Revue d'Histoire des Mathématiques

La géométrie dans la géométrie des nombres : histoire de discipline ou histoire de pratiques à partir des exemples de Minkowski, Mordell et Davenport

Sébastien Gauthier

Tome 15 Fascicule 2

2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :

Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : revues@smf.ens.fr / URL : http//smf.emath.fr/

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2009 : prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;
prix au numéro : 36 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
15 (2009), p. 183–230

LA GÉOMÉTRIE DANS LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES : HISTOIRE DE DISCIPLINE OU HISTOIRE DE PRATIQUES À PARTIR DES EXEMPLES DE MINKOWSKI, MORDELL ET DAVENPORT

Sébastien Gauthier

Résumé. — La géométrie des nombres est un domaine des mathématiques le plus souvent caractérisé par l'utilisation de méthodes géométriques pour traiter des problèmes issus de la théorie des nombres. Mais comment identifier une méthode géométrique ? À travers les travaux de Hermann Minkowski, Louis Mordell et Harold Davenport, nous essayons de préciser quelle géométrie est en question dans leurs travaux de géométrie des nombres et comment elle intervient. Nous montrons non seulement que ce qui est considéré comme géométrique change chez ces mathématiciens ; mais aussi que la place accordée à la géométrie n'est pas exactement la même. Ceci nous amènera à interroger la valeur historiographique d'une catégorie comme « géométrique » et son rapport à la pratique mathématique.

Abstract (The geometry in the "geometry of numbers", history of a discipline or a practice; the examples of Minkowski, Mordell and Davenport)

The Geometry of Numbers is a specialty of mathematics which is often characterized by its use of geometric methods in dealing with number theoretic problems. But how does one identify a geometric method? We try to clarify the kind of geometry which is at stake in the geometry of numbers as it was

Texte reçu le 30 juin 2008, révisé le 14 septembre 2009, accepté le 2 novembre 2009.

S. Gauthier, Université Lyon 1, Institut Camille Jordan, UMR 5208, Bâtiment Braconnier, 43 Boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France.
Courrier électronique : gauthier@math.univ-lyon1.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 01A60, 11–03.

Mots clefs : Minkowski, Mordell, Davenport, géométrie des nombres, géométrisation, géométrie, histoire de la théorie des nombres, discipline.

Key words and phrases. — Minkowski, Mordell, Davenport, geometry of numbers, geometrization, geometry, history of number theory, discipline.

Une version préliminaire de ce texte a été exposée en septembre 2005 lors du colloque *Histoire de la géométrie moderne et contemporaine* organisé par Philippe Nabonnand et Klaus Volkert au CIRM à Luminy.

practiced by Hermann Minkowski, by Louis Mordell and Harold Davenport. We find that not only does what is considered as geometric vary between these mathematicians, but also the role played by geometry is not quite the same. This suggests reflections on the historiographical use of such categories as "geometric" and on their relations to mathematical practice.

INTRODUCTION

> « La géométrie des nombres est une branche de la théorie des nombres qui a son origine dans la publication du travail fondateur de Minkowski en 1896 et qui s'est finalement constituée comme un champ d'étude important en lui-même. Son objectif est la conversion de questions arithmétiques dans des contextes géométriques, avec comme conséquence que certaines questions difficiles d'arithmétique peuvent être résolues géométriquement par des constructions assez évidentes [1]. » [Olds et al. 2000, p. xiii]

Cette description de la géométrie des nombres résume parfaitement les trois éléments communs qui se trouvent dans la plupart des commentaires des mathématiciens : premièrement, la géométrie des nombres serait une branche de la théorie des nombres, ensuite, elle débuterait avec les travaux de Hermann Minkowski (1864–1909) à la fin du XIX^e^ siècle, enfin elle se caractériserait par l'introduction d'un point de vue géométrique dans l'étude de problèmes de nature arithmétique.

Il est étonnant que cette caractérisation superficielle du type « il s'agit d'utiliser la géométrie en théorie des nombres » apparaisse déjà chez Minkowski (nous le verrons plus loin à la section 2) et soit reprise jusque dans

1 *The geometry of numbers is a branch of number theory that originated with the publication of Minkowski's seminal work in 1896 and ultimately established itself as an important field of study in its own right. Its focus is the conversion of arithmetic questions into geometric contexts, with the result that certain difficult questions in arithmetic can be answered geometrically by reasonably obvious constructions.*

des commentaires plus contemporains. Elle apparait donc comme une définition de la géométrie des nombres qui fonctionne sur cette longue durée et suggère une certaine stabilité du sujet (ou au moins des conceptions à son propos) dans le temps — en particulier une stabilité de la relation entre géométrie et arithmétique. En outre, caractériser la géométrie des nombres par l'intervention de la géométrie en arithmétique est aussi problématique en soi car trop générale : la géométrie diophantienne (ou géométrie arithmétique) qui a pour but l'étude des points à coordonnées rationnelles sur des courbes algébriques (et ses généralisations) peut aussi être décrite comme une intervention de la géométrie en arithmétique. Mais les deux domaines, géométrie des nombres et géométrie diophantienne, relèvent de deux sections distinctes de la théorie des nombres dans la classification actuelle des *Mathematical Reviews* (respectivement les sections 11H et 11G).

L'objectif de cet article est d'essayer de préciser la manière avec laquelle la géométrie intervient dans la géométrie des nombres et de voir que les modes d'intervention variés ont des conséquences sur le rôle qui lui est attribuée dans la recherche en géométrie des nombres. Des différences commencent à apparaître lorsque les descriptions du domaine se font plus précises, mais elles sont surtout mises en évidence si nous quittons les commentaires sur les mathématiques pour nous intéresser à leur pratique. Ce passage à une échelle d'analyse plus fine du travail mathématique montre que ce qui est perçu comme géométrique dans la géométrie des nombres change, malgré une caractérisation superficielle stable du sujet. Ces thèmes seront abordés à travers des exemples pris dans les travaux de Hermann Minkowski, Louis Mordell (1888–1972) et Harold Davenport (1907–1969).

Le choix de Minkowski paraît naturel pour discuter ces problèmes — nous l'avons dit plus haut, il est considéré comme le fondateur de ce nouveau domaine de recherches ; c'est en particulier lui qui introduit pour la première fois l'expression « Geometrie der Zahlen » en 1891 [Minkowski 1891b]. Justifions davantage le choix de Mordell et Davenport.

Identifier les recherches pertinentes pour l'étude de ce que devient la géométrie des nombres après Minkowski ne va pas de soi [2]. Des résultats, des techniques, des objets, issus de ses travaux, se retrouvent dans plusieurs domaines, comme l'étude des réseaux, la cristallographie, la cryptologie, la géométrie diophantienne elle-même, etc. Les mathématiciens travaillant dans ces domaines en décrivent le lien avec la géométrie des nombres en mettant l'accent sur des objets divers (réseaux, formes quadratiques, corps convexes, etc.) et tissent des généalogies différentes pour rendre compte des développements correspondants. La géométrie des nombres ne constitue donc pas un domaine isolé et facile à repérer. Une approche possible pour l'aborder est bibliographique, à partir de recensements systématiques dans différents corpus [3] [Gauthier 2007, chapitre 2] : d'abord, dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* qui donne un accès à la production de recherche de la première moitié du XX^{e} siècle ; dans les références des manuels consacrés à la géométrie des nombres (publiés après 1950) ; enfin, dans les sources citées dans le fascicule de la seconde édition de l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* intitulé *Geometrie der Zahlen* et publié en 1954. Or, le croisement des résultats obtenus avec ces trois corpus fait ressortir le rôle du travail de deux mathématiciens : Hans Frederik Blichfeldt [4] et surtout, en particulier sur le plan quantitatif, Louis Mordell. En nous focalisant sur ce dernier, le nom de Harold Davenport apparaît immédiatement à cause de sa collaboration étroite avec Mordell sur ce sujet. C'est par ailleurs cette collaboration qui semble relancer ce thème de recherche à partir de la seconde moitié des années 1930.

L'objectif de ce qui suit n'est pas la description des travaux mathématiques de Minkowski, Mordell et Davenport : il s'agit d'examiner, dans leurs

---

2 Cette question est discutée en détail dans [Gauthier 2007], en particulier dans la perspective de déterminer en quel sens la géométrie des nombres peut être considérée comme une discipline mathématique.

3 D'autres choix sont possibles pour reconstruire les développements du sujet, chacun permettant d'observer des aspects complémentaires dans l'histoire de la géométrie des nombres. Pour des remarques sur ces effets de choix de méthodes et de sources voir [Gauthier 2008].

4 Le cas de Blichfeldt n'est pas étudié ici, pour des éléments sur son travail en géométrie des nombres voir [Gauthier 2007, chapitre 3].

recherches, le sens et le fonctionnement de ce qu'ils appellent « géométrique », en profitant de ce que la comparaison de ces trois auteurs offre plusieurs configurations instructives, selon le temps, les objets étudiés ou les priorités mathématiques.

1. DE L'ESTIMATION DU MINIMUM DES FORMES QUADRATIQUES À LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES

Bien qu'il donne aussi immédiatement des applications à la théorie des corps de nombres algébriques, Minkowski élabore la géométrie des nombres dans la suite de ses travaux sur l'étude arithmétique des formes [5]. Selon l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, dans la théorie arithmétique des formes, « un des problèmes les plus importants à résoudre est de déterminer les nombres représentables par une forme, c'est-à-dire les valeurs que peut prendre la forme quand on donne aux variables des valeurs entières. La théorie des formes est rattachée par là à la résolution des équations en nombres entiers » [Cahen & Vahlen 1908, p. 76]. Ce sujet intéresse Minkowski depuis le début de sa carrière de mathématicien puisqu'en 1883, alors qu'il n'a que 19 ans, il remporte le Grand prix de l'Académie des Sciences avec un mémoire qui concerne les formes quadratiques. Le sujet de ce mémoire est plus précisément le nombre de décompositions d'un entier en somme de cinq carrés d'entiers [6]. Les méthodes de Minkwoski dans ce texte ne font encore aucune allusion à la géométrie, mais un point de vue géométrique et plus particulièrement les réseaux avaient déjà été utilisés dans la théorie arithmétique des formes avant Minkowski et la géométrie des nombres.

En 1831, Carl Friedrich Gauss, dans un compte rendu de la thèse de Ludwig August Seeber intitulée *Untersuchungen über die Eigenschaften der*

5 Comme en témoignent les classifications du *Jahrbuch* ou les traités de théorie des nombres au début du XX^{e} siècle, formes et corps de nombres correspondent à des évolutions divergentes de la théorie des nombres autour de 1900, voir à ce sujet [Goldstein & Schappacher 2007].

6 L'attribution de ce prix fit scandale car le mathématicien Henry J.S. Smith avait déjà résolu le problème une quinzaine d'années plus tôt, le prix lui fut donc aussi attribué. Pour plus de détails voir [Serre 1993] ; [Reid 1970, p. 11–12] et [Gauthier 2007, chapitre 1].

positiven ternären quadratischen Formen [Gauss 1831], proposait une représentation géométrique des formes quadratiques binaires et ternaires définies positives à l'aide d'un réseau [7] : à la forme quadratique binaire définie positive $ax^2 + 2bxy + cy^2$, Gauss associait le réseau plan de parallélogrammes construits à partir du parallélogramme de côtés de longueur $\sqrt{a}$ et $\sqrt{c}$, faisant un angle dont le cosinus est $\frac{b}{\sqrt{ac}}$. À l'aide de cette représentation Gauss interprétait géométriquement des notions et des résultats déjà connus sur les formes quadratiques qu'il avait démontrés par des méthodes arithmétiques [8]. Ce type de représentation est repris occasionnellement par d'autres auteurs. L'originalité du point de vue de Minkowski n'est donc pas d'employer la géométrie dans l'étude des formes quadratiques mais, elle réside dans la place centrale qu'il lui donne et la manière dont il l'utilise.

La méthode géométrique à la base de ce que Minkowski appela « géométrie des nombres » par la suite apparaît dans un article sur les formes quadratiques définies positives [9] publié en 1891 [Minkowski 1891c] [10]. Une des questions étudiées par Minkowski concerne l'estimation du minimum de ces formes pour des valeurs entières des variables. Quand Minkowski commence à s'intéresser à cette question, le meilleur résultat connu est dû à Charles Hermite en 1847 dans des lettres à Jacobi [Hermite 1850] [11]. Pour une forme quadratique f de n variables, définie positive et de déterminant D, Hermite avait démontré qu'il existe des entiers $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ non

7 En 1801, Gauss avait donné une théorie générale des formes quadratiques binaires dans la section cinq des *Disquisitiones Arithmeticae* [Gauss 1807].

8 La représentation de Gauss est expliquée dans [Schwermer 2007, p. 490–491], [Kjeldsen 2008, p. 63–64], ainsi que dans [Gauthier 2010] où les motivations de Gauss à introduire la géométrie sont discutées.

9 Une telle forme quadratique s'écrit $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} x_r x_s$, elle est définie positive si pour tous les réels $x_1, \dots, x_n$ non tous nuls, $f(x_1, \dots, x_n) > 0$.

10 La méthode de Minkowski dont il va être question est aussi discutée dans [Kjeldsen 2008]. Mais le travail de Minkowski y est étudié dans la perspective de « the emergence of the modern theory of convex sets » alors que l'objectif est ici de caractériser et mieux comprendre le point de vue géométrique adopté par Minkowski dans le cadre de la géométrie des nombres.

11 Pour des informations sur le travail d'Hermite à ce sujet, voir [Goldstein 2007].

tous nuls qui vérifient

$$f(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{|D|}\,. \tag{1}$$

Minkowski replace lui-même son travail dans la continuité de celui d'Hermite, il écrit à David Hilbert dans une lettre du 6 novembre 1889 :

> « Je suis maintenant allé beaucoup plus loin dans la théorie des formes quadratiques positives, il y a en fait dans les formes d'un plus grand nombre de variables beaucoup d'autres choses. Le théorème suivant (que je peux prouver en une demi-page) vous intéresse peut-être, vous ou Hurwitz : dans une forme quadratique positive de déterminant D avec n (≥ 2) variables on peut toujours donner aux variables des valeurs entières telles que la forme vaut moins que $< nD^{\frac{1}{n}}$. Hermite a ici pour le coefficient n seulement $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}$, ce qui en général est évidemment une borne bien trop haute [12]. » [Rüdenberg & Zassenhaus 1973, p. 38]

Pour démontrer le résultat annoncé dans cette lettre, Minkowski reprend la représentation géométrique par un réseau de la forme quadratique définie positive f. Alors que Gauss avait utilisé des réseaux en dimension 2 ou 3 pour représenter des formes quadratiques à 2 ou 3 variables, Minkowski utilise ici des réseaux de dimension n quelconque. Si O désigne l'origine du réseau qui représente la forme f alors pour des entiers $x_1, \ldots, x_n$,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = OP^2,$$

où P est un point du réseau. Minkowski note ensuite M le minimum de f pour des valeurs entières non toutes nulles de ses variables $x_1, \ldots, x_n$. Géométriquement, $\sqrt{M}$ est alors la distance minimale entre l'origine O et un autre point du réseau, ou de façon équivalente entre deux points quelconques du réseau. Minkowski choisit des hypercubes de côté $\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{n}}$ centrés

---

12 *Ich bin jetzt in der Theorie der positiven quadratischen Formen sehr viel weiter gekommen, es wird in der That bei Formen mit größerer Variabelnzahl sehr vieles anders. Vielleicht interessirt Sie oder Hurwitz der folgende Satz (den ich auf einer halben Seite beweisen kann) : In einer positiven quadratischen Form von der Determinante D mit n (≥ 2) Variabeln kann man stets den Variabeln solche ganzzahligen Werthe geben, daß die Form $< nD^{\frac{1}{n}}$ ausfällt. Hermite hat hier für den Coefficienten n nur $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)}$, was offenbar im Allgemeinen eine sehr viel höhere Grenze ist.*

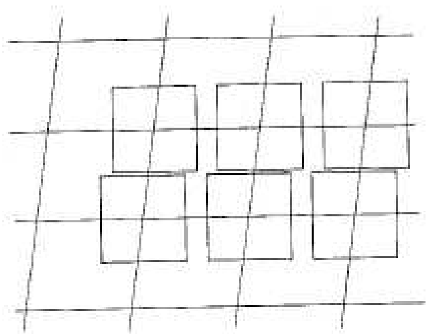

FIGURE 1. Hypercubes centrés en chaque point du réseau

en chaque point du réseau (voir la figure 1, d'après [Opolka & Scharlau 1985, p. 157]). Les sommets d'un tel hypercube sont ses points les plus éloignés de son centre et la distance entre ce centre et les sommets est $\frac{\sqrt{M}}{2}$. D'après la définition de M, deux hypercubes ne peuvent se rencontrer qu'en un sommet et l'ensemble des hypercubes ne remplit pas tout l'espace contrairement aux parallélépipèdes du réseau. Si Δ désigne le discriminant de f, le volume de chaque parallélépipède du réseau est alors $\sqrt{\Delta}$. Minkowski compare ce volume à celui d'un hypercube et il obtient

$$\left(\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{n}}\right)^n < \sqrt{\Delta}, \tag{2}$$

ce qui implique

$$M < n\sqrt[n]{\Delta} \tag{3}$$

qui est bien l'estimation annoncée dans la lettre à Hilbert.
Toujours dans cet article, Minkowski améliore cette estimation en reprenant la même méthode de démonstration, mais en remplaçant les hypercubes par des sphères de rayon $\frac{\sqrt{M}}{2}$. Le volume de ces sphères est [13]

$$\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\sqrt{M}}{2}\right)^n$$

13 Pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$.

et par conséquent

$$(4) \qquad M < \frac{4}{\pi}\left[\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\right]^{\frac{2}{n}} \sqrt[n]{\Delta}\,.$$

L'idée de changer la nature des domaines de l'espace utilisés (hypercubes, sphères) dans la preuve précédente, de reproduire la même preuve pour des domaines plus généraux est au centre de ce que Minkowski appela par la suite *géométrie des nombres*.

Le problème est maintenant d'essayer d'analyser plus précisément comment la géométrie intervient dans les recherches de Minkowski.

2. GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE DES NOMBRES CHEZ MINKOWSKI

En 1904, au congrès international des mathématiciens, Minkowski reprend la question du minimum des formes quadratiques pour une classe plus étendue de fonctions et commente la manière avec laquelle la géométrie intervient dans son travail :

> « Dans ce qui suit je voudrais essayer de donner à grands traits un rapport sur un chapitre spécifique de la théorie des nombres susceptible de nombreuses applications, un chapitre à propos duquel Charles Hermite a parlé autrefois d'« introduction des variables continues dans la théorie des nombres ». Certains problèmes importants concernent ici l'estimation des plus petites contributions d'expressions variables continument pour des valeurs entières des variables.
>
> Les faits intervenant dans ce domaine sont pour la plupart susceptibles d'une représentation géométrique, et cette circonstance a été décisive pour les progrès obtenus ici dans les derniers temps, de sorte que j'ai désigné le domaine entier comme la *Géométrie des nombres*[14]. » [Minkowski 1904, p. 43]

Minkowski met donc bien en avant ici le rôle important de la géométrie, mais surtout comme représentation (« Darstellung ») des problèmes

14 *Im folgenden möchte ich versuchen, in kurzen Zügen einen Bericht über ein eigenartiges, zahlreicher Anwendungen fähiges Kapitel der Zahlentheorie zu geben, ein Kapitel, vom dem Charles Hermite einmal als der « introduction des variables continues dans la théorie des nombres » gesprochen hat. Einige hervorstechende Probleme darin betreffen die Abschätzung der kleinsten Beträge kontinuierlich veränderlicher Ausdrücke für ganzzahlige Werte der Variablen.*

Die in dieses Gebiet fallenden Tatsachen sind zumeist einer geometrischen Darstellung fähig, und dieser Umstand ist für die in letzter Zeit hier erzielten Fortschritte derart maßgebend gewesen, daß ich geradezu das ganze Gebiet als die Geometrie der Zahlen *bezeichnet habe.*

de théorie des nombres qu'il étudie. Pour rendre compte de l'intervention de la géométrie dans la géométrie des nombres il importe donc de distinguer deux emplois au moins du terme géométrie. D'abord, la géométrie en tant que domaine des mathématiques qui contient ses problèmes, son corpus de résultats, ses méthodes etc ; ensuite la géométrie entendue comme ce qui permet de représenter de manière visuelle un problème.

Pour essayer de préciser le premier aspect, nous pouvons par exemple nous appuyer sur le tome de géométrie de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* qui synthétise les recherches effectuées au XIXe siècle sur ce sujet [Molk 1911-1915].

Pour repérer ce que Minkowski considère comme géométrique dans la géométrie des nombres, nous pouvons dans un premier temps remarquer qu'il qualifie de géométriques certaines de ses présentations de la géométrie des nombres. Les notions centrales de ces travaux sont celles de distance — pour laquelle il propose une généralisation —, de convexité et de volume. Sur les quatre volumes que comporte le tome de géométrie de l'*Encyclopédie*, on ne retrouve ces concepts que dans une petite partie de l'article « Fondements de la géométrie » où nous avons relevé deux références à son travail. La première concerne la notion de distance qu'il introduit dans le cadre de la géométrie des nombres ; l'autre, les définitions qu'il a donné de la convexité et d'une surface fermée [Molk 1911-1915, p. 124 et 183]. On constate donc qu'il s'agit d'un emploi très limité des ressources disponibles à son époque dans le domaine de la géométrie.

Dans les oeuvres complètes de Minkowski, publiées immédiatement après son décès, plusieurs publications sont regroupées dans une rubrique intitulée « géométrie ». Elles sont postérieures au livre *Geometrie der Zahlen* publié en 1896 et reprennent des thèmes rencontrés dans les travaux de géométrie des nombres. Elles semblent donc constituer un approfondissement des sujets géométriques qui sont apparus dans son travail en théorie des nombres. Sur ces cinq articles concernés trois sont recensés dans des sections de géométrie du *Jahrbuch* : un dans la section 8 (*Reine, elementare und synthetische Geometrie*), chapitre 1 (*Prinzipien der Geometrie*), un dans la section 8, chapitre 2 (*Continuitätsbetrachtungen (Analysis Situs, Topologie)*) et un dans la section 9 (*Analytische Geometrie*), chapitre 3 (*Analytische Geometrie des Raumes*). Les deux autres articles sont classés en analyse dans le *Jahrbuch* dans la section 7 intitulée *Differential- und Integralrechnung*, chapitre 4 (*Bestimmte Integrale*) et chapitre 7 (*Variationsrechnung*). La place de ces articles dans le *Jahrbuch* indique que la géométrie pratiquée par Minkowski est perçue aux frontières de l'analyse, ce qui est cohérent avec la citation précédente dans laquelle il associe géométrie et continuité.

Qu'en est-il maintenant du problème de la représentation des phénomènes ? La place particulière que Minkowski attribue à la visualisation est attestée par les nombreuses illustrations qu'il utilise dans ses publications ou dans ses conférences : son exposé à Heidelberg qui comporte par exemple 8 dessins a été fait « mit Projektionsbildern auf einer Doppeltafel » [Minkowski 1904], une occurrence assez rare à l'époque pour être mentionnée explicitement dans la rédaction de l'exposé. Cette visualisation qui fait intervenir des figures géométriques pose en particulier la question du lien entre géométrie et intuition à laquelle Minkowski fait très souvent référence. Par exemple, la question de l'intuition est soulignée quand l'expression *Geometrie der Zahlen* apparaît pour la première fois dans une publication :

> « sous le titre « géométrie des nombres » il [Minkowski] englobe des études géométriques sur le réseau des nombres entiers de dimension 3, sur ce qui lui correspond dans le plan et dans un sens plus large la généralisation des résultats de telles études aux espaces de dimension quelconque. Naturellement chaque affirmation sur le réseau des nombres entiers possède un noyau purement arithmétique. Mais le mot « géométrie » apparaît absolument approprié compte tenu des questions posées pour lesquelles l'intuition géométrique joue un rôle et compte tenu des méthodes de recherches qui sont continuellement soumises et dirigées par des concepts géométriques [15]. » [Minkowski 1891b]

Le thème de l'intuition qui est récurrent dans les recherches de Minkowski sur la géométrie des nombres est en fait présent très tôt dans son

15 *Unter dem Titel « Geometrie der Zahlen » begreift er geometrische Studien über das dreidimensionale Zahlengitter und über das entsprechende Gebilde in der Ebene, und in weiterem Sinne auch die Ausdehnung der Ergebnisse solcher Studien auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Ordnung. Natürlich besitzt jede Aussage über die Zahlengitter einen rein arithmetischen Kern. Das Wort « Geometrie » erscheint aber durchaus am Platze im Hinblick auf Fragestellungen, zu welchen die geometrische Anschauung verhilft, und auf Untersuchungsmethoden, welche fortwährend durch geometrische Begriffe ihre Richtung angewiesen erhalten.*

travail, en particulier dans son discours d'habilitation en 1887 [Schwermer 1991 ; 2007]. Cependant, c'est véritablement avec la géométrie des nombres qu'il va systématiser la référence à la géométrie et à l'intuition.

Le résultat sans doute le plus connu de Minkowski est son théorème sur les parties convexes symétriques par rapport à un point. Il occupe une place centrale dans la géométrie des nombres : d'une part, Minkowski l'applique à des situations très diverses, comme par exemple la théorie algébrique des nombres ou l'approximation diophantienne, et d'autre part, ce théorème permet de relier arithmétique et géométrie. Minkowski en fait donc de nombreuses présentations qui diffèrent parfois sur la place qu'il accorde à la géométrie.

En 1893, Felix Klein lit une communication de Minkowski au congrès de mathématiques organisé en marge de l'exposition universelle de Chicago [16]. Une traduction en français par Léonce Laugel est publiée en 1896 [Minkowski 1896]. Le titre de cet exposé, *Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace*, explicite le thème de l'intuition et, comme cela va apparaître dans la suite, le point de vue adopté privilégie dès les notions préliminaires celles qui sont issues de la géométrie. Dans cette conférence l'objectif de Minkowski est seulement de présenter son théorème sur les parties convexes symétriques par rapport à un point et de donner quelques applications de ce résultat. Il se place pour cela dans l'espace de dimension trois dans lequel il considère le réseau formé des points à coordonnées entières.

Minkowski commence par quelques rappels sur la notion de volume telle qu'elle a été définie par Camille Jordan [Jordan 1892]. Pour Minkowski, le volume est en effet « la notion la plus importante en corrélation avec le réseau des nombres » [Minkowski 1896, p. 394]. Chaque point du réseau des entiers est le centre d'un cube d'arête 1 dont les faces sont parallèles aux plans des coordonnées. Si maintenant K est un ensemble borné et p un point quelconque de l'espace, Minkowski désigne par K^p_Ω l'image de K par l'homothétie de centre p et de rapport Ω. Soient alors a^p_Ω le nombre de cubes strictement inclus dans K^p_Ω et u^p_Ω le nombre de

16 Lors de cette conférence, Klein présente des articles de mathématiciens absents [Voir Parshall & Rowe 1994].

cubes qui contiennent au moins un point de K^p_Ω. Jordan a démontré que les quantités $\Omega^{-3}a^p_\Omega$ et $\Omega^{-3}u^p_\Omega$ convergent indépendament de p vers respectivement A et U qui sont appelés volume intérieur et volume extérieur de K. Enfin, K est de volume A lorsque les volumes intérieur et extérieur coincident.

Minkowski présente ensuite ce qu'il considère comme « une généralisation de la définition de la longueur d'une ligne droite » avec la notion de « distance radiale ». Pour lui, une distance radiale est une fonction de deux points a et b, notée $S(ab)$, qui vérifie les deux conditions suivantes :

(1) $S(ab) > 0$ si $a \neq b$ et $S(ab) = 0$ si $a = b$.

(2) Si a, b, c, d sont quatre points tels que $a \neq b$ et $d - c = t(b - a)$, $t \geq 0$, alors $S(cd) = tS(ab)$.

À une distance radiale Minkowski associe un « corps étalon » qui est l'ensemble des points u tels que $S(Ou) \leq 1$, où O est une origine fixée dans le réseau.

Pour les applications qu'il a en vue, Minkowski considère en fait des distances radiales qui vérifient des propriétés supplémentaires. La première de ces propriétés est la concordance, une distance radiale S est dite « concordante » lorsque tous les points a, b et c satisfont l'inégalité

$$S(ac) \leq S(ab) + S(bc)\,. \tag{5}$$

Minkowski note alors que pour de telles distances radiales le corps étalon est « nulle part concave ». Les distances radiales utilisées par Minkowski sont aussi « réversibles », c'est-à-dire que pour tous les points a et b

$$S(ab) = S(ba)\,. \tag{6}$$

À nouveau, cette propriété a une conséquence géométrique sur le corps étalon qui est alors symétrique par rapport à l'origine O [17]. Comme

17 En termes modernes une distance radiale réversible et concordante correspond à la distance induite par une norme. De fait, Minkowski semble être un des premiers mathématiciens à introduire cette notion. Nous ne partageons pas à ce sujet un commentaire de [Kjeldsen 2008, p. 79] où cet aspect du travail de Minkowski est interprété comme la création d'un espace métrique abstrait général. Il n'y a pas chez Minkowski d'espace abstrait (il travaille toujours avec des points en dimension finie) muni d'une distance, envisagé indépendamment de toutes applications et étudié pour lui-même.

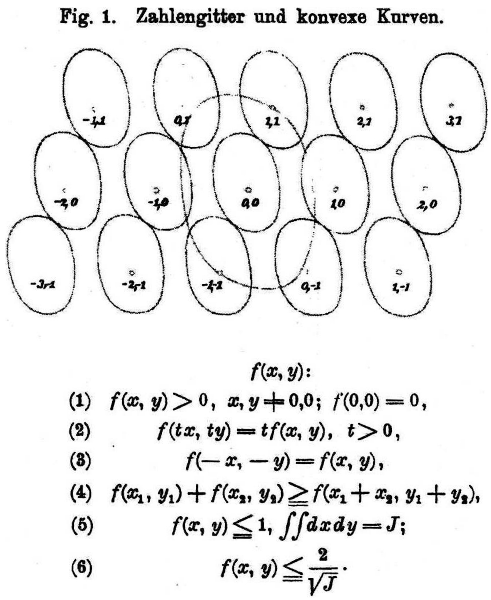

FIGURE 2. Illustration utilisée par Minkowski en 1904 à Heidelberg

exemple d'une distance radiale réversible et concordante, Minkowski propose la fonction $E(ab)$ qu'il définit géométriquement :

> « Par $E(ab)$ l'on désignera la moitié de l'arête du cube aux faces parallèles aux plans des coordonnées qui a pour centre a et dont l'encadrement passe par b. » [Minkowski 1896, p. 396]

On remarque que $E(ab)$ s'obtient en prenant le maximum de la différence des coordonnées des points a et b, mais que Minkowski préfère une définition en termes géométriques.

Minkowski démontre alors le théorème principal : pour une distance radiale réversible et concordante, il existe « au moins un point q du réseau, différent de O, pour lequel on ait $S(Oq) \leq \frac{2}{\sqrt[3]{I}}$ », où I désigne le volume du corps étalon associé à la distance S.

La preuve donnée par Minkowski reprend les mêmes idées que celle décrite plus haut pour le minimum des formes quadratiques définies positives ; cette approche est illustrée à Heidelberg par le dessin de la figure 2.

Minkowski admet dans cet exposé un certain nombre de propriétés des distances radiales réversibles et concordantes [18], en particulier l'existence de deux constantes positives g et G telles que

$$gE(ab) \leq S(ab) \leq GE(ab) \tag{7}$$

pour tous les points a et b. Minkowski remarque ensuite qu'il y a au moins un point r du réseau des entiers tel que $E(Or) = 1$; ce qui implique que $S(Or) \leq G$. Il note alors M la distance minimale entre O et un autre point du réseau qui est aussi la distance minimale entre deux points du réseau, donc $M \leq G$. Pour deux points a et c du réseau, Minkowski considère les corps constitués des points u pour lesquels $S(au) \leq \frac{M}{2}$ et $S(cu) \leq \frac{M}{2}$. La définition de M, les conditions de réversibilité et concordance impliquent que les deux corps précédents « ont en commun au plus des points de leurs encadrements ».

Pour un entier naturel pair Ω, Minkowski construit les corps définis par l'inégalité $S(au) \leq \frac{M}{2}$ où les coordonnées x, y, z du centre a prennent toutes les valeurs entières $-\frac{\Omega}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{\Omega}{2}$. Il y a exactement $(\Omega + 1)^3$ corps vérifiant ces conditions et leurs centres appartiennent tous au cube défini par l'inégalité $E(Ou) \leq \frac{\Omega}{2}$. De plus, tous les corps précédents sont inclus dans le cube donné par l'inégalité

$$E(Ou) \leq \frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{G}{g}\right)$$

dont le volume est $\left(\Omega + \frac{G}{g}\right)^3$. Ce dernier volume est donc plus grand que le volume total occupé par les $(\Omega + 1)^3$ corps centrés en des points du réseau qui ne peuvent se rencontrer que sur leur frontière et qui ont chacun un volume égal à $\left(\frac{M}{2}\right)^3 I$. Minkowski en déduit que

$$\left(\Omega + \frac{G}{g}\right)^3 \geq (\Omega + 1)^3 \left(\frac{M}{2}\right)^3 I\,, \tag{8}$$

ce qui implique pour Ω qui tend vers $+\infty$:

$$1 \geq \left(\frac{M}{2}\right)^3 I\,. \tag{9}$$

---

18 Les preuves de ces propriétés se trouvent dans son livre *Geometrie der Zahlen* [Minkowski 1910].

Finalement, en notant q un point du réseau qui est tel que $S(Oq) = M$, Minkowski a bien démontré que

$$S(Oq) \le \frac{2}{\sqrt[3]{I}}. \tag{10}$$

Cette démonstration montre comment Minkowski a approfondi le principe de sa preuve de l'estimation du minimum des formes quadratiques définies positives : il a précisé les conditions pour lesquelles sa méthode peut fonctionner et obtient ainsi un énoncé pour des fonctions distances plus générales que celles induites par les formes quadratiques

> « En revanche, j'ai extraordinairement généralisé la preuve que j'ai donnée du théorème sur le minimum d'une forme quadratique positive et suis arrivé [à la conclusion que] l'avantage des formes quadratiques est très illusoire, en ce que d'autres formes définies (bien entendu pas exactement rationnelles) permettent des conséquences bien plus étendues [19]. » [Rüdenberg & Zassenhaus 1973, p. 41]

Ainsi, Minkowski isole les propriétés fondamentales qui font fonctionner la preuve et les traduit sur des objets qu'il considère géométriques. Il fait ensuite varier ces objets afin d'obtenir de nouveaux résultats arithmétiques. Cette approche est significative du va-et-vient entre géométrie et arithmétique qui est au coeur du travail de Minkowski.

Il utilise donc son théorème en choisissant dans chaque situation la fonction distance la mieux adaptée ou encore le corps étalon associé. Par exemple, toujours dans la conférence de Chicago, il s'intéresse à l'approximation simultanée de deux nombres réels a et b par des rationnels.

Minkowski considère alors l'octaèdre défini par les inégalités

$$|x - az| + \left|\frac{z}{t}\right| \le 1, \qquad |y - bz| + \left|\frac{z}{t}\right| \le 1, \tag{11}$$

où t est un paramètre supérieur ou égal à 3 fixé. Le volume de cet octaèdre étant $\frac{2^3}{3}\,t$, le théorème de Minkowski donne l'existence de trois entiers x,

19 Lettre de Minkowski à Hilbert du 22 décembre 1890 : *Dagegen habe ich den von mir gegebenen Beweis für den Satz vom Minimum einer positiven quadratischen Form außerordentlich verallgemeinert, und bin dazu gekommen, daß der Vortheil speciell der quadratischen Formen ein sehr illusorischer ist, indem andere definite Formen (allerdings nicht gerade rationale) viel weitergehendere Folgerungen gestatten.*

y, z non tous nuls vérifiant

$$(12) \qquad |x-az|+\left|\frac{z}{t}\right| \leq \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{2^3}{3}\, t}} \qquad \text{et} \qquad |y-bz|+\left|\frac{z}{t}\right| \leq \frac{2}{\sqrt[3]{\frac{2^3}{3}\, t}}\,,$$

ou encore

$$(13) \qquad |x-az|+\left|\frac{z}{t}\right| \leq \left(\frac{3}{t}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{et} \qquad |y-bz|+\left|\frac{z}{t}\right| \leq \left(\frac{3}{t}\right)^{\frac{1}{3}}\,.$$

En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique et en choisissant z positif (ce qui est toujours possible par symétrie), Minkowski obtient les approximations suivantes pour a et b :

$$(14) \qquad \left|\frac{x}{z}-a\right| \leq \frac{2}{3}\,\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{y}{z}-b\right| \leq \frac{2}{3}\,\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Cette application est donc typique : Minkowski interprète un problème arithmétique en une situation géométrique, il examine ensuite les propriétés des objets géométriques en jeu, ce qui lui permet finalement d'arriver à un nouveau résultat arithmétique.

Le vocabulaire employé dans cet article par Minkowski est géométrique (distance, volume...) et les nouvelles notions qu'il définit sont toujours traduites géométriquement. Ainsi les propriétés des distances radiales sont interprétées comme des propriétés du corps étalon associé : la convexité ou bien la symétrie. Minkowski indique aussi que la deuxième condition de la définition d'une distance radiale doit être comprise en termes géométriques :

> « Cette relation doit être interprétée dans le sens du calcul barycentrique et signifie que les droites cd et ab ont même direction et que leurs longueurs (au sens ordinaire du mot) sont dans le rapport $t:1$. » [Minkowski 1896, p. 395]

Dans cette présentation de quelques résultats de la géométrie des nombres Minkowski montre cette volonté de mettre en avant les aspects géométriques de son travail, elle n'est pourtant pas systématique.

Toujours en 1893, en effet, Minkowski présente à nouveau ce théorème sur les parties convexes dans une lettre adressée à Charles Hermite [Minkowski 1893]. Hermite est un des premiers mathématicien à qui Minkowski communique les résultats obtenus dans le cadre de la géométrie des nombres. Dès 1891 [Minkowski 1891a] date de la publication de son premier article concernant la géométrie des nombres, Minkowski lui avait adressé une première lettre. Ces lettres, publiées sous la forme de courtes notes dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* pour la première et le *Bulletin des Sciences Mathématiques* pour la seconde, contiennent quelques définitions et théorèmes récemment obtenus par Minkowski mais ces résultats sont énoncés sans démonstrations. La lettre de 1893 est d'ailleurs présentée comme un résumé de son livre alors à venir *Geometrie der Zahlen*.

Dans ces lettres, la place accordée à la géométrie est complètement différente car, pour reprendre les termes employés par Minkowski dans celle de 1891, elles contiennent « la méthode géométrique de mon travail, traduite en langue purement analytique ». Toutes les notions préliminaires autour des distances radiales sont remplacées par l'introduction de fonctions de n variables, que Minkowski note φ et qui vérifient :

$$(A)\begin{cases}\varphi(x_1,x_2,..,x_n)>0, \text{ si } (x_1,x_2,..,x_n)\neq(0,0,\ldots,0)\\ \varphi(0,0,\ldots,0)=0\\ \varphi(tx_1,tx_2,..,tx_n)=t\varphi(x_1,x_2,..,x_n), \text{ si } t>0,\end{cases}$$

$$(B)\quad \varphi(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\leq\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\varphi(y_1,y_2,\ldots,y_n),$$

$$(C)\quad \varphi(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

Les conditions (A), (B), (C) correspondent respectivement aux notions de distance radiale, de concordance et de réversibilité mais Minkowski choisit ici de ne pas utiliser ce vocabulaire et il ne propose aucune interprétation géométrique pour cette définition. Le volume est lui aussi remplacé par son équivalent analytique et la quantité J est simplement définie comme « l'intégrale $\int\cdots\int dx_1dx_2\cdots dx_n$ étendue sur le domaine $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq 1$ ». Le théorème fondamental est alors énoncé de la manière suivante :

> « on peut toujours trouver des nombres entiers $x_1,x_2,\ldots,x_n$ pour lesquels on ait $0<\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leq\frac{2}{\sqrt[n]{J}}$ » [Minkowski 1893, p. 266].

Cette présentation alternative montre que l'analyse peut venir se substituer à la géométrie dans le travail de Minkowski ; ces deux domaines semblent donc très proches dans ses recherches sur la géométrie des nombres. D'ailleurs, c'est l'analyse qui est mise en avant au début de la *Geometrie der Zahlen* :

> « Cet écrit contient une nouvelle sorte d'applications de l'analyse de l'infini à la théorie des nombres [20] » [Minkowski 1910, p. IV].

Cette observation vient confirmer ce qui a été remarqué en utilisant le *Jahrbuch* [21]. Finalement, ce rapprochement entre analyse et géométrie fait ressortir qu'à travers l'intervention de la géométrie, Minkowski met l'accent sur la continuité plus que, par exemple, l'emploi de techniques standard dans la géométrie de son temps comme les projections ou la dualité. Il s'agit d'un point sur lequel il insiste à plusieurs reprises, par exemple dans le passage déjà cité de sa conférence à Heidelberg en 1904 (voir la citation page 191). La rencontre entre géométrie et théorie des nombres se manifeste comme l'opposition entre continu et discret. Cela apparaît notamment dans le théorème fondamental qui fait le lien entre un domaine de l'espace et des points d'un réseau, ou alternativement entre les fonctions notées φ et des nombres entiers.

Un autre aspect de l'intervention de la géométrie à examiner dans le travail de Minkowski est la référence à l'intuition. Quand il travaille sur la géométrie des nombres, Minkowski est proche de mathématiciens comme Felix Klein et David Hilbert dans un cercle où les débats sur géométrie et la visualisation des mathématiques, sur l'arithmétisation des mathématiques sont importants [22]. Le souhait de Minkowski de faire jouer un rôle à l'intuition à travers la géométrie doit donc être replacé dans un contexte

---

20 *Diese Schrift enthält eine neue Art Anwendungen der Analysis des Unendlichen auf die Zahlentheorie.*

21 Dans [Kjeldsen 2002], le travail de Minkowski sur la convexité est discuté du point de vue de son étude des systèmes d'inégalités linéaires. Là-encore son travail géométrique est qualifié d'analytique.

22 Traditionnellement, Hilbert est associé au formalisme, Klein à l'intuition et aux mathématiques appliquées. Par exemple, dans l'opposition entre moderne et contre-moderne décrite par Herbert Mehrtens, Hilbert et Klein sont pris comme représentants de ces deux tendances antagonistes [Mehrtens 1990 ; 1996]. Cette description a été récemment réévaluée, d'une part en montrant que le travail de Hilbert ne se réduit pas au formalisme axiomatique (voir par exemple [Corry 2004] et [Hilbert & Cohn-Vossen 1952]), d'autre part en étudiant précisément le cercle de Göttingen. Il joue un rôle important en tant que cercle d'échanges d'idées, de pratiques et mêle donc *a priori* des mathématiciens aux points de vue contrastés comme Klein et Hilbert [Parshall & Rowe 1994 ; Rowe 1989]. En outre, la théorie des nombres est un des domaines modèles pour le cercle de Göttingen, en particulier parce qu'il a longtemps été l'apanage des mathématiciens berlinois [Goldstein & Schappacher 2007].

plus général, celui du cercle d'idées et de pratiques de travail de Göttingen au tournant du XX^{e} siècle [Voir Parshall & Rowe 1994, chapitre 4]. Klein considère par exemple que le mouvement qu'il nomme « l'arithmétisation des mathématiques » ne permet pas de saisir l'ensemble des mathématiques et qu'un pan important de cette activité est perdu si l'intuition est laissée de côté [Klein 1897]. L'exemple de la géométrie des nombres est repris par Klein pour défendre ce point de vue. Il considère en effet que

> « La théorie des nombres est regardée d'habitude comme quelque chose d'excessivement difficile et abstrait, et n'ayant presque aucun rapport avec les autres branches de la science mathématique. » [Klein 1898, p. 58]

Dans ce contexte, le premier apport de la géométrie est bien de donner un caractère plus intuitif à la théorie des nombres et là-encore, Klein le précise en 1895 à propos de la géométrie des nombres :

> « la discipline qui, pendant bien longtemps, a semblé la plus étrangère à l'intuition, je parle de la théorie des nombres, vient de prendre un nouvel et brillant essor par l'introduction des méthodes intuitives entre les mains de Minkowski et d'autres. » [Klein 1897, p. 124]

Cette dimension intuitive nouvelle doit selon Klein, comme celui-ci le remarque à propos de la composition des formes binaires dont il propose une approche géométrique, simplifier et clarifier les théories concernées :

> « les considérations géométriques à l'aide desquelles je traite ces questions y introduisent un degré de simplicité et de clarté si élevé que ceux qui ne sont pas familiers avec l'ancienne exposition ne concevront qu'avec peine que l'on ait regardé ce sujet comme si extraordinairement difficile et abstrait. » [Klein 1898, p. 59]

Chez Minkowski, l'intuition passe en particulier par le recours à des illustrations nombreuses, que ce soit comme nous l'avons déjà mentionné dans certaines conférences, dans des notes de cours manuscrites [23], ou même dans certaines de ses publications de recherche.

---

23 Voir `http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/content/modernphysics/jnul` (consulté le 8 mars 2010) où les notes de plusieurs cours de Minkowski sont mis en ligne et en particulier un sur la géométrie des nombres donné à Göttingen au semestre d'hiver 1903–1904.

Les références de Minkowski à l'intuition sont très fréquentes et il la place souvent au centre de la géométrie des nombres :

> « Pour elle (la théorie des nombres appliquée) on peut de multiples façons faire usage d'intuition géométrique afin de trouver plus facilement des propositions et ainsi est né un domaine qui a d'abord été initié pour des parties isolées par Gauss, Dirichlet, Eisenstein, Hermite et auquel j'ai donné le nom de géométrie des nombres. Il s'agit donc essentiellement d'un usage de l'intuition spatiale pour découvrir des relations sur les nombres entiers [24]. » [Minkowski cité dans Galison 1979, p. 87]

Par exemple, dans un article publié en 1901 [Minkowski 1901], il s'intéresse en particulier au théorème suivant :

> *Soient* $\xi = \alpha x + \beta y$ *et* $\eta = \gamma x + \delta y$ *deux formes linéaires à coefficients réels, de déterminant* 1 *et* ξ_0, η_0 *des réels. Il existe alors des entiers* x *et* y *pour lesquels*
>
> $$|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| \leq \frac{1}{4}.$$

La preuve qu'il propose est liée à la méthode de démonstration de son théorème sur les parties convexes. Il illustre cette preuve par un dessin (voir la figure 3) qui joue un rôle central dans la compréhension des arguments développés [Gauthier 2007, p. 113–115].
La relation entre cette pratique de la géométrie et l'intuition y est d'ailleurs explicite :

> « Dans ce qui suit je donne une théorie du système de deux formes linéaires $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ à coefficients réels arbitraires et à indéterminées entières qui est fondée sur des considérations géométriques et donc très intuitive [25]. » [Minkowski 1901, p. 92]

---

24 *Zu ihr [die angewandte Zahlentheorie] kann man vielfach von geometrischer Anschauung zur leichteren Auffindung von Sätzen Gebrauch machen und so entsteht ein Gebiet, welches zuerst in einzelnen Partien bei Gauss, Dirichlet, Eisenstein, Hermite auftaucht und welchem ich den Namen Geometrie der Zahlen gegeben habe. Es handelt sich bei demselben also wesentlich um einen Gebrauch räumlicher Anschauung zur Aufdeckung von Beziehungen für ganze Zahlen.*

25 *Im folgenden gebe ich eine auf geometrischen Betrachtungen gegründete und dadurch sehr anschauliche Theorie des Systems zweier linearer Formen* $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ *mit beliebigen reellen Coefficienten und mit ganzzahligen Unbestimmten.*

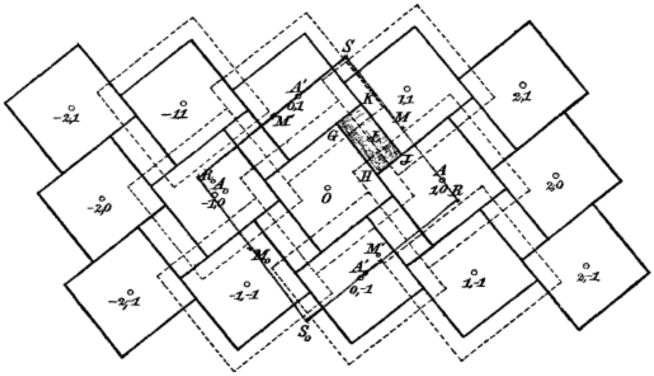

FIGURE 3. Illustration dans un article de 1901

L'intuition et la simplicité apportées par le recours à la géométrie conduisent Minkowski à lui donner des fonctions précises dans son travail : pédagogique et heuristique.

Ces dimensions deviennent manifestes lorsqu'on compare les présentations variées qu'il fait de la géométrie des nombres. Par exemple, lorsqu'à la conférence de Chicago, Minkowski s'adresse à un public plus large que celui des spécialistes de théorie des nombres [voir Parshall & Rowe 1994, chap. 7], il choisit donc de mettre en avant l'aspect géométrique de ses recherches ainsi que l'heuristique. Mais lorsque Minkowski écrit à Hermite la situation est complètement différente. Ce dernier connaît parfaitement les sujets abordés par Minkowski comme les formes quadratiques ou bien l'approximation diophantienne qui sont des applications classiques de la géométrie des nombres. L'objectif de Minkowski dans ces lettres est donc davantage de communiquer les résultats obtenus plutôt que le cheminement menant à leur découverte : il emploie alors une expression analytique concise.

Cette présentation prend aussi en compte la conception bien connue d'Hermite sur la place que doit occuper la géométrie, conception qui est différente de la sienne. Minkowski considère que les domaines des mathématiques sont séparés en deux grandes parties, le domaine du continu et celui du discret. Géométrie et analyse appartenant tous deux au domaine du continu, il y a moins de différence par exemple entre géométrie et analyse qu'entre arithmétique et analyse. Hermite qui est avant tout un analyste ne partage pas ce point de vue et voit la géométrie comme à part des autres domaines des mathématiques. Lorsqu'il écrit à Hermite, Minkowski choisit de ne pas insister sur l'utilisation qu'il fait de la géométrie en théorie des nombres et il formule son travail avec l'analyse [26].

La géométrie a été utilisée par Minkowski dans un but pédagogique à d'autres occasions comme par exemple au congrès international des mathématiciens à Heidelberg [Minkowski 1904]. Minkowski se sert alors d'illustrations qui lui permettent de représenter des problèmes mathématiques difficiles. Hilbert résume cet aspect du travail de Minkowski en 1909 :

> « Minkowski savait exposer aussi à des non spécialistes des objets mathématiques difficiles en ayant recours à des comparaisons frappantes et à des images intuitives et savait éveiller en eux une représentation de la grandeur et du charme de notre science [27] » [Hilbert 1911, p. XXVIII].

Minkowski n'est pas le seul à la fin du XIX^{e} siècle à employer la géométrie en théorie des nombres, Klein est un autre exemple. Mais l'ambition de Minkowski sur le rôle que cette dernière doit jouer dans la recherche est plus grande. La place qu'il entend attribuer à la géométrie est perçue comme originale car elle doit intervenir aussi dans le processus de découverte et guider la recherche de nouveaux résultats. Cette particularité est soulignée par d'autres mathématiciens ; Klein commente par exemple en 1893 la conférence de Minkowski présentée à Chicago :

> « La géométrie y est employée directement à développer de nouvelles vérités arithmétiques » [Klein 1898, p. 58]

De même dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Cahen, l'auteur pour l'édition française du volume sur la théorie arithmétique des formes, met en avant l'utilisation de la géométrie dans l'heuristique chez Minkowski en comparant son approche avec celle de Klein :

---

26 Sur les conceptions disciplinaires de Hermite, voir [Goldstein 2010].

27 *Minkowski auch Nichtfachleuten durch die Heranziehung treffender Gleichnisse und anschaulicher Bilder über schwierige mathematische Gegenstände vorzutragen und in ihnen eine Vorstellung von der Größe und Erhabenheit unserer Wissenschaft zu erwecken wußte.*

« Comme H. Minkowski, F. Klein a cherché a représenter géométriquement d'une façon systématique les principaux résultats de la théorie des nombres en particulier ceux qui se rapportent aux formes quadratiques binaires. Ses recherches diffèrent de celles de H. Minkowski en ce qu'elles ont moins servi à trouver des résultats nouveaux qu'à rendre intuitifs et plus simples des résultats déjà connus. » [Cahen & Vahlen 1908, p. 120]

Dès le début de ses travaux sur la géométrie des nombres, Minkowski remarque lui-même le rôle très important de la géométrie dans l'heuristique. D'abord en 1891 à Halle où il parle « des questions posées pour lesquelles l'intuition géométrique joue un rôle et compte tenu des méthodes de recherches qui sont continuellement soumises et dirigées par des concepts géométriques » (voir la citation page 193) ; ensuite en 1893 à Chicago où sa conférence commence de la manière suivante :

« Dans la théorie des nombres, comme dans chacun des autres domaines de l'Analyse, la découverte a lieu fréquemment au moyen de considérations géométriques, tandis qu'ensuite les vérifications analytiques sont peut-être seules communiquées. » [Minkowski 1896, p. 393]

Dans toute la géométrie des nombres de Minkowski, Hilbert considère le théorème fondamental sur les corps convexes comme emblématique de cette manière de travailler et de cette conception de la géométrie :

« Cette preuve d'un théorème profond de théorie des nombres sans moyen calculatoire, reposant essentiellement sur une considération géométrique intuitive est une perle de l'art heuristique de Minkowski [28]. » [Hilbert 1911, p. X–XI]

Chez Minkowski, employer la géométrie en théorie des nombres passe donc par la relation qu'il établit entre continu et discret ainsi que par l'utilisation de représentations géométriques qui sont vecteurs d'intuition, une intuition qui guide autant la recherche que la diffusion des résultats. Ces différents aspects se retrouvent dans le théorème emblématique sur les corps convexes et les réseaux, à la fois dans l'énoncé et la démonstration qui jouent un rôle central dans la géométrie des nombres. Avec Minkowski, elle est en effet organisée autour de cet énoncé et de sa

28 *Dieser Beweis eines tiefliegenden zahlentheoretischen Satzes ohne rechnerische Hilfsmittel wesentlich auf Grund einer geometrisch anschaulichen Betrachtung ist eine Perle Minkowskischer Erfindungskunst.*

preuve, la géométrie des nombres se développe alors par l'application directe du théorème ou par l'adaptation de la preuve à la nouvelle situation rencontrée.

3. GÉOMÉTRIE ET GÉOMÉTRIE DES NOMBRES POUR MORDELL ET DAVENPORT

Louis Mordell et Harold Davenport commencent leur collaboration sur la géométrie des nombres en 1937 quand Mordell fait venir Davenport à Manchester. Les deux mathématiciens sont en fait en contact bien avant ce moment. Alors qu'il est étudiant à Manchester entre 1923 et 1926, Davenport assiste aux cours d'analyse complexe de Mordell [Rogers et al. 1971] et une correspondance débute entre eux en 1927. Pendant toute leur carrière, ils s'intéressent à des sujets mathématiques assez proches. En 1964, dans un volume d'*Acta Arithmetica* dédié à Mordell, Davenport écrit un court article biographique dans lequel il revient sur les travaux de Mordell qu'il classe alors selon quatre thèmes principaux : les équations diophantiennes, l'utilisation des fonctions theta et des fonctions modulaires en théorie des nombres, des problèmes de congruences et de sommes exponentielles [29] et la géométrie des nombres [Davenport 1964]. La liste de publications de Davenport fait apparaître plusieurs thèmes communs : les équations diophantiennes, les congruences et la géométrie des nombres ; mais Davenport s'est aussi intéressé à l'approximation diophantienne (parfois en liaison avec la géométrie des nombres) et au problème de Waring. Le premier article que Mordell consacre à la géométrie des nombres est publié en 1928 [Mordell 1928] et quelques autres suivent avant que Davenport ne commence aussi à s'intéresser à ce sujet [Davenport 1937]. Mordell et Davenport mènent à partir de cette date des recherches communes sur la théorie des nombres autour de questions diverses ; nous aurons l'occasion d'en discuter quelques-unes [30].

29 Il s'agit de l'approximation du nombre de solutions de $f(x,y) \equiv 0 \mod p$ ou de l'estimation de $\sum_x e^{\frac{2i\pi f(x)}{p}}$ où $f(x)$ est un polynôme modulo p.

30 Pour des précisions sur ces deux mathématiciens, le milieu dans lequel ils travaillent ainsi qu'une analyse plus fine de leur collaboration, voir [Gauthier 2007].

Une différence fondamentale par rapport à Minkowski est que la géométrie n'est pas toujours mise en avant dans leurs descriptions des recherches sur la géométrie des nombres :

> « Le problème fondamental de la géométrie des nombres est de trouver des conditions sous lesquelles une inégalité
>
> $$\varphi(u_1, \ldots, u_n) \leq \lambda$$
>
> (ou plusieurs inégalités de cette forme) possède une solution entière. » [Davenport 1946b, p. 1]
>
> « La géométrie des nombres traite essentiellement d'une question arithmétique — trouver la valeur minimum ou la borne inférieure d'une fonction réelle $f(x)$ pour des valeurs entières des variables [31] » [Mordell 1961, p. 89–90].

Une autre différence importante concerne le rapport à l'intuition. En effet, quand la géométrie est mentionnée au sujet de la géométrie des nombres, elle n'est presque jamais associée à l'intuition [32]. Pour Mordell et Davenport, la géométrie ne se caractérise pas non plus par la continuité, le recours à des notions continues en géométrie des nombres est pour eux associé à l'analyse :

> « Parmi les théories les plus séduisantes nous avons celles qui combinent les idées de l'analyse et de l'arithmétique. J'emploie le mot « analyse » ici dans le sens le plus large, c'est-à-dire toute théorie où l'on fait usage de variables continues. Une de ces théories est la géométrie des nombres. » [Davenport, *WL*, C 169]

En particulier, cela révèle une conception différente de la répartition des domaines des mathématiques par rapport à Minkowski. Si elle ne se définit pas par l'usage de la continuité, l'intervention de la géométrie

---

31 *The geometry of numbers deals essentially with an arithmetical question — to find the minimum value or lower bound of a real function $f(x)$ of n variables (x) for integer values of the variables.*

32 Dans leurs travaux publiés, nous n'avons rencontré qu'une seule référence à l'intuition dans ce contexte ; en 1961, Mordell écrit à propos d'un problème lié à la géométrie des nombres :

> « L'intuition et les idées géométriques paraissent être très pertinentes pour certains problèmes et parfois l'aspect arithmétique semble avoir disparu. » (*Geometrical intuition and ideas seem to be very relevant for some of the problems and occasionally the arithmetic aspect seems to have disappeared.*) [Mordell 1961, p. 93]

consiste essentiellement en la traduction de questions de théorie des nombres en termes de la recherche de points d'un réseau dans un domaine de l'espace de dimension n ; le travail de Minkowski est par ailleurs aussi interprété de cette manière. C'est ce qui est expliqué par Davenport en 1947 :

> « Elle [la géométrie des nombres] consiste à interpréter géométriquement des questions de théorie des nombres en utilisant des points à coordonnées entières soit dans le plan, ou plus généralement, dans un espace de dimension n. [...]
>
> Beaucoup de questions en théorie des nombres peuvent être exprimées sous la forme : est-ce qu'un certain domaine contient un point d'un réseau, ou sous quelles conditions est-ce le cas. Cette approche géométrique conduisit Minkowski à beaucoup de théorèmes importants. Elle est aussi précieuse pour suggérer des questions nouvelles et intéressantes, même quand elle ne donne aucun moyen pour y répondre [33]. » [Davenport 1947, p. 104]

Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction de n variables à valeurs réelles, la question arithmétique de l'estimation du minimum de f pour des valeurs entières des variables peut être exprimée en termes de la résolution d'une inégalité diophantienne $f(x_1, \ldots, x_n) \leq K$, où K est un réel donné ; elle peut aussi être reformulée en termes géométriques en considérant le domaine des points $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace de dimension n qui vérifient $f(x_1, \ldots, x_n) \leq K$: il s'agit alors de chercher si ce domaine contient un point dont les coordonnées sont des entiers. Ces deux interprétations possibles du même problème sont exploitées dans les recherches de Mordell et Davenport sur la géométrie des nombres.

La fin de la citation précédente montre que, pour Davenport, si la géométrie suggère des problèmes nouveaux, elle ne fournit pas nécessairement de méthode de démonstration. Il semble ainsi remettre en cause le statut heuristique de la géométrie qui était fondamental avec Minkowski.

---

33 *It consists in interpreting geometrically questions in the theory of numbers, making use of points with integral co-ordinates, either in the plane, or, more generally, in a n-dimensional space. [...]*

Many questions in the theory of numbers can be expressed in the form : Does a particular region contain a lattice point, or under what conditions is this the case ? This geometrical approach led Minkowski to many important theorems. It is also valuable in suggesting new and interesting questions, even when it does not provide any means for answering them.

Nous verrons cependant que sa position à ce sujet est plus nuancée et pragmatique : s'il ne défend pas l'idée selon laquelle la géométrie doit systématiquement guider l'heuristique, il l'utilise néanmoins à plusieurs reprises pour la recherche de démonstrations.

Un des premiers thèmes de la géométrie des nombres sur lequel Mordell et Davenport collaborent est celui du produit de trois formes linéaires homogènes ternaires. Minkowski a démontré que pour n formes linéaires homogènes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ à coefficients réels de n variables et de déterminant Δ, il existe des valeurs entières des variables non toutes nulles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telles que

$$|\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n| \leq \frac{n!}{n^n} |\Delta| . \tag{15}$$

Le problème de ce résultat est que l'estimation obtenue n'est pas la meilleure possible si l'entier n est fixé. Par exemple, pour $n = 2$, la borne de Minkowski vaut $\frac{1}{2}|\Delta|$ alors que la meilleure borne possible est $\frac{1}{\sqrt{5}}|\Delta|$. Elle est obtenue pour les formes

$$\xi_1 = u + \frac{\sqrt{5}+1}{2} v \quad \text{et} \quad \xi_2 = u + \frac{-\sqrt{5}+1}{2} v.$$

Ce résultat avait été démontré par A.N. Korkine et E.I. Zolotareff dans un article publié en 1873 [Korkine & Zolotareff 1873].

En 1937, Mordell suggère à Davenport de s'intéresser au problème analogue pour le produit de trois formes linéaires. Davenport considère pour cela trois formes linéaires $L_r = a_r x_1 + b_r x_2 + c_r x_3$ $(r = 1, 2, 3)$ dont le déterminant est supposé être égal à 1 si les coefficients des formes sont réels et égal à i quand deux des formes sont à coefficients complexes et conjuguées. Il démontre alors qu'il existe des entiers x_1, x_2, x_3, non tous nuls, pour lesquels

$$|L_1 L_2 L_3| \leq \frac{1}{K} , \tag{16}$$

où $K = 7$ pour des formes réelles et $K = \sqrt{23}$ dans le cas complexe [Davenport 1938b; 1939]. Les cas d'égalité sont aussi discutés et résolus par Davenport dans le cas réel et par Mordell pour les formes à coefficients complexes [Mordell 1942].

Au début des années 1940, Mordell propose une nouvelle approche de la question précédente qui utilise les formes cubiques binaires à coefficients réels [34]. Le théorème de Davenport devient alors une conséquence d'un résultat sur le minimum des formes cubiques binaires. La première preuve obtenue par Mordell de ce théorème est publiée en 1945 [Mordell 1945], mais elle est annoncée dès 1941 [Mordell 1941b].

Mordell écrit les formes cubiques binaires à coefficients réels sous la forme

$$f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 ,$$

la quantité $D = 27a^2d^2 - 18abcd - b^2c^2 + 4ac^3 + 4db^3$ est le déterminant d'une telle forme, il est ici supposé non nul. Mordell montre qu'il existe des entiers x et y qui ne sont pas tous les deux nuls et qui vérifient

$$|f(x,y)| \leq \left(\frac{|D|}{K^2}\right)^{\frac{1}{4}} , \tag{17}$$

où $K = 7$ si D est strictement négatif et $K = \sqrt{23}$ si D est strictement positif.

Les commentaires de Mordell ainsi que sa méthode de démonstration confirment les observations sur ce qui est vu comme géométrique par Mordell et Davenport. En effet, Mordell démontre le résultat précédent dans le cas où le déterminant est strictement positif sous la forme équivalente suivante :

THÉORÈME. — *Soit $\mathscr{L}$ le réseau d'origine O défini par*

$$x = \alpha\xi + \beta\eta , \qquad y = \gamma\xi + \delta\eta ,$$

où ξ, η parcourent l'ensemble des entiers et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Il existe alors un point du réseau différent de l'origine O dans le domaine défini par l'inégalité

$$|x^3 - xy^2 - y^3| \leq 1 . \tag{18}$$

Le passage d'un énoncé à l'autre est commenté par Mordell en 1949 :

34 Le lien entre les deux problèmes est expliqué dans [Mordell 1942].

> « Le problème du minimum d'une cubique binaire peut être réduit à une question de géométrie des nombres [35]. » [Mordell 1949, p. 72]

L'expression *géométrie des nombres* semble ici désigner la formulation géométrique du problème arithmétique de la détermination d'une estimation du minimum des formes cubiques binaires et Mordell met ici en avant le passage entre les points de vue arithmétiques et géométriques.

Un dernier type de commentaires montre que c'est bien dans la formulation en termes de points d'un réseau dans un domaine que Mordell et Davenport voient la géométrie ; ce sont ceux dans lesquels ils replacent leurs travaux dans le développement général de la géométrie des nombres. En effet, Mordell décrit les changements dans les questions abordées à travers les propriétés géométriques des domaines étudiés. En particulier, les travaux sur les formes cubiques binaires sont interprétés comme la première étape vers un traitement général des domaines non convexes (voir la figure 4) :

> « Ma méthode de preuve est géométrique et donne le premier exemple simple des meilleurs résultats possibles pour un domaine plan non convexe borné par des courbes de degré strictement supérieur à deux [36]. » [Mordell 1941b, p. 85]

Un thème qui revient souvent dans les commentaires de Mordell et Davenport est celui de la simplicité. Avec Minkowski ce thème apparaît aussi mais en liaison avec la question de la géométrie et de l'intuition. La situation est différente chez Mordell et Davenport. Pour Mordell, la simplicité est un critère important pour juger une preuve. Réussir à trouver des démonstrations plus simples doit permettre de mieux comprendre les problèmes qui sont posés et ainsi de découvrir de nouvelles pistes de recherche. Il est donc pour lui nécessaire de revenir plusieurs fois sur les mêmes résultats, attitude qu'il a d'ailleurs adoptée dans son travail en proposant parfois plusieurs démonstrations pour un seul théorème :

---

35 *The problem of the minimum of a binary cubic can be reduced to a question in the geometry of numbers.*

36 *My method of proof is geometrical and gives the first simple instance of best possible results for a non-convex plane region bounded by curves of degree greater than two.*

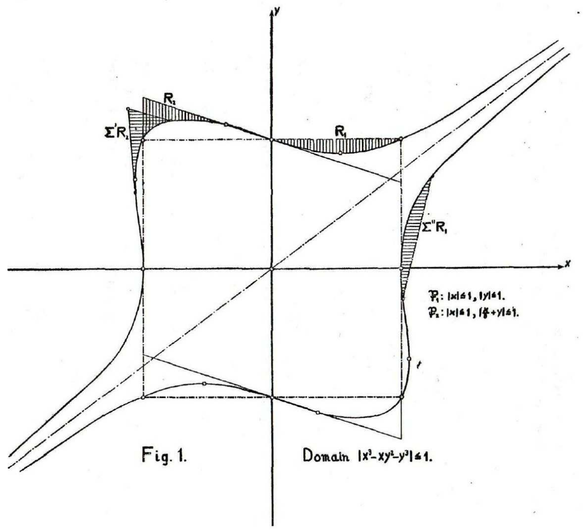

FIGURE 4. Domaine étudié par Mordell pour son théorème sur les cubiques

> « en premier lieu, ce qui compte réellement c'est de trouver n'importe quelle solution. Ensuite, nous pouvons commencer à chercher la « bonne solution », c'est-à-dire, ce qui semble être la manière simple et naturelle de le faire[37]. » [Mordell 1959, p. 40]

Pour Mordell et Davenport, une preuve arithmétique peut s'avérer plus simple qu'une preuve géométrique. Par exemple en 1933, Mordell propose une nouvelle preuve du théorème de Minkowski[38] à propos de laquelle il écrit :

> « Ma preuve est complètement arithmétique et même plus simple que la preuve géométrique de Minkowski[39]. » [Mordell 1935, p. 249]

---

37 *What really matters in the first place is to find any solution. Afterwards we may begin to look for the « right solution », that is, what seems to be the simple and natural way of doing it.*

38 Cette preuve est détaillée dans [Gauthier 2007, p. 242–249].

39 *My proof is completely arithmetical and even simpler than Minkowski's geometric proof.*

Un autre exemple est fourni par le théorème de Mordell sur les cubiques binaires. Mordell en donne d'abord une démonstration géométrique, qu'il simplifie par la suite [Mordell 1943a ;b]. Puis Davenport le démontre de façon arithmétique [40] avec une preuve [Davenport 1943] qu'ils qualifient de plus simple.

Une autre nuance à apporter au sujet de l'intervention de la géométrie entre Minkowski, Mordell et Davenport concerne sa fonction heuristique. En effet, une citation précédente de Davenport (voir page 209) nous a conduit à distinguer entre heuristique dans les problèmes et heuristique dans les preuves, la géométrie semblant être pour lui davantage du côté de la découverte de nouveaux problèmes. Cependant, d'autres commentaires de Davenport à ce sujet suggèrent que les différences avec Minkowski ne sont pas si importantes. Dans des notes pour un cours à Berkeley en 1948, Davenport paraît même faire de la fonction heuristique de la géométrie une caractéristique de la géométrie des nombres :

> « Dans la géométrie des nombres, on traite une classe générale de problèmes de théorie des nombres par des méthodes qui sont suggérées par une interprétation géométrique. Les problèmes dont il est question sont reliés à des « inégalités diophantiennes », i.e. des inégalités qui doivent être satisfaites par des valeurs entières des variables [41]. » [Davenport 1948]

Mais la différence s'atténue encore davantage si on s'intéresse à la pratique mathématique de Davenport : dans son travail la géométrie est exclusivement utilisée dans l'élaboration des démonstrations alors qu'elle disparaît complètement de ses publications. C'est ce que Rogers observe sur les recherches de Davenport à propos du produit de trois formes linéaires homogènes :

> « Davenport s'occupa du problème de la recherche du minimum arithmétique d'un produit de trois formes linéaires réelles en étudiant le problème par

40 Ce sont Mordell et Davenport qui commentent ainsi leur travail en caractérisant leurs démonstrations.

41 *In the geometry of numbers, we treat a general class of problems in number theory by methods which are suggested by a geometrical interpretation. The problems in question relate to « diophantine inequalities », ie inequalities which are to be satisfied by integral values of the variables.*

des méthodes géométriques et en dessinant des diagrammes sur du papier millimétré. Quand il arriva à la rédaction de son travail (24, 25) [42], il élimina toute référence à la géométrie qu'il avait utilisé comme un guide et il présenta une preuve analytique stricte [43] » [Rogers et al. 1971, p. 168–169].

Pour illustrer cet aspect du travail de Davenport sur le produit de trois formes linéaires, nous disposons de notes non publiées (notes de cours, notes pour des exposés etc) qui peuvent être comparées aux articles publiés.

Dans des notes pour une conférence à Bruxelles en 1946, Davenport explique la difficulté pour démontrer son théorème dans des termes géométriques :

« La première idée qui se présente, par analogie avec le cas précédent [44], est de trouver un domaine convexe qui ne peut contenir un point du réseau autre que O, à volume aussi grand que possible, et d'y appliquer le théorème fondamental de Minkowski. Ceci peut se faire, mais je me suis convaincu qu'il n'existe pas de tel domaine qui permette de démontrer que $\frac{1}{M} \geq 7$. On peut démontrer de cette façon que $\frac{1}{M} > 6,96\ldots$, mais cela ne suffit pas. » [Davenport 1946b, p. 9]

La solution trouvée pour surmonter cette difficulté est aussi décrite géométriquement :

« Au moyen d'un long raisonnement, à la fois compliqué et délicat, qui emploie plusieurs domaines convexes, j'ai réussi à atteindre le résultat désiré. » [Davenport 1946b, p. 9]

Dans des notes de cours datant très certainement du début des années 1940, Davenport entre davantage dans les détails techniques de la démonstration :

---

42 C'est-à-dire [Davenport 1938a ;b].

43 *Davenport took up the problem of finding the arithmetic minimum of a product of three real linear forms, studying the problem by geometrical methods and drawing diagrams on triangulated graph paper. When he came to write up the work (24, 25) he eliminated all reference to the geometry he has used as a guide and presented a severely analytic proof.*

44 C'est-à-dire le cas du produit de deux formes linéaires qu'il a commenté juste avant.

« À ce stade la méthode semblait s'arrêter définitivement. Mais un examen plus approfondi des diagrammes montrait que des points du réseau proches [45] de (θ, φ, ψ) doivent aussi vérifier $\zeta + \eta + \xi \geq -1$ (en négligeant ε). En considérant les prismes hexagonaux étendus, caractérisés par

$$|\xi + \eta + \zeta| < 3\,, \quad |\xi - \eta| < \theta - \psi\,, \quad |\eta - \zeta| < \theta - \psi\,, \quad |\zeta - \xi| < \theta - \psi + \frac{1}{30}\,,$$

j'ai pu établir l'existence de points du réseau proches de chaque point (θ, ϕ, ψ), (ϕ, ψ, θ), (ψ, θ, ϕ) à une distance d'au plus $\frac{1}{10}$ pour chaque coordonnées de ces points. La somme de ces trois points de réseau est proche de $(-1, -1, -1)$ et donc est $(-1, -1, -1)$. Les trois points sont donc en fait (θ, ϕ, ψ), (ϕ, ψ, θ), (ψ, θ, ϕ) si nous négligeons ε, et ainsi le déterminant du réseau est ≥ 7, ie $M \leq \frac{1}{7}$.

La preuve formelle des différents points inférés à partir des diagrammes et la présentation formelle des arguments est quelque peu longue et ennuyeuse [46]. » [Davenport, *WL*, C 179]

Il se dessine à travers ces commentaires de Davenport une chronologie de son travail de recherche. La question posée est d'abord représentée géométriquement et l'examen attentif de cette représentation doit permettre de suggérer l'idée de la preuve. Dans un deuxième temps, ces idées, auxquelles le mathématicien est arrivé par l'intermédiaire de l'interprétation géométrique, doivent être vérifiées formellement. Dans l'article où cette méthode de démonstration est présentée, l'explication de sa démarche avec des domaines convexes n'est pas reprise. La preuve comporte 15 lemmes et 2 théorèmes qui se succèdent sans aucune référence à une heuristique géométrique. Le lemme 10, qui est vu comme

---

45 θ, ϕ, ψ sont les solutions de l'équation $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$.

46 *Here the method seemed likely to come to a full stop. But further inspection of the diagrams showed that a lattice point near* (θ, ϕ, ψ) *must also satisfy* $\xi + \eta + \zeta \geq -1$ *(neglecting* ε*). By considering the expanded hexagonal prisms, typified by*

$$|\xi + \eta + \zeta| < 3\,, \quad |\xi - \eta| < \theta - \psi\,, \quad |\eta - \zeta| < \theta - \psi\,, \quad |\zeta - \xi| < \theta - \psi + \frac{1}{30}\,,$$

I was able to establish the existence of lattice points near each of (θ, ϕ, ψ), (ϕ, ψ, θ), (ψ, θ, ϕ) *and lying within a distance* $\frac{1}{10}$ *in each coordinate from these. The sum of these three lattice points lies near* $(-1, -1, -1)$ *and therefore is* $(-1, -1, -1)$. *The three points are therefore actually at* (θ, ϕ, ψ), (ϕ, ψ, θ), (ψ, θ, ϕ) *if we neglect* ε*, and in this way the determinant of the lattice is* ≥ 7*, ie.* $M \leq \frac{1}{7}$.

The formal proof of the various points inferred from the diagrams, and the formal presentation of the arguments, is somewhat long and tedious.

le plus fondamental par Davenport, illustre parfaitement cette dernière remarque. Ce lemme correspond à l'étape de la démonstration évoquée dans la citation précédente :

« LEMMA 10. If ξ, η, ζ are real numbers satisfying

$$|(\xi+n)(\eta+n)(\zeta+n)| > 1-\varepsilon$$

for every integer n, and also satisfying

$$|\xi-\eta| < \theta-\psi-\varepsilon_{10}, \quad |\eta-\zeta| < \theta-\psi-\varepsilon_{10},$$
$$|\xi-\zeta| < \theta-\psi+\frac{1}{30},$$

then there exist numbers ξ_1, η_1, ζ_1, which are either of the form

$$\xi_1 = \xi+m, \ \ \eta_1 = \eta+m, \ \ \zeta_1 = \zeta+m,$$

or of the form

$$\xi_1 = -\xi+m, \ \ \eta_1 = -\eta+m, \ \ \zeta_1 = -\zeta+m,$$

where m is a integer such that either

$$\max(|\xi_1-\theta|, \ |\eta_1-\phi|, \ |\zeta_1-\psi|) \ < \ \frac{1}{10}+\varepsilon_{11}$$

or

$$\max(|\xi_1-\psi|, \ |\eta_1-\phi|, \ |\zeta_1-\theta|) \ < \ \frac{1}{10}+\varepsilon_{11}.$$

Also ξ_1, η_1, ζ_1 satisfy

$$\xi_1+\eta_1+\zeta_1 \ > \ -1-\varepsilon;$$

and if

$$\xi_1+\eta_1+\zeta_1 \ < \ -1+2\varepsilon$$

then either

$$\max(|\xi_1-\theta|, \ |\eta_1-\phi|, \ |\zeta_1-\psi|) \ < \ \varepsilon_1,$$

or

$$\max(|\xi_1-\psi|, \ |\eta_1-\phi|, \ |\zeta_1-\theta|) \ < \ \varepsilon_1.$$ »

[Davenport 1938b, p. 420]

Les hypothèses du lemme correspondent à la définition du prisme évoqué dans les notes du cours, avec le point (ξ_1, η_1, ζ_1) obtenu par l'application du lemme qui vérifie par exemple

$$\max(|\xi_1-\theta|, \ |\eta_1-\phi|, \ |\zeta_1-\psi|) \ < \ \frac{1}{10}+\varepsilon_{11}$$

on reconnaît un point proche de (θ, ϕ, ψ). Dans la phase de rédaction des résultats Davenport privilégie une présentation purement arithmétique sans aucune mention de l'origine géométrique des arguments développés. À nouveau, la géométrie, qui intervient par des représentations géométriques, trouve sa place dans la phase de découverte. Cette même idée se retrouve aussi dans le travail de Mordell concernant cette fois le produit de formes linéaires non homogènes :

> « La preuve a été suggérée par des considérations géométriques et est essentiellement basée sur le fait que les quatre hyperboles
>
> $$|(x-c)(y-c)| \leq c^2, \quad |(x+c)(y+c)| \leq c^2,$$
>
> contiennent le parallélogramme
>
> $$|x-y| \leq 2c, \quad |x+y| \leq 4c,$$
>
> dont chaque côté $|x+y| = 4c$ touche une hyperbole, alors que chaque côté $|x-y| = 2c$ touche deux des hyperboles [47]. » [Mordell 1941a, p. 88]

Une autre thématique liée à la géométrie chez Mordell et Davenport est celle de la généralité [48]. Toujours dans les notes de cours précédentes, Davenport expose la question du minimum des formes quadratiques déjà vu à propos de Minkowski. Pour une forme quadratique $f(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables, définie positive et dont la valeur absolue du déterminant est notée D, il s'agit de déterminer la meilleure constante possible γ_n telle qu'il existe $x_1, \ldots, x_n$ des entiers non tous nuls qui vérifient :

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq \gamma_n D^{\frac{1}{n}}. \tag{19}$$

Pour Davenport, deux questions se posent en liaison avec ce problème. La première est d'essayer d'améliorer la constante γ_n quelque soit l'entier n. Des résultats sur ce sujet ont déjà été mentionnés au début de cet article :

47 *The proof was suggested by geometric considerations and is essentially based on the fact that the four hyperbolas*

$$|(x-c)(y-c)| \leq c^2, \quad |(x+c)(y+c)| \leq c^2,$$

enclose the parallelogram

$$|x-y| \leq 2c, \quad |x+y| \leq 4c,$$

whose sides $|x+y| = 4c$ *each touch one hyperbola, while the sides* $|x-y| = 2c$ *each touch two of the hyperbolas.*

48 La question de la généralité discutée ici à propos de Mordell et Davenport est différente de celle étudiée par exemple dans [Chemla 1998] ou [Nabonnand 2010]. Ces travaux posent le problème de la généralité au sein de la géométrie elle-même, il ne s'agit pas d'examiner la généralité d'un argument géométrique utilisé dans un autre domaine des mathématiques.

Hermite avait donné $\gamma_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ [Hermite 1850] ; Minkowski par des méthodes géométriques démontra en 1891 que $\gamma_n = \frac{4}{\pi}\left[\Gamma(1+\frac{n}{2})\right]^{\frac{2}{n}}$ [Minkowski 1891c]. Ce résultat fut encore amélioré par Hans Frederik Blichfeldt en 1914 qui obtint $\gamma_n = \frac{2}{\pi}\left[\Gamma(1+\frac{n+2}{2})\right]^{\frac{2}{n}}$ [Blichfeldt 1914].

La deuxième question est de trouver la meilleure constante possible γ_n où cette fois l'entier n est fixé. Ces constantes sont alors connues pour les entiers n compris entre 1 et 8 :

$$\gamma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\,; \quad \gamma_3 = \sqrt[3]{2}\,; \quad \gamma_4 = \sqrt{2}\,; \quad \gamma_5 = \sqrt[5]{8}\,;$$
$$\gamma_6 = \sqrt[6]{\frac{64}{3}}\,; \quad \gamma_7 = \sqrt[7]{64}\,; \quad \gamma_8 = 2$$

Davenport écrit au sujet de ces résultats où n est fixé :

> « Il peut être remarqué que ces preuves n'utilisent presque pas les méthodes de la géométrie des nombres. C'est souvent le cas pour les problèmes spécifiques [49]. » [Davenport, *WL*, C 179]

Ainsi la géométrie des nombres serait mieux adaptée pour traiter le cas où n est quelconque et moins efficace pour travailler le plus finement possible sur les cas particuliers. Cette impression que la géométrie serait plus générale est confirmée par Mordell en 1971 :

> « Il arrive parfois que des preuves arithmétiques soient plus simples mais elles peuvent ne pas suggérer la possibilité d'applications plus profondes. La méthode géométrique dépend souvent d'une idée plus simple et générale, et c'est souvent plus fructueux car de nouveaux problèmes évidents peuvent alors être attaqués [50]. » [Mordell 1971, p. 612]

Les thèmes de la découverte et de la simplicité apparaissent à nouveau dans cette citation. Mordell rapproche ici la simplicité de la géométrie ce qui n'était pas le cas dans les exemples vus jusqu'à présent pour Mordell

49 *It may be noted that the proofs of these mostly make no use of the methods of the geometry of numbers. This is often the case with special problems.*

50 *It sometimes happens that arithmetical proofs are simpler but these may not suggest the possibility of further application. The geometric method often depends upon a simpler and more general idea, and this is often more fruitful since obvious new problems can now be attacked.*

et Davenport. Peut-on pour autant y voir une contradiction dans ce qui est développé par Mordell et Davenport sur cette question de la simplicité ?

La lecture d'un grand nombre de leurs articles permet de se rendre compte que leur conception de la relation entre géométrie et simplicité est plus complexe. Leurs commentaires à ce sujet ne portent en fait pas toujours sur le même moment de la recherche mathématique. Il y a d'abord la simplicité de « l'idée » à laquelle Mordell fait référence dans la dernière citation. C'est elle qui est à la base de la découverte en train de se faire et qui doit guider le mathématicien pour lui permettre de trouver la méthode avec laquelle il pourra établir ce nouveau résultat. D'après Mordell et Davenport, c'est dans cette phase de la recherche que la géométrie est plus générale et plus simple et elle se trouve donc à nouveau du côté de l'heuristique. Vient ensuite le temps de la démonstration finale où l'intuition première doit être vérifiée formellement par des arguments *ad hoc* pouvant être de nature géométrique, analytique ou arithmétique [51]. Aucun de ces types de preuves n'est alors *a priori* plus simple que les autres, cela dépend des situations qui sont étudiées. Une preuve à l'idée géométrique simple peut donc comporter des vérifications arithmétiques longues et compliquées.

Un autre exemple est donné par Davenport qui commente le travail de Minkowski :

> « Minkowski a trouvé une interprétation semi-géométrique du problème qui lui a suggéré des arguments qui se sont avérés être d'une grande généralité et puissance [52]. » [Davenport 1946a]

Le fait qu'à nouveau le verbe « suggérer » soit employé au sujet de la géométrie renforce l'impression que son intervention est particulièrement importante dans le processus de découverte en mathématiques et que dans ce moment de la recherche elle se révèle être générale.

---

51 Naturellement, la caractérisation de ce qui est arithmétique ou analytique mériterait le même type d'enquête que le géométrique.

52 *Minkowski found a semi-geometrical interpretation of the problem which suggested to him arguments which proved to be of great generality and power.*

4. LA GÉOMÉTRIE DES NOMBRES COMME DISCIPLINE OU COMME PRATIQUES MATHÉMATIQUES

La géométrie des nombres est un domaine de recherche qui perdure après le travail de Minkowski et qui est encore actif actuellement. Pendant toute cette période, elle est caractérisée régulièrement par l'intervention de la géométrie en théorie des nombres. L'étude des travaux de quelques mathématiciens engagés dans des recherches sur ce thème a montré que, malgré une certaine stabilité dans les descriptions du sujet, des différences apparaissent sur ce qui est pourtant fondateur de la géométrie des nombres chez Minkowski : le statut de la géométrie.

Bien entendu, il pourrait être naturel d'expliquer ces différences par les contextes et les époques variés dans lesquels ces mathématiciens évoluent. Ce n'est cependant pas complètement satisfaisant, d'une part à cause des stabilités dans les descriptions déjà évoquées ; d'autre part, parce que ce niveau d'explication ne permet pas de saisir réellement les différents points de vues sur la géométrie. La prise en compte de plusieurs échelles d'analyse est alors pertinente : c'est en effet le passage à l'étude de la pratique mathématique qui a permis de nuancer les commentaires sur la géométrie des nombres et en particulier les conceptions sur le statut de la géométrie.

Avec Minkowski, l'intervention de la géométrie en théorie des nombres a deux significations : l'utilisation de notions relevant du continu dans le domaine du discret et la représentation géométrique des phénomènes qu'il étudie. Ces deux aspects sont par ailleurs articulés dans le théorème sur les points d'un réseau dans une partie convexe et la méthode de Minkowski pour le démontrer.

Pour Mordell et Davenport, la géométrie se trouve dans la formulation du problème qui est posé dans le cadre de la géométrie des nombres (à savoir trouver des solutions entières à une inégalité) en terme de recherche de points d'un réseau dans un domaine fixé. C'est ici la nature du problème à résoudre qui définit la géométrie des nombres et non plus un mode particulier d'intervention de la géométrie (application du théorème fondamental ou de la méthode de sa démonstration) comme avec Minkowski.

Des points communs ont néanmoins été observés au sujet de la géométrie chez les trois mathématiciens mais là-encore des nuances doivent être apportées. D'abord, même si elles ont une place plus centrale chez Minkowski, les représentations géométriques sont aussi utilisées par Mordell et Davenport. Elles sont parfois pour tous les trois associées à l'heuristique et doivent donc guider le processus de découverte. Avec Minkowski, ce point fait l'objet d'un discours cohérent qui est au coeur de sa conception de la géométrie des nombres en tant que discipline. En revanche, les commentaires de Mordell et Davenport sur le thème de la géométrie et de l'heuristique sont plus contrastés et peuvent parfois apparaître contradictoires. Cette fois, la cohérence peut être observée à l'échelle de la pratique mathématique. Pour Davenport par exemple, la recherche sur la géométrie des nombres semble suivre un schéma bien précis dans lequel géométrie et arithmétique ont un rôle spécifique. La géométrie intervient en amont pour guider l'heuristique. L'arithmétique n'apparaît que plus tard, c'est le domaine des vérifications formelles, le langage dans lequel la théorie est rédigée sous sa forme finale et donc dans lequel elle est communiquée aux spécialistes. Dans son discours inaugural à l'University College de Londres en 1946, Davenport souligne cette séparation des rôles entre géométrie et arithmétique :

> « les preuves des théorèmes de Minkowski et Blichfeldt, quand elles sont formulées sous forme professionnelle correcte, ne nécessite pas de référence à la géométrie ou à la matière [53]. Elles sont formulées en des termes qui nécessitent des nombres uniquement mais c'est néanmoins d'où vient l'idée [54]. » [Davenport 1946a]

Ainsi, l'emploi de représentations géométriques chez Mordell et Davenport est le plus souvent orienté vers la pratique et ne s'accompagne pas d'un discours général sur la géométrie. Leurs recherches sont organisées

53 L'allusion à la matière fait ici référence à une démonstration de Blichfeldt dans laquelle il utilise des sphères avec une densité de matière [Blichfeldt 1929].

54 *The proofs of both Minkowski's theorem and Blichfeldt's theorem, when expressed in the proper professional form, need no reference to the geometry or to matter. They are expressed in terms which involve numbers only but nevertheless that is where the idea come from.*

autour de la résolution de problèmes [55], il s'agit alors de déterminer l'approche la mieux adaptée à la résolution de la question posée mais ils ne semblent pas attentifs à ce que leur travail prenne place dans un édifice général et cohérent. La discipline n'est pas organisée ici autour d'un noyau de méthodes, d'objets ou de résultats fondamentaux mais elle se caractérise par les questions posées et la pratique des mathématiques mise en place pour les résoudre, pratique qui contient aussi une dimension collective comme le suggère la collaboration entre Mordell et Davenport [56].

En outre, chez Minkowski, les représentations géométriques et la géométrie sont associées à un discours sur l'intuition qui est non seulement utilisée pour caractériser la géométrie des nombres mais qui a aussi un écho plus large à la fin du XIX^{e} siècle dans un contexte où des mathématiciens comme Klein veulent en faire une alternative à l'arithmétisation des mathématiques [Klein 1897] [57].

De Minkowski à Mordell et Davenport, le même vocabulaire est parfois employé dans les commentaires pour décrire la géométrie des nombres. Cependant ce vocabulaire ne désigne pas pour autant la même chose. C'est en particulier apparent lorsque la géométrie des nombres est définie par l'introduction de méthodes géométriques en arithmétique. L'analyse, l'arithmétique ou la géométrie sont des catégories évidentes pour caractériser la pratique des mathématiciens, par ailleurs elles sont utilisées par les acteurs eux-mêmes pour discuter de leur travail. L'exemple de la géométrie des nombres montre cependant que ces catégories ne permettent pas de décrire de façon utile la pratique mathématique sans une analyse préalable et c'est finalement à l'inverse l'étude de la pratique des mathématiciens qui peut permettre d'en comprendre le sens.

55 La définition qu'ils donnent de la géométrie des nombres est cohérente avec cette observation.

56 Les aspects collectifs des recherches de Mordell et Davenport sont discutés dans [Gauthier 2007]. Ils ne se limitent pas à la collaboration entre Mordell et Davenport et se manifestent aussi par exemple dans l'enseignement.

57 Pour une discussion plus détaillée de ce dernier point voir [Gauthier 2010].

BIBLIOGRAPHIE

Blichfeldt (Hans Frederik)

[1914] A New Principle in the Geometry of Numbers, with Some Applications, *Transactions of the American Mathematical Society*, 15 (1914), p. 227–235.

[1929] The Minimum Value of Quadratic Forms, and the Closest Packing of Spheres, *Mathematische Annalen*, 101 (1929), p. 605–608.

Cahen (Eugène) & Vahlen (Karl Theodor)

[1908] Théorie arithmétique des formes, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées,* tome I, 3 (1908), p. 76–214.

Chemla (Karine)

[1998] Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème dit de Menelaus, *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 (1998), p. 163–190.

Corry (Leo)

[2004] *Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918) : From « Grundlagen der Geometrie » to « Grundlagen der Physik »* , Archimedes : New Studies in the History and Philosophy of Science and Technology, vol. 10, Dordrecht : Kluwer, 2004.

Davenport (Harold)

[*WL*] *Personal Papers of Harold Davenport*, Wren Library, Trinity College, Cambridge.

[1937] Note on a Result of Siegel, *Acta Arithmetica*, 2 (1937), p. 262–265.

[1938a] On the Product of Three Homogeneous Linear Forms, *Journal of the London Mathematical Society*, 13 (1938), p. 139–145.

[1938b] On the Product of Three Homogeneous Linear Forms (II), *Proceedings of the London Mathematical Society*, 44 (1938), p. 412–431.

[1939] On the Product of Three Homogeneous Linear Forms (III), *Proceedings of the London Mathematical Society*, 45 (1939), p. 98–125.

[1943] The Minimum of a Binary Cubic Form, *Journal of the London Mathematical Society*, 18 (1943), p. 168–176.

[1946a] 1946 ; Inaugural lecture at the University College, London, le 6 juin 1946 ; dans [Davenport, *WL*, A 59 et C 164].

[1946b] La géométrie des nombres, 1946 ; conférence faite à Bruxelles ; dans [Davenport, *WL*, C 130].

[1947] The Geometry of Numbers, *Nature*, 159 (1947), p. 104–105.

[1948] Notes de cours à Berkeley, 1948 ; dans [Davenport, *WL*, C 165].

[1964] L.J. Mordell, *Acta Arithmetica*, 9 (1964), p. 3–12.

GALISON (Peter Louis)

[1979] Minkowski's Space-Time : From Visual Thinking to the Absolute World, *Historical Studies in the Physical Sciences*, 10 (1979), p. 85–121.

GAUSS (Carl Friedrich)

[1807] *Recherches Arithmétiques*, Courcier, Paris, 1807 ; traduction française par A.C.M Poullet-Delisle des *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801.

[1831] Compte rendu de *Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen* von Ludwig August Seeber, *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 1831 ; reproduit dans *Werke*, vol. II, 1863, p.188-196.

GAUTHIER (Sébastien)

[2007] *La géométrie des nombres comme discipline (1890-1945)*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 2007.

[2008] The Work of Mordell and Davenport : A Transition in the History of the Geometry of Numbers ?, *Oberwolfach Reports*, 2008, p. 1317–1319 ; exposé au workshop *History of Mathematics of the Early 20th Century : The Role of Transition* organisé par Leo Corry, Della Fenster et Joachim Schwermer.

[2010] Justifier l'utilisation de la géométrie en théorie des nombres : des exemples chez C.F. Gauss et H. Minkowski, dans Flament (Dominique) & Nabonnand (Philippe), éd., *La justification en mathématiques*, Paris : Maison des sciences de l'homme, 2010 ; à paraître.

GOLDSTEIN (Catherine)

[2007] The Hermitian Form of Reading the *Disquisitiones*, dans Goldstein (Catherine), Schappacher (Norbert) & Schwermer (Joachim), éd., *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 2007, p. 377–410.

[2010] Un arithméticien contre l'arithmétisation : les principes de Charles Hermite, dans Flament (Dominique) & Nabonnand (Philippe), éd., *La justification en mathématiques*, Paris : Maison des sciences de l'homme, 2010 ; à paraître.

GOLDSTEIN (Catherine) & SCHAPPACHER (Norbert)

[2007] Several Disciplines and a Book (1860-1901), dans Goldstein (Catherine), Schappacher (Norbert) & Schwermer (Joachim), éd., *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 2007, p. 67–103.

HERMITE (Charles)

[1850] Extraits de lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 40 (1850), p. 261–315.

HILBERT (David)

[1911] Gedächtnisrede auf Hermann Minkowski, dans Hilbert (David), Speiser (Andreas) & Weyl (Hermann), éd., *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski*, Teubner, 1911, p. V–XXXI.

HILBERT (David) & COHN-VOSSEN (Stephen)

[1952] *Geometry and the Imagination*, New York : Chelsea Publishing Company, 1952 ; traduction par P. Nemenyi de *Anschauliche Geometrie*, 1932.

JORDAN (Camille)

[1892] Remarques sur les intégrales définies, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 8, 4e série (1892), p. 69–99.

KJELDSEN (Tinne Hoff)

[2002] Different Motivations and Goals in the Historical Development of the Theory of Systems of Linear Inequalities, *Archive for History of Exact Sciences*, 56 (2002), p. 469–538.

[2008] From Measuring Tool to Geometrical Object : Minkowski's Development of the Concept of Convex Bodies, *Archive for History of Exact Sciences*, 62 (2008), p. 59–89.

KLEIN (Felix)

[1897] Sur l'« arithmétisation » des mathématiques, *Nouvelles annales de mathématiques*, 16 (1897), p. 114–128 ; traduction de Vassilief et Laugel d'un discours prononcé devant la société royale des sciences de Göttingen, *Göttinger Nachrichten*, 1895.

[1898] Les nombres idéaux, dans *Conférences sur les mathématiques*, Paris : Traduction de L. Laugel, Hermann, 1898, p. 58–66 ; conférence faite au congrès de mathématiques tenu à l'occasion de l'exposition de Chicago en 1893.

KORKINE (Aleksander Nikolaevich) & ZOLOTAREFF (Egor Ivanovich)

[1873] Sur les formes quadratiques, *Mathematische Annalen*, 6 (1873), p. 366–389.

MEHRTENS (Herbert)

[1990] *Moderne - Sprache - Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*, Frankfurt : Suhrkamp, 1990.

[1996] Modernism vs. Counter-modernism, Nationalism vs. Internationalism : Style and Politics in Mathematics 1900-1950, dans Goldstein (Catherine), Gray (Jeremy) & Ritter (Jim), éd., *L'europe mathématique. Histoires, Mythes, Identités.*, Paris : Maison des sciences de l'homme, 1996, p. 517–529.

MINKOWSKI (Hermann)

[1891a] Théorèmes arithmétiques, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 112 (1891), p. 209–212 ; extrait d'une lettre de Minkowski à Hermite.

[1891b] Ueber Geometrie der Zahlen, *Verhandlungen der 64. Naturforscher- und Ärzteversammlung zu Halle*, 1891, p. 13 ; reproduit dans *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*,vol.1, 1892, p. 64-65 et dans Minkowski [*Abhandlungen*, p. 264–265].

[1891c] Ueber die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 107 (1891), p. 278–297.

[1893] Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite, *Bulletin des sciences mathématiques*, 17, 2e série (1893), p. 24–29.

[1896] Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 15, 3e série (1896), p. 393–403 ; traduction de L. Laugel de la conférence faite à l'occasion de l'exposition de Chicago en 1893.

[1901] Ueber die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen, *Mathematische Annalen*, 54 (1901), p. 91–124.

[1904] Zur Geometrie der Zahlen, *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses,* Heidelberg, 1904, p. 164–173 ; reproduit avec les illustrations utilisées par Minkowski dans [*Abhandlungen*, p. 43–52].

[*Abhandlungen*] *Gesammelte Abhandlungen*, vol. I et II, Leipzig : Teubner, 1911 ; édité par David Hilbert avec la collaboration d'Andreas Speiser et Hermann Weyl.

[1910] *Geometrie der Zahlen*, Leipzig - Berlin : B. G. Teubner, 1910 ; 2e édition (1re édition 1896).

Molk (Jules), éd.

[1911-1915] *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, n°III — Géométrie, Gabay, 1911-1915 ; édition de 1991.

Mordell (Louis Joel)

[1928] Minkowski's Theorem on the Product of Two Linear Forms, *Journal of the London Mathematical Society*, 3 (1928), p. 19–22.

[1935] On Some Arithmetical Results in the Geometry of Numbers, *Compositio Mathematica*, 1 (1935), p. 248–253.

[1941a] On the Product of Two Non-Homogeneous Linear Forms, *Journal of the London Mathematical Society*, 16 (1941), p. 86–88.

[1941b] On the Minimum of a Binary Cubic Form, *Journal of the London Mathematical Society*, 16 (1941), p. 83–85.

[1942] The Product of Three Homogeneous Linear Ternary Forms, *Journal of the London Mathematical Society*, 17 (1942), p. 107–115.

[1943a] The Minimum of a Binary Cubic Form (II), *Journal of the London Mathematical Society*, 18 (1943), p. 210–217.

[1943b] The Minimum of a Binary Cubic Form (I), *Journal of the London Mathematical Society*, 18 (1943), p. 201–210.

[1945] On Numbers Represented by Binary Cubic Forms, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 48, 2e série (1945), p. 198–228.

[1949] The Minimum of a Binary Cubic Form, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 13 (1949), p. 69–76.

[1959] *Reflections of a Mathematician*, Cambridge Univ. Press, 1959 (Discours prononcé en janvier 1955 à Toronto devant la Société Royale du Canada à l'occasion du Canadian Mathematical Congress).

[1961] Review of *An Introduction to the Geometry of Numbers* by J. W. S. Cassels, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 67 (1961), p. 89–94.

[1971] Review of *Geometry of Numbers* by C. G. Lekkerkerker, *Bulletin Canadien de Mathématiques*, 14 (1971), p. 611–613.

NABONNAND (Philippe)

[2010] L'argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles, dans Flament (Dominique) & Nabonnand (Philippe), éd., *La justification en mathématiques*, Paris : Maison des sciences de l'homme, 2010 ; à paraître.

OLDS (C.D.), LAX (Anneli) & DAVIDOFF (Giuliana)

[2000] *The Geometry of Numbers*, vol. 41, Washington : The Mathematical Association of America, 2000.

OPOLKA (Hans) & SCHARLAU (Winfried)

[1985] *From Fermat to Minkowski. Lectures on the Theory of Numbers and its Historical Development*, New York-Berlin-London : Springer, 1985.

PARSHALL (Karen Hunger) & ROWE (David E.)

[1994] *The Emergence of the American Research Community, 1876-1900 : J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore*, History of mathematics, vol. 8, Providence RI ; London : Amer. Math. Soc. — London Mathematical Society, 1994.

REID (Constance)

[1970] *Hilbert*, New York : Springer, 1970 ; [Édition de 1996].

ROGERS (C.A.), BIRCH (B.J.), BURGESS (D.A.) & HALBERSTAM (H.)

[1971] Harold Davenport, *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, 17 (1971), p. 159–192.

ROWE (David E.)

[1989] Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition, *Osiris*, 5 (1989), p. 186–213.

RÜDENBERG (Lily) & ZASSENHAUS (Hans)

[1973] *Hermann Minkowski Briefe an David Hilbert*, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1973.

SCHWERMER (Joachim)

[1991] Räumliche Anschauung und Minima positiv definiter quadratischer Formen, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 93 (1991), p. 49–105.

[2007] Theory of Quadratic Forms : Towards Räumliche Anschauung in Minkowski's Early Work, dans Goldstein (Catherine), Schappacher (Norbert) & Schwermer (Joachim), éd., *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 2007, p. 483–504.

Serre (Jean-Pierre)

[1993] Smith, Minkowski et l'Académie des sciences, avec des notes de Norbert Schappacher. *Gazette des mathématiciens*, 56 (1993), p. 3–9.