 + l(\mathrm{T}-\mathrm{U})^2, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \Phi = {} & e(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2 - a(\mathrm{X}-\mathrm{Z})^2 + (a+f)(\mathrm{X}-\mathrm{T})^2 + (a+g)(\mathrm{X}-\mathrm{U})^2 - b(\mathrm{Y}-\mathrm{Z})^2 \\ & + (h+b)(\mathrm{Y}-\mathrm{T})^2 + (k+b)(\mathrm{Y}-\mathrm{U}) + (a+b+d)(\mathrm{Z}-\mathrm{T})^2 \\ & + (a+b+c)(\mathrm{Z}-\mathrm{U})^2 + (l-a-b)(\mathrm{T}-\mathrm{U})^2, \end{aligned}$$

et la somme des coefficients de $\Phi$ surpasse de

$$a+b$$

la somme des coefficients de $\varphi$; si donc $a+b$ est négatif, $\varphi$ n'est pas, contrairement à l'hypothèse, la forme pour laquelle la somme des coefficients est minima.

Donc non seulement $b$ doit être positif, mais encore supérieur à la valeur absolue de $a$; et la même chose peut être dite de $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, car une permutation des variables permet toujours d'amener l'une de ces lettres à la seconde place, pendant que $a$ reste à la première.

Donc, outre $a$, les seuls coefficients qui puissent être encore négatifs sont $h$, $k$, $l$; s'ils ne sont pas tous positifs ou nuls, on peut toujours supposer que $h$ est négatif, et si alors on amène $h$ à la première place par une permutation des variables, la démonstration précédente montrera que $k$ et $l$ doivent être positifs, et que de plus $h$ doit être inférieur en valeur absolue à $b$, $c$, $e$, $f$, $k$, $l$.

Par conséquent, dans la forme, dont la somme des coefficients est minima, il ne peut y avoir au plus que deux coefficients négatifs, savoir $a$ et $h$, et ces coefficients, déjà limités comme on vient de le voir, le sont encore par les considérations suivantes.

5. Faisons dans $\varphi$ la substitution

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Y} - \mathrm{X}, \\ y &= \mathrm{U} - \mathrm{T}, \\ z &= \mathrm{U} - \mathrm{Z}, \\ t &= \mathrm{Y} - \mathrm{T}, \\ u &= 0, \end{aligned}$$

nous obtiendrons la transformée

$$\begin{gathered} a(\mathrm{Y}-\mathrm{X}-\mathrm{U}+\mathrm{T})^2+b(\mathrm{Y}-\mathrm{X}-\mathrm{U}+\mathrm{Z})^2+c(\mathrm{X}-\mathrm{T})^2+d(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2+e(\mathrm{Z}-\mathrm{T})^2 \\ +f(\mathrm{Y}-\mathrm{U})^2+g(\mathrm{T}-\mathrm{U})^2+h(\mathrm{U}-\mathrm{Z}-\mathrm{Y}+\mathrm{T})^2+k(\mathrm{Z}-\mathrm{U})^2+l(\mathrm{Y}-\mathrm{T})^2, \end{gathered}$$

qu'on peut écrire

$$\begin{gathered} (a+b+d)(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2+b(\mathrm{X}-\mathrm{Z})^2+(a+c)(\mathrm{X}-\mathrm{T})^2-(a+b)(\mathrm{X}-\mathrm{U})^2 \\ -(b+h)(\mathrm{Y}-\mathrm{Z})^2+(h+l-a)(\mathrm{Y}-\mathrm{T})^2+(a+b+h+f)(\mathrm{Y}-\mathrm{U})^2 \\ +(e+h)(\mathrm{Z}-\mathrm{T})^2+(b+h+k)(\mathrm{Z}-\mathrm{U})^2+(a+g-h)(\mathrm{T}-\mathrm{U})^2 \end{gathered}$$

et la somme des coefficients de cette dernière forme surpasse la somme des coefficients de $\varphi$ de la quantité

$$a+h+b.$$

Donc, pour que la somme des coefficients de $\varphi$ soit en effet minima, il est nécessaire, si $a$ et $h$ sont négatifs, qu'en valeur absolue $a+h$ soit inférieur à $b$, c'est-à-dire à l'un quelconque des coefficients des différences autres que $x-y$ et $z-t$ qu'on peut former avec les quatre lettres $x$, $y$, $z$, $t$. En d'autres termes, il faut que $a+h$ soit inférieur en valeur absolue à $b$, $c$, $e$, $f$.

Il est donc maintenant démontré que si, parmi les formes équivalentes à une forme donnée, on choisit la forme dont la somme des coefficients est minima, cette forme vérifiera toujours l'une des conditions de réduction.

6. On voit en outre qu'on pourra toujours parvenir à une forme dont les coefficients vérifient les conditions de réduction en employant les substitutions qui permutent les variables et aussi les deux substitutions

$$\begin{aligned} x &= T - Z, \qquad & x &= Y - X,\\ y &= X - U, & y &= U - T,\\ z &= Y - U, & z &= U - Z,\\ t &= T - U, & t &= Y - T,\\ u &= 0, & u &= 0, \end{aligned}$$

car leur emploi permet de réduire indéfiniment la somme des coefficients des formes qui ne satisfont pas aux conditions de réduction. Nous reviendrons plus loin (n° 8) sur ce sujet.

7. Je vais enfin démontrer que, abstraction faite des permutations possibles entre les variables $x, y, z, t, u$, *il n'existe qu'une seule forme capable de vérifier l'une des conditions de réduction*.

La démonstration résultera de ce que toute substitution appliquée à une telle forme augmente nécessairement la somme des coefficients, à moins qu'elle ne produise qu'une permutation des variables; de sorte que, si deux formes équivalentes non identiques étaient en même temps réduites, la somme des coefficients augmenterait en passant, soit de la première à la seconde, soit de la seconde à la première, ce qui est évidemment impossible.

Pour le prouver, je remarque d'abord que la somme $a+b+\ldots+k+l$ des coefficients est égale à la moitié de la somme des coefficients de $x^2$, $y^2$, $z^2$, $t^2$, $u^2$, lorsqu'on développe les différences contenues dans $\varphi$.

Je partage maintenant la démonstration en trois parties correspondant aux trois conditions de réduction :

1° Je suppose que la forme $\varphi$ vérifie la première des conditions de réduction, c'est-à-dire que tous les coefficients soient positifs.

Soit une forme $\Phi$ équivalant à $\varphi$ et ne s'en déduisant pas par une permutation des variables. La substitution qui permet de passer de $\varphi$ à $\Phi$ remplace alors certaines différences par des expressions contenant plus de deux lettres. Supposons que $x-y$ soit, par exemple, remplacé par $x+y-z-t$; alors, au lieu de $a(x-y)^2$, on aura

$$a(x+y-z-t)^2,$$

et, quand on fera la somme des coefficients de $x^2, y^2, z^2, t^2, u^2$, la quantité $a$ entrera quatre fois dans cette somme au lieu de n'y entrer que deux fois; la somme des coefficients sera donc augmentée.

Ainsi, pour que la somme des coefficients n'augmente pas par l'emploi d'une substitution, il est nécessaire que toute différence dont le coefficient n'est pas nul, c'est-à-dire toute différence entrant effectivement dans $\varphi$, soit remplacée par une différence, ce qui exige que la substitution se réduise à une permutation des variables $x, y, z, t, u$.

2° Supposons que la forme $\varphi$ vérifie la seconde des conditions de réduction, c'est-à-dire que le coefficient $a$ soit seul négatif et inférieur en valeur absolue à $b, c, d, e, f, g$.

De l'identité

$$(x+y-z-t)^2 = -(x-y)^2-(z-t)^2+(x-z)^2+(x-t)^2+(y-z)^2+(y-t)^2,$$

on tire

$$(x-y)^2 = -(x+y-z-t)^2-(z-t)^2+(x-z)^2+(x-t)^2+(y-z)^2+(y-t)^2,$$

et, par conséquent, si nous posons $a=-a'$, la forme $\varphi$ deviendra

$$\begin{aligned}&a'(x+y-z-t)^2+(b-a')(x-z)^2+(c-a')(x-t)^2\\&\quad+d(x-u)^2+(e-a')(y-z)^2+(f-a')(y-t)^2+g(y-u)^2\\&\quad+(h+a')(z-t)^2+k(z-u)^2+l(t-u)^2,\end{aligned}$$

et, introduisant des coefficients $b', c', d', e', f', g', h', k', l'$, nous écrirons cette forme

$$\begin{aligned}\varphi' = {}&a'(x+y-z-t)^2+b'(x-z)^2+c'(x-t)^2+d'(x-u)^2\\&+e'(y-z)^2+f'(y-t)^2+g'(y-u)^2\\&+h'(z-t)^2+k'(z-u)^2+l'(t-u)^2,\end{aligned}$$

où tous les coefficients $a', b', \ldots, k', l'$ sont positifs. De plus, $d', g'$ et $h'$ sont tous trois supérieurs à $a'$.

Faisons maintenant une substitution S quelconque; si cette substitution remplace $x+y-z-t$ par un polynôme de quatre lettres, il sera nécessaire, si la somme des coefficients de $x^2, y^2, z^2, t^2, u^2$ n'augmente pas, que les différences de deux lettres soient remplacées par de simples différences de deux lettres, ce qui exige que la substitution se réduise à une permutation.

Si le polynôme $x+y-z-t$ était remplacé par un polynôme contenant trois lettres, la plus simple expression possible de ce polynôme serait $x+y-2t$, et la somme des coefficients de $x^2, y^2, z^2, t^2, u^2$ croîtrait nécessairement.

Enfin, si $x+y-z-t$ était remplacé par une différence de deux lettres, la lettre $a'$ qui entre quatre fois dans des coefficients de $x^2$, $y^2, z^2, t^2, u^2$ n'entrerait plus que deux fois. Quelqu'une des lettres $b', c', \ldots, k', l'$ pourrait alors entrer plus de deux fois, et, par conséquent, quelque différence pourrait être remplacée par un polynôme contenant plus de deux lettres; mais il serait nécessaire, pour que la somme des coefficients de $x^2, y^2, z^2, t^2, u^2$ n'augmentât pas, que les différences $x-u$, $y-u$ et $z-t$ fussent remplacées par de simples différences, en même temps que $x+y-z-t$; mais cette hypothèse est inadmissible.

En effet, nous pouvons toujours supposer que, dans la substitution S, la quantité $u$ est remplacée par zéro; et, comme $x-u$ et $y-u$ doivent être remplacés par de simples différences, il faut que, dans la substitution S, $x$ et $y$ soient exprimés par des différences de deux lettres.

Soient d'abord $x$ et $y$ exprimés au moyen de trois lettres différentes seulement

$$x = X - Y,$$
$$y = X - Z;$$

appelons $\alpha$ et $\beta$ les différences qui remplacent $x+y-z-t$ et $z-t$; on aura

$$x+y-z-t = \alpha,$$
$$z-t = \beta;$$

on en conclura

$$z+t=2X-Y-Z-\alpha,$$
$$z-t=\beta,$$

et, par conséquent,

$$2z=2X-Y-Z-\alpha+\beta,$$
$$2t=2X-Y-Z-\alpha-\beta.$$

Comme $z$ et $t$ sont des fonctions à coefficients entiers de X, Y, Z, T, U, on devra avoir, en désignant par $m, n, p, q, r$ des nombres entiers,

$$\alpha-\beta=2m\,X+(2n+1)\,Y+(2p+1)Z+2q\,T+2r\,U,$$
$$\alpha+\beta=2m'X+(2n'+1)\,Y+(2p'+1)Z+2q'T+2r'U.$$

On tire de là

$$\alpha=(m+m')\,X+(n+n'+1)\,Y+(p+p'+1)\,Z+(q+q')\,T+(r+r')\,U,$$
$$\beta=(m'+m)\,X+(n'-n)\,Y+(p'-p)\,Z+(q'-q)\,T+(r'-r)\,U;$$

et, comme $\alpha$ et $\beta$ sont de simples différences, il faut que les seconds membres se réduisent à des différences de deux lettres. Remarquons que, si $\alpha$ contient X ou T ou U, $\beta$ le contient aussi nécessairement; car on ne peut avoir $m+m'=\pm 1$ avec $m-m'=0$. D'ailleurs, T et U devant nécessairement entrer dans la substitution S, il faut que $\alpha$ et $\beta$ contiennent ces deux lettres T et U; de sorte que Y et Z doivent disparaître des expressions de $\alpha$ et $\beta$, ce qui est impossible; car on ne peut avoir à la fois

$$n'-n=0,\quad n+n'+1=0,\quad p'-p=0,\quad p+p'+1=0.$$

Supposons maintenant que $x$ et $y$ s'expriment avec quatre lettres différentes

$$x=X-Y,$$
$$y=Z-T;$$

si on appelle toujours $\alpha$ et $\beta$ les différences qui doivent remplacer $x-y-z-t$ et $z-t$, on aura

$$\alpha=(m+m'+1)X+(n+n'+1)Y+(p+p'+1)Z+(q+q'+1)T+(r+r')U,$$
$$\beta=(m'-m)X+(n'-n)Y+(p'-p)Z+(q'-q)T+(r'-r)U;$$

comme U doit nécessairement entrer dans la substitution S et que $\alpha$ et

$\beta$ sont des différences de deux lettres, il faut annuler à la fois, par exemple, les deux coefficients de X dans $\alpha$ et $\beta$, ce qui est impossible.

Donc toute substitution qui ne se réduit pas à une simple permutation augmente nécessairement la somme des coefficients,

3° Supposons que $a$ et $h$ soient seuls négatifs; que $a$ soit inférieur en valeur absolue à $b, c, d, e, f, g$; $h$ inférieur en valeur absolue à $b, c, e, f, k, l$; enfin que $a+h$ soit inférieur en valeur absolue à $b, c, e, f$.

Nous pouvons toujours supposer en outre $a$ supérieur à $h$ en valeur absolue.

Si dans la forme $\varphi$ on remplace $a$ par $-a'$, et si l'on remplace $(x-y)^2$ par la valeur fournie par l'identité

$$(x-y)^2 = -(x+y-z-t)^2 + (x-z)^2 + (x-t)^2 + (y-z)^2 + (y-t)^2 - (z-t)^2,$$

on obtiendra, en désignant par $b', c', \ldots, k', l'$ des coefficients positifs dont les relations avec $a, b, c, \ldots, k, l$ sont évidentes,

$$\begin{aligned}\varphi = {} & a'(x+y-z-t)^2 + b'(x-z)^2 + c'(x-t)^2 + d'(x-u)^2 + e'(y-z)^2 \\ & + f'(y-t)^2 + g'(y-u)^2 + h'(z-t)^2 + k'(z-u)^2 + l'(t-u)^2,\end{aligned}$$

et remarquons que $d', g', k', l'$ restent identiques à $d, g, k, l$, de sorte que $d'$ et $g'$ sont supérieurs à $a'$ pendant que $k'$ et $l'$ sont supérieurs à la valeur absolue de $h$.

Cela posé, je dis que, si l'on fait une substitution conservant à la forme $\varphi$ le caractère d'une forme réduite, cette substitution ne peut que permuter les variables.

En effet, si cette substitution remplace $x+y-z-t$ par un polynôme contenant quatre lettres, les différences ne pourront être remplacées que par des différences, de sorte que la substitution ne produit, comme il est facile de le voir, qu'une permutation.

Si cette substitution remplace $x+y-z-t$ par un polynôme à deux lettres, il faudra d'abord que $x-u$ et $y-u$ soient remplacés par de simples différences, puisque $d'$ et $g'$ sont supérieurs à $a'$. De plus, nous avons vu tout à l'heure que, si $x+y-z-t$, $x-u$, $y-u$ étaient remplacés par des différences, il n'en pourrait pas être de même pour $z-t$, de sorte que l'expression par laquelle sera remplacé $z-t$ accroîtra la somme des coefficients des carrés des variables au moins de $2h'$, c'est-à-dire au moins du double de la valeur absolue de $2(a-h)$; il faudra alors que $z-u$ et $t-u$ soient remplacés par des différences, puisque $k'$ et $l'$ sont supérieurs à $h$ en valeur absolue. Enfin, les coefficients $b', c', e', f'$, qui sont respectivement égaux à $b-a'$, $c-a'$, $e-a'$, $f-a'$, sont par conséquent supérieurs à la valeur absolue de $h$: donc $x-z$, $x-t$, $y-z$, $y-t$ devront être remplacés par des différences.

Ainsi, dans le cas où $x+y-z-t$ est remplacé par un binôme, il en est de même de toutes les différences, à l'exception de $x-y$ et $z-t$.

Or, dans la substitution que nous considérons, on peut toujours supposer $u=0$, et, comme $x-u$, $y-u$, $z-u$, $t-u$ doivent être remplacés par des différences, il faut que $x, y, z, t$ s'expriment par des différences de deux lettres.

On peut donc toujours poser

$$x = \mathrm{X} - \mathrm{U},$$

et, comme $x-z$ doit s'exprimer par une différence, il faut que l'expression de $z$ ait une lettre commune avec celle de $x$; on peut donc écrire

$$z = \mathrm{Z} - \mathrm{U}.$$

Comme $t$ doit avoir une lettre commune avec $x$, puisque $x-t$ s'exprime par une différence, mais non avec $z$, il faudra écrire

$$t = \mathrm{X} - \mathrm{T}.$$

Enfin $y-t$ et $y-z$ devant s'exprimer par des différences de deux lettres, il faut que $y$ ait une lettre commune avec $z$ et une lettre commune avec $t$, et, comme on ne peut avoir $y = \mathrm{X} - \mathrm{U}$, ce qui rendrait $y$ identique à $x$, il faut poser

$$y = \mathrm{Z} - \mathrm{T};$$

mais alors $x+y-z-t$, qui devrait être remplacé par une différence de deux lettres, est identiquement nul. Ajoutons encore que le déterminant de la substitution est nul au lieu d'être $\pm 1$.

La supposition que nous avons faite est donc impossible.

En résumé, il est démontré que, *si une forme vérifie l'une des conditions* *de réduction, il n'existe aucune forme équivalente qui puisse vérifier aussi quelqu'une des conditions de réduction, pourvu que l'on fasse abstraction des formes que l'on obtiendrait par la permutation des variables.*

8. Nous avons remarqué au n° 6 qu'on pouvait réduire une forme en employant, outre les substitutions qui permutent les variables, les deux substitutions suivantes

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{T} - \mathrm{Z}, & x &= \mathrm{Y} - \mathrm{X}, \\ y &= \mathrm{X} - \mathrm{U}, & y &= \mathrm{U} - \mathrm{T}, \\ z &= \mathrm{Y} - \mathrm{U}, & z &= \mathrm{U} - \mathrm{Z}, \\ t &= \mathrm{T} - \mathrm{U}, & t &= \mathrm{Y} - \mathrm{T}, \\ u &= 0, & u &= 0, \end{aligned}$$

car leur emploi permet de diminuer indéfiniment la somme des coefficients des formes qui ne sont pas réduites. D'ailleurs cette somme des coefficients ne peut pas, dans les formes positives, descendre au-dessous d'une certaine limite, puisqu'elle est égale à la demi-somme des coefficients de $x^2$, $y^2$, $z^2$, $t^2$, $u^2$.

Il faut cependant démontrer encore que la suite des opérations qui diminuent la somme des coefficients ne se poursuit pas indéfiniment. Soit donc $\varphi$ une forme non réduite que l'on veut réduire; supposons qu'on lui applique les substitutions qui diminuent la somme des coefficients et qu'après plusieurs opérations on l'ait transformée en une forme $\Phi$; la série des substitutions employées pour passer de $\varphi$ à $\Phi$ peut se remplacer par une substitution unique

$$(\mathrm{S})\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \alpha\mathrm{X} + \alpha'\mathrm{Y} + \alpha''\mathrm{Z} + \alpha'''\mathrm{T} + \alpha^{\mathrm{iv}}\mathrm{U}, \\ y &= \beta\mathrm{X} + \beta'\mathrm{Y} + \beta''\mathrm{Z} + \beta'''\mathrm{T} + \beta^{\mathrm{iv}}\mathrm{U}, \\ z &= \gamma\mathrm{X} + \gamma'\mathrm{Y} + \gamma''\mathrm{Z} + \gamma'''\mathrm{T} + \gamma^{\mathrm{iv}}\mathrm{U}, \\ t &= \delta\mathrm{X} + \delta'\mathrm{Y} + \delta''\mathrm{Z} + \delta'''\mathrm{T} + \delta^{\mathrm{iv}}\mathrm{U}, \\ u &= 0, \end{aligned}\right.$$

et le coefficient de $\mathrm{X}^2$ dans $\Phi$ s'obtiendra en remplaçant dans $\varphi$ les variables $x, y, z, t$ respectivement par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; on obtiendrait d'une manière analogue les coefficients de $\mathrm{Y}^2$, $\mathrm{Z}^2$, $\mathrm{T}^2$, $\mathrm{U}^2$ dans $\Phi$; mais la somme des coefficients de $\mathrm{X}^2$, $\mathrm{Y}^2$, $\mathrm{Z}^2$, $\mathrm{T}^2$, $\mathrm{U}^2$ est le double de la somme des coefficients de la forme $\Phi$ et cette somme a été constamment diminuée par les substitutions qui ont conduit de $\varphi$ à $\Phi$; donc les coefficients de la substitution S restent nécessairement limités. Il en résulte que les opérations de la réduction sont en nombre fini. En effet, supposons que, dans la suite des opérations de la réduction, on cherche chaque fois la substitution par laquelle on peut remplacer toutes les substitutions déjà employées; on obtiendra ainsi des substitutions analogues à S et qui ne pourront pas être indéfiniment différentes puisque les coefficients $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, ... sont limités. Si donc la série des opérations se continuait indéfiniment, elle conduirait nécessairement à deux formes $\Phi$ et $\Phi'$ qu'on pourrait déduire de $\varphi$ l'une et l'autre par la même substitution et qui seraient par conséquent identiques l'une à l'autre, ce qui est impossible, puisque les opérations de réduction diminuent constamment la somme des coefficients. Donc *la forme réduite peut toujours être obtenue par un nombre fini d'opérations.*

9. Nous avons vu que les substitutions qui opèrent la réduction sont les substitutions qui permutent les variables et les deux substitutions que nous avons écrites plus haut. Et comme les substitutions qui permutent les variables sont au nombre de cent vingt, nous avons donc en tout cent vingt-deux substitutions. Ces cent vingt-deux substitutions peuvent se ramener à deux seulement.

Pour le démontrer, je remarque d'abord que les cent vingt-deux substitutions qui permutent les variables s'obtiennent toutes en combinant les unes avec les autres :

1° La permutation qui change $x, y, z, t, u$ respectivement en

$$\text{A} \qquad y,\ x,\ z,\ t,\ u.$$

2° Les deux permutations qui changent $x, y, z, t, u$ respectivement en

$$\begin{array}{ll} \text{B} & y,\ z,\ x,\ t,\ u, \\ \text{B}' & z,\ x,\ y,\ t,\ u; \end{array}$$

3° Les trois permutations qui changent $x, y, z, t, u$ respectivement en

$$\begin{array}{ll} \text{C} & y,\ z,\ t,\ x,\ u, \\ \text{C}' & z,\ t,\ x,\ y,\ u, \\ \text{C}'' & t,\ x,\ y,\ z,\ u; \end{array}$$

4° Les quatre permutations qui changent $x, y, z, t, u$ respectivement en

$$\begin{array}{llllll} D & y, & z, & t, & u, & x, \\ D' & z, & t, & u, & x, & y, \\ D'' & t, & u, & x, & y, & z, \\ D''' & u, & x, & y, & z, & t. \end{array}$$

On voit en outre que la permutation qui produit la suite B′ s'obtient en répétant deux fois la permutation B.

De même, C′ et C″ s'obtiennent en répétant deux et trois fois la permutation C. Enfin D′, D″ et D‴ s'obtiennent en répétant deux, trois et quatre fois la permutation D.

Et si nous convenons d'indiquer par un exposant la répétition d'une même permutation, nous pourrons écrire

$$B' = B^2, \quad C' = C^2, \quad C'' = C^3, \quad D' = D^2, \quad D'' = D^3, \quad D''' = D^4.$$

Les cent vingt substitutions qui permutent les variables peuvent donc être déjà ramenées aux quatre permutations

$$A, \; B, \; C, \; D.$$

**10.** Mais je vais démontrer que B et C peuvent être ramenés à A et D. En effet, on a

$$C = D^2 A D^4,$$

en indiquant par là qu'on obtient C en faisant d'abord deux fois la permutation D, puis une fois la permutation A et ensuite quatre fois la permutation D.

On a de même

$$B = C^2 A C^3,$$

c'est-à-dire qu'on obtient B en faisant deux fois la permutation C, puis une fois la permutation A et trois fois la permutation C.

Les substitutions par lesquelles la réduction d'une forme peut s'obtenir sont donc les deux substitutions qui donnent les permutations A et B et les deux substitutions données au commencement du n° 8.

Ce qui fait en tout les quatre substitutions suivantes

$$
\begin{array}{llll}
x = Y, & x = Y, & x = T - Z, & x = Y - X, \\
y = X, & y = Z, & y = X - U, & y = U - T, \\
z = Z, & z = T, & z = Y - U, & z = U - Z, \\
t = T, & t = U, & t = T - U, & t = Y - T, \\
u = U, & u = X, & u = 0, & u = 0.
\end{array}
$$

Si nous les désignons respectivement par les lettres A, D, E, F, nous trouverons

$$
\begin{aligned}
A &= D^3 E^3 D^2, \\
F &= E\, D^4 E,
\end{aligned}
$$

de sorte que les cent vingt-deux substitutions qui opèrent la réduction des formes quaternaires se réduisent aux deux substitutions D et E, qu'on peut écrire ainsi

$$
\begin{array}{ll}
x = Y - X, & x = T - Z, \\
y = Z - X, & y = X - U, \\
z = T - X, & z = Y - U, \\
t = U - X, & t = T - U, \\
u = 0, & u = 0.
\end{array}
$$

Ces deux substitutions ne peuvent être ramenées à une seule substitution S, dont D et E seraient des puissances. Car supposons que l'on ait $S^n = D$, on aurait $S^{5n} = D^5$; et, comme $D^5$ est une substitution identique, il faudrait que $S^{5n}$ fût une substitution identique. Alors les calculs de réduction d'une forme ne pourraient jamais comporter plus de $5n - 1$ opérations; en d'autres termes, quels que soient $a, b, \ldots, k, l$, il n'y aurait que $5n - 1$ types de formes réduites, ce qui est absurde.

Donc *les éléments nécessaires et suffisants de toute réduction sont les deux substitutions* D *et* E.