

# **Attenuazione e Scattering**

di

Francesca Bianco e Edoardo Del Pezzo

**Osservatorio Vesuviano  
Centro di Sorveglianza,  
Via A. Manzoni, 249  
80123 Napoli**

## **Open File Report # 2**

### **Abstract**

We use the intrinsic and scattering attenuation factors ( $Q_i$  and  $Q_s$ , respectively) in order to describe the attenuation processes of the seismic waves. We discuss some methodologies concerning the estimation of the total quality factor for the experimental data. We also discuss the MLTWA (Multiple Lapse Time Window Analysis) to separately estimate  $Q_i$  and  $Q_s$ , in the hypothesis of multiple scattering model in a random homogeneous medium. We include a MATHCAD™ routine to allow the use of the MLTWA method on a P.C. – Windows 95.

### **Riassunto**

I processi di attenuazione delle onde sismiche dovuti ad effetti di dissipazione intrinseca e di scattering vengono descritti in termini dei rispettivi fattori di qualità,  $Q_i$  e  $Q_s$ . Vengono discusse alcune metodologie per la stima del fattore di qualità totale dai dati sperimentali, e il metodo MLTWA (Multiple Lapse Time Window Analysis) per la stima separata di  $Q_i$  e  $Q_s$ , basato sul modello di scattering multiplo in un mezzo casuale omogeneo. Un foglio MATHCAD™ fornisce ad eventuali utenti la possibilità di utilizzare il metodo MLTWA su un P.C. Windows-95

## Premessa

Questo rapporto è tratto da una serie di lezioni universitarie [Fisica Terrestre per Fisici, Fisica Terrestre per Geologi], di dottorato [dottorato in Fisica XII ciclo] e da molti seminari tenuti sull'argomento. Molti degli argomenti trattati faranno parte di un libro di prossima pubblicazione<sup>1</sup> dal titolo "Sismologia dei vulcani" che verrà utilizzato come testo guida per le lezioni del "Curso Internacional de Volcanologia y Geofísica Volcánica" organizzata da C.S.I.C. spagnolo a Lanzarote nell'Ottobre 1998.

Gli autori sperano che i colleghi che per la prima volta si accingono ad effettuare studi sull'attenuazione sismica, utilizzando le informazioni di questo rapporto possano risparmiare tempo accedendo al programma MATHCAD<sup>TM</sup> incluso.

## **Attenuazione Sismica**

I segnali sismici che attraversano le strutture vulcaniche subiscono il fenomeno dell'attenuazione, che produce una perdita di energia da parte dell'onda primaria, energia che viene spesa per riscaldare il mezzo di propagazione e contemporaneamente per produrre una certa quantità di onde secondarie (Aki and Richards; 1980).

Supponiamo che alla sorgente, o meglio in un suo intorno di raggio  $r_0$ , venga generata l'energia sismica  $E_0$ . Denotiamo con  $E$  l'energia associata ad un ciclo dell'onda sismica. Ad una distanza  $R$  dalla sorgente, la perdita di energia per ciclo sia  $\Delta E$ , nell'ipotesi che

$$\Delta E \ll E.$$

Poniamo inoltre

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi}{Q} \quad (1)$$

Indicando con  $\Delta E_R$  l'energia persa nel percorso  $\Delta R$ , si può scrivere:

$$\frac{\Delta E}{\lambda} = \frac{\Delta E_R}{\Delta R} \quad (2)$$

da cui

$$\Delta E = \lambda \frac{\Delta E_R}{\Delta R} \quad (3)$$

---

<sup>1</sup> in lingua spagnola

Dalla (3)

$$\frac{\Delta E_R}{E} = \frac{\Delta E \Delta R}{\lambda E} = \frac{2\pi}{Q} \frac{\Delta R}{\lambda} = \eta \Delta R \quad (4)$$

$\eta = \frac{2\pi}{\lambda Q}$  viene chiamato coefficiente di assorbimento o di attenuazione.

Le cause che producono l'attenuazione sono essenzialmente, come già accennato, la perdita di energia per riscaldamento del mezzo attraversato e quelle subite da parte dell'onda primaria per generazione di onde secondarie. Quest'ultimo processo viene chiamato "scattering" (termine inglese non direttamente traducibile, ma che può essere impropriamente reso dal termine italiano "diffusione") e il decremento dell'energia delle onde primarie prodotto da questo fenomeno viene chiamato attenuazione per scattering. Il fenomeno del riscaldamento delle rocce al passaggio dell'onda genera invece l'attenuazione intrinseca.

Nell'ipotesi che i due effetti siano sovrapponibili è possibile separare in  $\eta$  la parte intrinseca da quella per scattering.

## Attenuazione per Scattering

Per poter effettuare la separazione tra la parte intrinseca e quella per scattering è necessario un modello di scattering.

Supponiamo che il processo di scattering sia generato da un certo numero di corpi "scatteratori" presenti nel mezzo di propagazione. Tali corpi possono ad esempio essere delle intrusioni magmatiche, fratture, oggetti di densità o rigidità diverse da quelle dei materiali circostanti, ecc. Sia  $n_0$  la loro densità spaziale e  $\sigma$  la sezione d'urto del processo di scattering.

La sezione d'urto è un parametro che esprime un concetto probabilistico, e cioè la probabilità che un pacchetto d'onda (ad esempio un impulso generato dalla sorgente) incontri una eterogeneità, ovvero sia uno dei corpi scatteratori. La sezione d'urto ha le dimensioni fisiche di una lunghezza al quadrato (lunghezza per lunghezza). È evidente che la perdita di energia dell'onda primaria, che incontra nel tratto  $\Delta R$  una densità di scatteratori  $\sigma n_0$  ( $\sigma n_0$  è la densità di scatteratori per unità

di lunghezza) può essere espressa con la seguente formula

$$\frac{\Delta E_R}{E} = \sigma n_0 \Delta R \quad (5)$$

in quanto possiamo considerare  $\Delta E_R$  proporzionale al numero di scatteratori incontrati durante il tragitto  $\Delta R$ .

Dalle relazioni (4) e (5) si deduce:

$$\frac{2\pi}{\lambda Q_s} = \sigma n_0$$

e cioè

$$\frac{2\pi}{Q_s} = \sigma n_0 \lambda = \sigma n_0 \frac{2\pi v}{\omega} \quad (6)$$

con  $v$  e  $\omega$  rispettivamente velocità di propagazione e frequenza angolare.

Dalla (6) si deduce che

$$\frac{1}{Q_s} = \frac{\sigma n_0 v}{\omega} \quad (7)$$

La (7) definisce il cosiddetto “fattore di qualità per scattering”  $Q_s$ .

## Attenuazione Intrinseca

Se

$$\frac{\Delta E_R}{E} = \frac{2\pi\Delta R}{Q_i \lambda}$$

è la frazione di energia persa in dissipazione anelastica (effetti termici)  $Q_i$  viene chiamato fattore di qualità intrinseco.

## Attenuazione Totale

In genere si avrà

$$\frac{\Delta E_{R,T}}{E} = \frac{2\pi}{Q_s} \frac{\Delta R}{\lambda} + \frac{2\pi}{Q_i} \frac{\Delta R}{\lambda} = 2\pi \frac{\Delta R}{\lambda} \left[ \frac{1}{Q_s} + \frac{1}{Q_i} \right] = 2\pi \frac{\Delta R}{\lambda} \frac{1}{Q_T} \quad (8)$$

Da (8)

$$\frac{1}{Q_T} = \frac{1}{Q_s} + \frac{1}{Q_i} \quad (9)$$

Dalla definizione di fattore di qualità totale,  $Q_T$  si ha

$$\frac{\Delta E_{R,T}}{E} = -\frac{2\pi}{Q_T} \frac{\Delta R}{\lambda}$$

$\Delta E_{R,T}$  è il decremento di energia, ed è una quantità negativa.

L'energia di un'onda come è ben noto è proporzionale all'ampiezza al quadrato  $E = k A^2$  con  $k$  costante di proporzionalità.

Passando dagli incrementi ai differenziali, essendo per definizione  $\Delta E \ll E$  si ottiene,

$$\Delta E \cong 2kA\Delta A$$

per cui

$$\frac{2kA\Delta A}{kA^2} = -\frac{2\pi}{Q_T} \frac{\Delta R}{\lambda}$$

da cui

$$\frac{\Delta A}{A} = -\frac{\pi}{Q_T} \frac{\Delta R}{\lambda}$$

passando ai differenziali

$$\frac{dA}{A} = -\frac{\pi}{\lambda Q_T} dR$$

integrando

$$\ln A = \text{cost} - \frac{\pi}{\lambda Q_T} R$$

per  $R=0$  la costante è  $\ln A_0$ , per cui

$$\ln A = \ln A_0 - \frac{\pi}{\lambda Q_T} R$$

da cui

$$A = A_0 \exp \left[ -\frac{\pi R}{Q_T \lambda} \right]$$

oppure

$$A = A_0 \exp \left[ -\frac{\pi R f}{Q_T v} \right]$$

Aggiungendo gli effetti dell'attenuazione per geometria, che per onde sferiche (onde di massa in un mezzo omogeneo 3-D) è  $\frac{1}{R}$ , si ottiene infine

$$A = \frac{A_0}{R} \exp \left[ -\frac{\pi f R}{v Q_T} \right]$$

Nel seguito, per problemi di notazione, la distanza verrà indicata con  $D$ , per cui

$$A = A_0 D^{-1} e^{-\frac{\pi f}{v Q_r} D} \quad (10)$$

## Stima del Fattore di Qualità dai Dati Sismologici

La stima del fattore di qualità è in sostanza la soluzione di un problema inverso in cui i dati sono le ampiezze spettrali dei sismogrammi misurati in funzione della distanza, ed i parametri del modello da ottenere, sono i fattori di qualità degli strati geologici. E' possibile, in relazione al grado di approssimazione che si vuole ottenere, porre una serie di informazioni a priori come vincoli del problema.

Di seguito vengono esaminati alcuni dei possibili schemi di soluzione.

### **a- Caso di Attenuazione Costante**

E' il caso più semplice in cui il parametro da ottenere con il procedimento di inversione è unico. In questo caso si avrà che l'ampiezza spettrale  $A(\omega)$  è esprimibile dalla (10). Ponendo

$$k = \frac{\pi f}{v Q_r} = \frac{\eta}{2}$$

e considerando l'indice  $i$  come indice di stazione ( $i = 1 \dots N$ ) si avrà prendendo il logaritmo di entrambi i membri della (10)

$$\ln A_i(\omega) = \ln A_0(\omega) - \ln D_i - k D_i \quad (11)$$

prendendo la media aritmetica dei  $\ln A_i$  sulle  $N$  stazioni, dalla (11)

$$\langle \ln A_i \rangle = \ln A_0 - \langle \ln D_i \rangle - k \langle D_i \rangle \quad (12)$$

Sottraendo la (11) dalla (12) si ha

$$\ln A_i - \langle \ln A_i \rangle = \langle \ln D_i \rangle - \ln D_i - k [ D_i - \langle D_i \rangle ]$$

ed, indicando le differenze delle medie con  $\delta$  si ha

$$\delta \ln A_i = -\delta \ln D_i - k \delta D_i \quad (13)$$

introducendo l'indice  $j$  per indicare il  $j$ -esimo terremoto, avremo

$$\delta \ln A_{ij} = -\delta \ln D_{ij} - k \delta D_{ij} \quad (14)$$

che può essere risolta nel modo seguente:

$$\text{Ponendo } \delta \ln A_{ij} = d_{ij} \quad ; \quad \delta \ln D_{ij} = -\beta_{ij} \quad ; \quad \delta D_{i,j} = \alpha_{ij}$$

si ha  $d_{ij} - \beta_{ij} = -k \alpha_{ij}$

o in forma di matrice  $\Gamma = -k\alpha$

dove  $\Gamma$  e  $\alpha$  sono due matrici. Il problema in forma matriciale può essere risolto per  $k$ .

## **b- Stima del Fattore di Attenuazione in una Struttura a Blocchi o a Strati**

Indicando, come per il paragrafo precedente, con  $A(\omega)$  la densità di ampiezza spettrale alla frequenza  $\omega$ , supponiamo per fissare le idee che la struttura della terra nel settore interessato alla propagazione delle onde sia a strati piani e paralleli. I risultati si potranno estendere facilmente anche al caso di una struttura a blocchi.

Introduciamo i seguenti indici:

$s$  = indice degli strati

$S$  = numero degli strati

$N_s$  = numero delle stazioni

$N_T$  = numero di terremoti

Per un raggio che collega la sorgente  $j$ -ma con la stazione  $i$ -ma, che avrà attraversato tutti gli strati si avrà

$$A_{i,j}(\omega) = \frac{A_{0,j}(\omega)}{D_{i,j}} \exp \left[ - \sum_{s=1}^S k_s D_{i,j,s} \right]$$

con  $D_{i,j} = \sum_{s=1}^S D_{i,j,s}$ , distanza totale percorsa dal raggio che collega il  $j$ -mo terremoto con la stazione  $i$ -ma, e  $D_{i,j,s}$  la lunghezza dell'intersezione del raggio con i confini dello strato di indice  $s$ .

Si avrà, omettendo l'indice  $j$  per comodità di notazione:

$$\ln A_i = \ln A_0 - \ln D_i - \sum_{s=1}^S k_s D_{is} \quad (15)$$

Passando ai valori medi della (15)

$$\langle \ln A_i \rangle = \ln A_0 - \langle \ln D_i \rangle - \left\langle \sum_{s=1}^S k_s D_{is} \right\rangle \quad (16)$$

Inoltre

$$\langle \sum_{s=1}^S k_s D_{is} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^S k_s D_{is} = \sum_{s=1}^S k_s \sum_{i=1}^N \frac{D_{is}}{N} = \sum_{s=1}^S k_s \langle D \rangle_s$$

dove  $\langle D \rangle_s$  è la media dei tratti di raggio nello strato s-mo.

Sottraendo la (16) dalla (15) si ha

$$\begin{aligned} \ln A_i - \langle \ln A_i \rangle &= \langle \ln D_i \rangle - \ln D_i - \sum_{s=1}^S k_s D_{is} + \sum_{s=1}^S k_s \langle D \rangle_s = \\ &= \langle \ln D_i \rangle - \ln D_i + \sum_{s=1}^S k_s (\langle D \rangle_s - D_{is}) \end{aligned}$$

con le stesse notazioni del paragrafo precedente.

Si noti che le ampiezze spettrali devono preventivamente essere corrette per il sito.

Introducendo l'indice j, che tiene conto del terremoto, si ha

e chiamando

$$\delta \ln A_{ij} = -\delta \ln D_{ij} + \sum_{s=1}^S k_s \left( \langle D \rangle_{sj} - D_{ijs} \right) \quad (17)$$

$$d_{ij} = \delta \ln A_{ij} + \delta \ln D_{ij}$$

$$\alpha_{sij} = \langle D \rangle_{sj} - D_{ijs}$$

si ha

$$d_{ij} = \sum_s k_s \alpha_{sij}$$

esplicitando:

$$\begin{cases} d_{11} = k_1 \alpha_{111} + k_2 \alpha_{211} + \dots + k_S \alpha_{S11} \\ \vdots \\ d_{N_S 1} = k_1 \alpha_{1N_S 1} + k_2 \alpha_{2N_S 1} + \dots + k_S \alpha_{SN_S 1} \\ \\ d_{12} = k_1 \alpha_{112} + k_2 \alpha_{212} + \dots + k_S \alpha_{S12} \\ \vdots \\ d_{N_S 2} = k_1 \alpha_{1N_S 2} + k_2 \alpha_{2N_S 2} + \dots + k_S \alpha_{SN_S 2} \\ \\ \vdots \\ d_{1N_T} = k_1 \alpha_{11N_T} + k_2 \alpha_{21N_T} + \dots + k_S \alpha_{S1N_T} \\ \vdots \\ d_{N_S N_T} = k_1 \alpha_{1N_S N_T} + k_2 \alpha_{2N_S N_T} + \dots + k_S \alpha_{SN_S N_T} \end{cases}$$

cioè, in forma matriciale

$$\underline{d} = \underline{G} \underline{k}$$

con:

$\underline{G} \equiv$  matrice ( $R \times S$ )

$\underline{d} \equiv$  matrice ( $R \times 1$ )

$\underline{k} \equiv$  matrice ( $S \times 1$ )

dove  $R = N_T \times N_S$

Scrivendo le matrici in forma esplicita, si ha:

$$\begin{bmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{N_S 1} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{N_S 2} \\ \vdots \\ d_{1N_T} \\ \vdots \\ d_{N_S N_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{111} & \dots & \alpha_{S11} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{1N_S 1} & \dots & \alpha_{SN_S 1} \\ \alpha_{112} & \dots & \alpha_{S12} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{1N_S 2} & \dots & \alpha_{SN_S 2} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{11N_T} & \dots & \alpha_{S1N_T} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{1N_S N_T} & \dots & \alpha_{SN_S N_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_S \end{bmatrix}$$

Il problema è risolubile in norma  $L_2$

In termini di attenuazione differenziale si può scrivere (Solomon and Toksoz,1970)

$$k_s = \bar{k} + \delta k_s$$

ove  $\bar{k}$  è il coefficiente di attenuazione medio dell'area e  $\delta k_s$  è la variazione del coefficiente di attenuazione nello strato  $s$

Risulterà quindi

$$\delta \ln A_{ij} = -\delta \ln D_{ij} + \sum_s \bar{k} (\langle D \rangle_{sj} - D_{ijs}) + \sum_s \delta k_s (\langle D \rangle_{sj} - D_{ijs}) \quad (18)$$

Se  $\bar{k}$  è noto nell'area il problema si risolve per  $\delta k_s$ .

Ponendo

$$d_{ij} = \delta \ln A_{ij} + \delta \ln D_{ij} + \sum_s \bar{k} (\langle D \rangle_{sj} - D_{ijs})$$

e

$$\alpha_{sij} = \langle D \rangle_{sj} - D_{ijs}$$

si ha:

$$d_{ij} = \sum_s \delta k_s \alpha_{sij}$$

in termini di matrici si ha

$$\underline{d} = \underline{G} \underline{\delta k}$$

anche in questo caso il problema è risolubile in norma  $L_2$ . Si veda anche Ponko & Sanders, 1994.

Naturalmente quello ora esposto è uno degli esempi possibili. Scrivendo opportunamente lo schema di inversione è possibile risolvere problemi analoghi con altre condizioni al contorno.

### **c Stima congiunta del Fattore di Attenuazione Medio e della Risposta di Sito**

Introducendo il termine di sito  $S$ , è possibile scrivere l'ampiezza dell'onda nel modo seguente:

$$A = SA_0 D^{-1} e^{-kD} \quad (19)$$

Per un evento registrato a  $N$  stazioni ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) si ha:

$$\ln A_i = \ln S_i + \ln A_0 - \ln D_i - kD_i \quad (20)$$

Prendendo la media sulle  $N$  stazioni

$$\langle \ln A_i \rangle = \langle \ln S_i \rangle + \ln A_0 - \langle \ln D_i \rangle - k \langle D_i \rangle \quad (21)$$

e sottraendo la 21 dalla 20 si ha:

$$\ln A_i - \langle \ln A_i \rangle = \ln S_i - \langle \ln S_i \rangle + \langle \ln D_i \rangle - \ln D_i - k(D_i - \langle D_i \rangle)$$

cioè

$$\delta \ln A_i = \delta \ln S_i - \delta \ln D_i - k \delta D_i \quad (22)$$

introducendo l'indice  $j$  per il terremoto  $j$ -esimo,

$$\delta \ln A_{ij} = \delta \ln S_i - \delta \ln D_{ij} - k \delta D_{ij} \quad (23)$$

con le stesse notazioni precedenti

$$\delta \ln A_{ij} = d_{ij}$$

$$\delta \ln D_{ij} = \beta_{ij}$$

$$\delta D_{ij} = \alpha_{ij}$$

e ponendo:

$$\varepsilon_i = \delta \ln S_i$$

si può scrivere:

$$d_{ij} + \beta_{ij} = \varepsilon_i - k\alpha_{ij} \quad (24)$$

Definendo  $F_{ij} = d_{ij} + \beta_{ij}$  con  $(j=1,\dots,N_{TERR})$  e con  $(i=1,\dots,N_{STAZ})$  la (24) diventa (in notazione matriciale):

$$\underline{F} = \underline{\varepsilon} - k\underline{\alpha}$$

esplicitando:

$$\begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ \vdots \\ F_{N_{STAZ}1} \\ F_{12} \\ \vdots \\ F_{N_{STAZ}2} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{1N_{TERR}} \\ \vdots \\ F_{N_{STAZ}N_{TERR}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & \alpha_{11} \\ 0 & 1 & \vdots & & \alpha_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \alpha_{N_{STAZ}1} \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & \alpha_{12} \\ 0 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \alpha_{N_{STAZ}2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & \alpha_{1N_{TERR}} \\ 0 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \alpha_{N_{STAZ}N_{TERR}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_{N_{STAZ}} \\ -k \end{bmatrix}$$

E' possibile osservare la presenza di  $N_{TERR}$  sub-matrici quadrate di dimensioni  $(N_{STAZ} \times N_{STAZ})$ . Esse presentano tutti gli elementi nulli tranne quelli sulle diagonali principali, che invece sono pari ad 1.

Si è così ottenuta una forma del tipo

$$\underline{d} = \underline{mG} .$$

Essa può essere risolta in norma  $L_2$

Si noti che nei casi ora descritti è stato descritto come stimare l'attenuazione totale, che è la somma dei coefficienti di attenuazione per scattering ed intrinseca. La separazione dei due coefficienti può essere ottenuta solo con misure relative al

campo d'onda prodotto dai fenomeni di scattering nel mezzo, ipotizzando che si realizzi uno dei modelli di scattering.

## **Lo Studio del Campo di Onda Prodotto dai Fenomeni di Scattering: le Onde di Coda**

L'argomento di questo paragrafo è trattato in un foglio di lavoro MATHCAD™ esplicativo, che è accluso al presente Open File.

E' ormai ben provato sperimentalmente che la "coda" dei terremoti locali ( $0 < \Delta < 100$  Km ) è composta principalmente da una radiazione di tipo S prodotta da fenomeni di scattering nella litosfera. Un "review" dei risultati sperimentali è contenuto in Sato and Fehler, 1998.

Esse possono essere descritte sinteticamente nei punti seguenti:

1. Le onde di coda presentano un involuppo regolare ben adattabile alla forma funzionale di un esponenziale decrescente
2. Le onde di coda hanno una durata proporzionale alla magnitudo locale
3. La forma dell'esponenziale e la durata della coda dipendono poco dalla distanza ipocentro-stazione e dal sito. Eventuali differenze tra l'andamento degli involuppi per lo stesso terremoto a diverse stazioni sono evidenti solo per siti con risposta anomala

Le onde di coda sono in sostanza il risultato di un processo di genesi nel mezzo di propagazione, dato che le caratteristiche delle code sono simili per diversi terremoti allo stesso sito.

Un modello che spiega in modo approssimativo questi risultati sperimentali è il cosiddetto "modello a scattering singolo", che ipotizza un mezzo di propagazione "random", cioè caratterizzato da una distribuzione di "scatteratori" casuale ma uniforme. Gli "scatteratori" rappresentano le disomogeneità geologiche nel mezzo di propagazione, che potrebbero essere descritte in termini di teoria dell'elasticità da disomogeneità nei parametri elastici. Tenendo conto solo dei processi di scattering che avvengono per interazione dell'onda primaria con gli stessi scatteratori (approssimazione al primo ordine), il lavoro pionieristico e fondamentale di Aki e Chouet, (1975) insieme a quello di Sato (1977) ben descrivono la derivazione del modello che può essere sintetizzato, per una stazione molto vicina

alla sorgente, con la relazione:

$$A(\omega, t) = A_0(\omega) t^{-m} \exp\left(-\frac{\omega t}{2Q}\right)$$

oppure, ponendo  $\eta = \frac{2\pi f}{vQ}$ :

$$A(\omega, t) = A_0(\omega) t^{-m} \exp\left(-\frac{\eta v t}{2}\right) \quad (25)$$

$A(\omega, t)$  è l'involuppo delle onde, in funzione del "lapse time"  $t$ , ottenuto filtrando il segnale intorno alla frequenza  $\omega$ .

Il modello a scattering singolo è ampiamente utilizzato per stimare il fattore di qualità di un'area con un metodo semplice e di rapido utilizzo. I dati sperimentali di tutto il mondo hanno fornito in sintesi i seguenti risultati:

Il fattore di qualità del mezzo  $Q$ , che da questo momento in poi chiameremo  $Q$ -coda o  $Q_c$ , è dipendente dalla frequenza con una legge del tipo:

$$Q_c = Q_0 f^n.$$

dove  $Q_0$  ed  $n$  sono una caratteristica dell'area tettonica in cui è stata condotta l'analisi; per tale motivo questi due parametri sono da molti considerati degli indicatori tettonici.

Nelle aree vulcaniche l'andamento di  $Q$ -coda con la frequenza è diverso da quello in aree non vulcaniche.

Il significato fisico di  $Q$ -coda è ancora oggi oggetto di un dibattito legato sostanzialmente agli sviluppi teorici del modello a scattering singolo. Se, infatti, estendiamo il modello anche ad interazioni di ordine superiore, il modello si complica e può essere esplicitato in termini di due parametri:

- ❖  $Q_i$  fattore di qualità intrinseco
- ❖  $Q_s$  fattore di qualità per scattering

Secondo l'approccio di Gao et al., (1983) il modello prevede che, all'approssimazione di ordine 8

$$A(\omega, t) = \sqrt{\frac{2\omega S(\omega)}{Q_s v^2 t^2}} \exp\left(-\frac{\omega t}{2Q}\right) \left(1 + 1.23 \frac{\omega t}{Q_s} \exp\left(0.33 \frac{\omega t}{Q_s}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

oppure

$$A(\omega, t) = \sqrt{\frac{2S(\omega)}{\eta_s v t^2}} \exp\left(-\frac{\eta_T v t}{2}\right) (1 + 1.23 \eta_s v t \exp(0.33 \eta_s v t))^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

Frankel & Wennerberg (1987), applicando il principio di conservazione dell'energia esplicitano il ben noto ( in astrofisica ) modello a flusso di energia per spiegare l'andamento sperimentale dell'inviluppo della coda. In tale modello l'ampiezza dell'inviluppo della coda può essere scritto come

$$A(t) = \text{cost} \cdot t^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\eta_i v t}{2}\right) \sqrt{1 - \exp(-v \eta_s t)} \quad (27)$$

Si noti che la dipendenza da  $\omega$  non è esplicita ma contenuta nella definizione di  $\eta$ , e che per alti valori di  $Q_s$ , cioè per  $\eta_s$  piccoli, il modello si riduce a quello di scattering singolo.

Le formulazioni descritte dalle 25, 26 e 27 sono tutte con stazioni ed ipocentro coincidenti. In questa ipotesi risulta impossibile utilizzando i modelli descritti, invertire il dato sperimentale rappresentato dall'inviluppo della coda in termini di  $Q_i$  e  $Q_s$  o, il che è lo stesso, in termini di  $\eta_i$  ed  $\eta_s$  ottenendo la separazione dei due parametri.

Per ottenere tale stima separatamente è necessario esprimere l'andamento dell'inviluppo della coda in funzione del lapse time e della distanza ipocentro-stazione.

Ciò è possibile per il modello a scattering singolo (Sato, 1977) e per lo scattering multiplo (Hoshiba, 1991; Zeng, 1991). Per lo scattering singolo, l'ampiezza dell'inviluppo sarà data da:

$$|A_s(r, t)|^2 = E(t, r) = \frac{\eta_s}{2\pi r^2} R\left(\frac{v t}{r}\right) \exp(-(\eta_i + \eta_s) \cdot vt) \quad (28)$$

dove

$$R\left(\frac{v t}{r}\right) = \frac{1}{v t / r} \ln \left( \frac{\frac{v t}{r} + 1}{\frac{v t}{r} - 1} \right)$$

La funzione  $R(\alpha)$  viene chiamata “correzione di Sato” (Sato,1976).

Per lo scattering multiplo è possibile utilizzare la formulazione approssimata di Zeng (1991) per la quale l’energia delle onde di coda in funzione del lapse time e della distanza, o, equivalentemente, l’ampiezza dell’involuppo al quadrato, viene espressa da

$$|A_{ZENG}|^2 = \frac{\delta(t - r/v)}{4\pi r^2 v} + \eta_s \frac{\phi(t - r/v)}{4\pi r v t} \ln\left(\frac{1 + r/vt}{1 - r/vt}\right) \exp(-\eta_T vt)$$

$$C(t) \phi(t - r/v) \left(3 \frac{\eta_s}{4\pi v t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{3\eta_s r^2}{4vt} - \eta_i vt\right) \quad (29)$$

La 29 è stata ottenuta interpolando il modello di cui alla 28 per brevi lapse time e l’equazione per la diffusione per lunghi lapse time. Per il significato dei simboli si veda il foglio MATHCAD™ accluso.

Mayeda et al. (1992) utilizzano al posto della (29) un involuppo sintetico Hoshiha et al. (1991). La simulazione numerica dei processi di scattering utilizzata da Hoshiha (1991) è del tutto equivalente alla formulazione teorica espressa dalla (29). La tecnica utilizzata per effettuare la stima separata di  $\eta_i$  ed  $\eta_s$  viene chiamata MLTWA (Multiple Lapse Time Window Analysis) ed è sinteticamente descritta nella formulazione seguente.

Si misurano gli involuppi sperimentali dell’energia della coda, che chiameremo  $E_{EXP}(t,r)$ , a partire da  $t=t_s$  (tempo di tragitto dell’onda S), per un insieme di terremoti con distanza ipocentro-stazione  $r$ .

Poniamo

$$t_1(r) = \frac{r}{v} \quad t_2(r) = \frac{r}{v} + \Delta r \quad t_3(r) = \frac{r}{v} + 2\Delta r \quad t_4(r) = \frac{r}{v} + 3\Delta r$$

Si calcolano dai dati sperimentali le seguenti espressioni per ogni terremoto alla distanza  $r$  dalla stazione, ottenendo una serie di valori calcolati in funzione di  $r$ :

$$E_i(r) = \frac{1}{t_{i+1}(r) - t_i(r)} \frac{\int_{t_i(r)}^{t_{i+1}(r)} E(r, t) dt}{E(r, t^*)} \quad (30)$$

dove  $i=1,2,3$  e  $t^*$  è un valore di riferimento del lapse time uguale per tutti i dati. Si adattano quindi i valori ottenuti dai dati sperimentali ai valori teorici ottenuti sostituendo nelle (30) l'espressione (29). Il tipo di fit può essere basato sulla minimizzazione della somma dei quadrati dei residui tra curve teoriche e sperimentali.

Alcuni approcci basati su questo tipo di formulazione hanno portato a risultati interessanti nelle aree delle Hawaii, Long Valley, California (Mayeda, 1992), Turchia, Spagna Meridionale (Akinci et al., 1995) e Giappone (Hashiba, 1993). I risultati sperimentali confermano che Q-coda calcolato con il modello a scattering singolo è molto vicino a Q-intrinseco confermando quanto Frankel & Wennerberg (1987) misero in luce con considerazioni teoriche. Questa ultima evidenza permette di ri-interpretare i risultati relativi alle misure di Q-coda ottenute fin ora. Inoltre disponendo di una stima di Q-totale, effettuata indipendentemente da quella di Q-coda, è possibile stimare Q-scattering nel modo seguente:

poiché

$$Q_T^{-1} = Q_i^{-1} + Q_{scatt.}^{-1} \approx Q_{coda}^{-1} + Q_{scatt.}^{-1}$$

è semplice ricavare  $Q_{scatt.}^{-1}$ .

Stime in tal senso effettuate su alcuni vulcani mostrano che:

$$Q_s \ll Q_i$$

(Del Pezzo et al;1995). Tali misure indicano che il ruolo delle eterogeneità è più forte di quello delle trasformazioni intrinseche di energia elastica in termica.

Ciò è stato interpretato da Del Pezzo et al. (1995) come un ridimensionamento dell'ipotizzato ruolo dei magmi (Aki, 1980) nella causa dell'attenuazione sismica in aree vulcaniche.

## Bibliografia

Aki, K. & P.G. Richards, (1980). Quantitative Seismology: Theory and Methods. W.H. Freeman and company, New York.

- Aki, K. & Chouet, B.A., (1975). Origin of coda waves: source, attenuation and scattering effects. *J. Geophys. Res.*, Vol. 80, No. 23, pp. 3322-3342.
- Akinci, A., E. Del Pezzo, J.M. Ibanez, (1993). Separation of scattering and intrinsic attenuation in Southern Spain and Western Anatolia (Turkey). *Geophys. J. Int.*, 121,337-353
- Del Pezzo ,E. Ibanez, J., Morales, J.,Akinci, A. and Maresca, R. (1995) Measurements of Intrinsic and Scattering Seismic attenuation in the Crust. *Bull Seism. Soc Am.*, 85,5 1373-1380
- Frankel, A.D. & L. Wennerberg, (1987). Energy-flux model of seismic coda: Separation of scattering and intrinsic attenuation. *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 77, No. 4, pp.1223-1251.
- Gao, L.S., N.N. Biswas ,L.C. Lee & K. Aki, (1983). Effects of multiple scattering on coda waves in three- dimensional medium. *Pure Appl. Geophys.*, Vol. 121, No. 1, pp. 3-15.
- Gao, L.S., L.C. Lee, N.N. Biswas & K. Aki, (1983, b). Comparison of the effects between single and multiple scattering on coda waves for local earthquakes. *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 73, No. 2, pp. 377-389.
- Hoshiya,1991 Simulation of multiple-scattered coda wave excitation based on the energy conservation law, *Phys. Earth Planet. Int.*, 67, 123-136
- Hoshiya, M. (1993) Separation of scattering attenuation and intrinsic absorption in Japan using Multiple Lapse Time Window analysis of full seismogram envelope, *J. Geophys. Res*, 98,15809-15824
- Mayeda, K., S. Koyanagi, M. Hoshiya, K. Aki, and Y. Zeng, A (1992) comparative study of scattering, intrinsic, and coda  $Q^{-1}$  for Hawaii, Long Valley, and central California between 1.5 and 15.0 Hz, *J Geophys. Res.*, 97, 6643-6659,.
- Ponko, S.C., and Sanders, C.O.,(1994) Inversion for P- and S-wave attenuation structure, Long Valley Caldera, California: *J. Geophys. Res.*,99 2619-2635

- Sato, H., (1977) Energy propagation including scattering effects. Single isotropic scattering approximation. *J. Phys. Earth* 25, 27-41
- Sato,H. and Fehler, M. C. (1998) Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth. Springer-Verlag, New York.
- Sato, H. (1977). Energy propagation including scattering effects single isotropic scattering approximation. *J. Phys. Earth*, Vol. 25, pp. 27-41.
- Solomon, S.C. and Toksoz,M.N.(1970). Lateral variation of attenuation of P- and S- waves beneath the United States. *Bull. Seism. Soc. Am.*,60,819-838
- Sato, H.,(1977, b). Single isotropic scattering model including wave conversion of the short period body wave propagation *J. Phys. Earth*, Vol. 25, pp. 163-176.
- Zeng, Y.(1991) Compact solutions for multiple scattered wave energy in time domain. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 81,1022-1029

# Appendice

## Modello di scattering multiplo

Il programma calcola:

- a) La soluzione approssimata della soluzione completa dello scattering multiplo
- b) Esegue un test riproducendo i grafici del lavoro di Mayeda et al., 1992
- c) Esegue un confronto del modello a scattering multiplo con il modello a scattering singolo

I parametri sono i seguenti:

$E_0=1$  Energia alla sorgente

$v$ =velocità

$\eta_s$ =coefficiente di att. per scattering

$\eta_i$ =coeff di att. intrinseca

$\eta$ =coeff. di att. totale= $\eta_s+\eta_i$

Definizione della funzione delta di Dirac

$f(x) := 0$

$\text{Dirac}(x) := \text{if}(x \neq 0, f(x), \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Dirac}(x) dx$$

=

1

$\text{Dirac}(0) = 1 \cdot 10^{307}$

$\text{Dirac}(1) = 0$

Range di variazione della variabile  $r$ (Km): distanza, e  $t$ (secondi): "lapse time".  $v=4$  (/Km/sec) e' la velocità media del mezzo interessato alla propagazione

$r := 10.. 70$

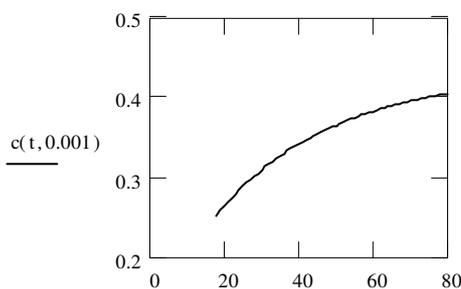
$t := 18.. 80$

$v := 4$

Il modello viene di seguito espresso in funzione dei parametri  $\eta_i, \eta_s, r, t$

Per ogni termine viene graficato l'andamento

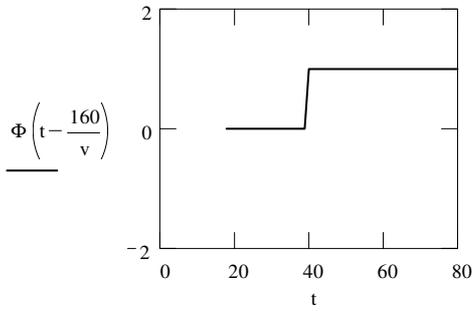
$$c(t, \eta_s) := \frac{(1 - (1 + \eta_s \cdot v \cdot t) \cdot \exp(-\eta_s \cdot v \cdot t))}{\int_0^{\sqrt{3 \cdot \eta_s \cdot v \cdot t}} \frac{\exp[-(\alpha)^2] \cdot \alpha^2 d\alpha}{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}}$$



$$E1(r, t, \eta_i, \eta_s) := \left[ \frac{\text{Dirac}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4 \cdot \pi \cdot v \cdot r^2} + \eta_s \cdot \frac{\Phi\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4 \cdot \pi \cdot r \cdot v \cdot t} \cdot \ln \left[ \frac{1 + \frac{r}{v \cdot t}}{1 - \frac{r}{v \cdot t}} \right] \right] \cdot \exp(-(\eta_s + \eta_i) \cdot v \cdot t)$$

L'energia del pacchetto d'onda ovviamente è nulla per  $t$  (lapse time)  $< r/v$ .

$\Phi(x)$  e' la funzione di Heaviside, graficata, a mo' di esempio nel grafico per  $r=160$  Km

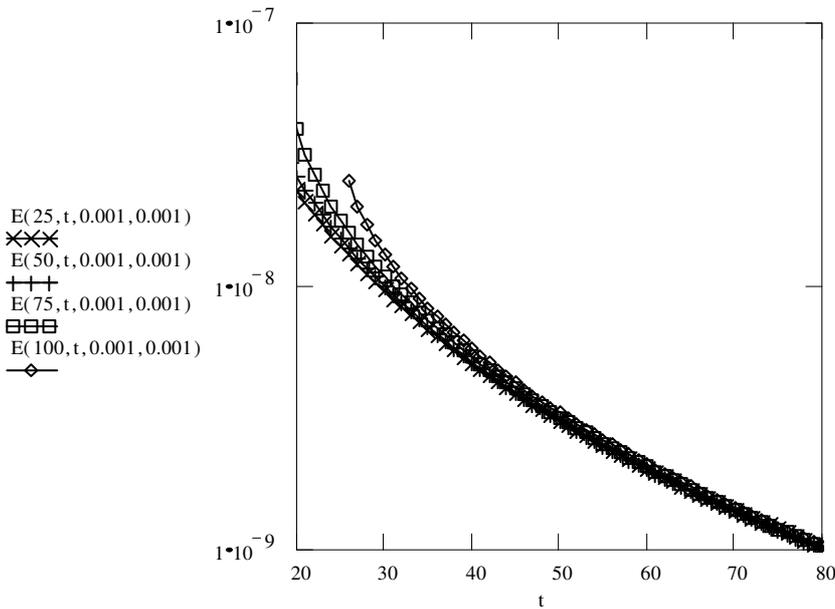


$$E2(r, t, \eta_i, \eta_s) := c(t, \eta_s) \cdot \Phi\left(t - \frac{r}{v}\right) \cdot \left(\frac{3 \cdot \eta_s}{4 \cdot \pi \cdot v \cdot t}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(\frac{-3 \cdot \eta_s \cdot r^2}{4 \cdot v \cdot t} - \eta_i \cdot v \cdot t\right)$$

$$E(r, t, \eta_i, \eta_s) := E1(r, t, \eta_i, \eta_s) + E2(r, t, \eta_i, \eta_s)$$

$E(r, t)$  esprime l' energia delle onde scatterate in funzione di  $r$ , la distanza, e  $t$ , il lapse time, nel caso di scattering multiplo. Il modello è ottenuto come approssimazione del modello completo di Zeng (1991)

Ad esempio, fissando la distanza ad  $r=25, 50, 75, 100$  Km l'andamento dell'energia in funzione del lapse time è mostrato nel grafico seguente



Il test seguente è preso da Mayeda et al., 1992. JGR vol 97, B5 6643-6659

ed è relativo al grafico in alto di pag. 6652 con  $Bo=0.44$  ed  $Le=2326$ .  $Bo$  e  $Le$  sono rispettivamente l'albedo e la lunghezza di estinzione, che possono essere espressi in funzione di  $\eta_s$  ed  $\eta_i$  dalle:

$$Le^{-1} = \eta_i + \eta_s; Bo = Le \cdot \eta_s$$

I seguenti parametri sono fissati per illustrare i grafici

$$\eta_i := 0.024$$

$$\eta_s := 0.019$$

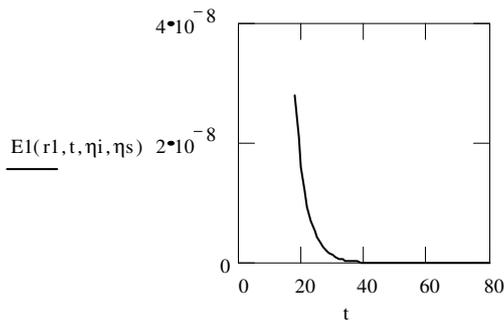
$$t1 := 18$$

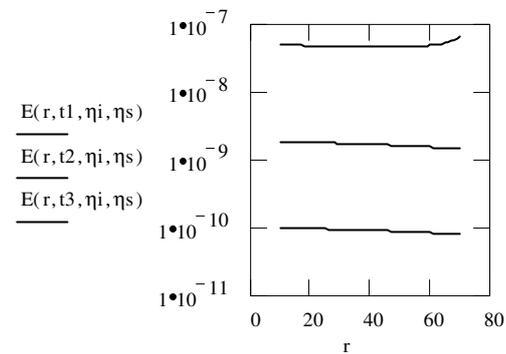
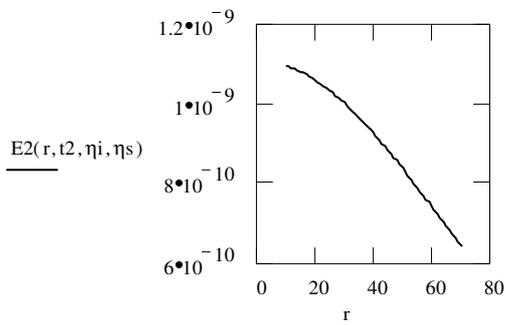
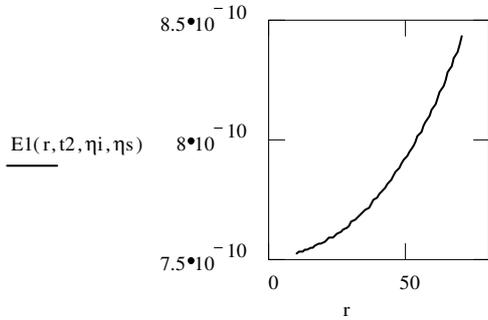
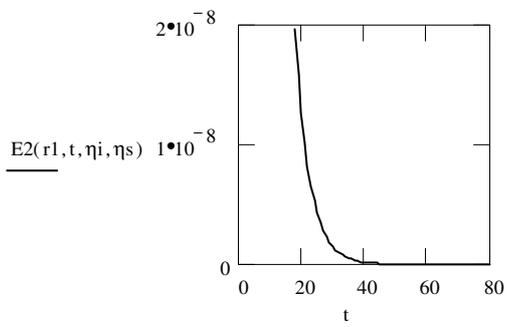
$$t2 := 32$$

$$t3 := 46$$

$$t4 := 60$$

$$r1 := 30$$





$E_0(t)$  esprime l'energia delle onde scatterate in funzione del lapse time nel caso di scattering multiplo e sorgente coincidente con la stazione

$$x := 0, 0.01.. \frac{\pi}{2}$$

$$E_0(t, \eta_i, \eta_s) := \frac{\eta_s^3 \cdot e^{-(\eta_i + \eta_s) \cdot v \cdot t}}{2 \cdot \pi} \cdot \left[ \frac{1}{(\eta_s \cdot v \cdot t)^2} + \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{1}{\eta_s \cdot v \cdot t} + \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^4}{(\sin(x))^2} \cdot e^{\eta_s \cdot v \cdot t \cdot x \cdot \cot(x)} dx \right]$$

### Confronto con il modello di scattering singolo

$$K(\alpha) := \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left( \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \right)$$

$$E_{0\sin}(t, \eta_i, \eta_s) := \frac{\eta_s}{2 \cdot \pi \cdot v^2} \cdot t^{-2} \cdot e^{-(\eta_i + \eta_s) \cdot v \cdot t}$$

$E_{0\sin}(t)$  è l' energia delle onde scatterate nel modello single scattering per sorgente coincidente con la stazione

$$E_{\sin}(r, t, \eta_i, \eta_s) := \frac{\eta_s}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \left[ K \left( \frac{v \cdot t}{r} \right) \cdot e^{-(\eta_i + \eta_s) \cdot v \cdot t} \right]$$

Correzione di Sato per la distanza nel modello  
single scattering

$E_{sin}(r,t)$  è l' energia delle onde scatterate nel modello single  
scattering in funzione di  $r$  e  $t$ .

## Metodo MLTWA - Multiple lapse time window analysis

Il metodo consiste nell' adattare ai dati sperimentali l' integrale dell' energia delle onde di coda calcolato in tre differenti finestre lungo  
la coda, in funzione della distanza  $r$ .

Nel nostro esempio consideriamo le tre finestre tra  $t_1$  e  $t_2$ ,  $t_2$  e  $t_3$ ,  $t_3$  e  $t_4$ .

I tempi  $t_1 \dots t_4$  dipendono da  $r$ . Porre attenzione. Quando si stima l' energia dal sismogramma  
bisogna stimarla in finestre che iniziano dal tempo di arrivo delle onde  $S$

$r := 10, 15, \dots, 80$

$$t_1(r) := \frac{r}{v}$$

$$t_2(r) := \frac{r}{v} + 14$$

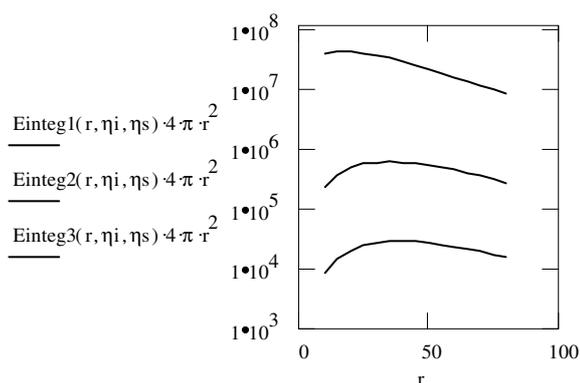
$$t_3(r) := \frac{r}{v} + 2 \cdot 14$$

$$t_4(r) := \frac{r}{v} + 3 \cdot 14$$

$$E_{integ1}(r, \eta_i, \eta_s) := \frac{\int_{t_1(r)}^{t_2(r)} E(r, t, \eta_i, \eta_s) dt}{t_2(r) - t_1(r)}$$

$$E_{integ2}(r, \eta_i, \eta_s) := \frac{\int_{t_2(r)}^{t_3(r)} E(r, t, \eta_i, \eta_s) dt}{t_3(r) - t_2(r)}$$

$$E_{integ3}(r, \eta_i, \eta_s) := \frac{\int_{t_3(r)}^{t_4(r)} E(r, t, \eta_i, \eta_s) dt}{t_4(r) - t_3(r)}$$



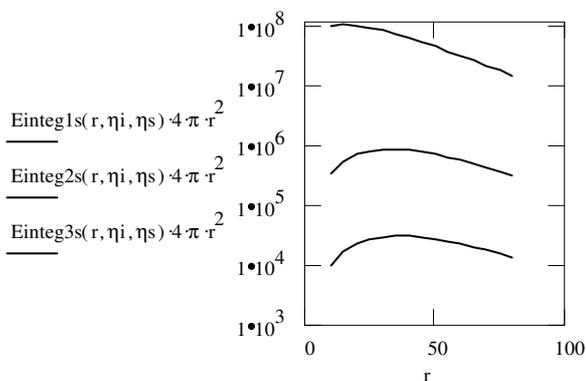
Il grafico a fianco rappresenta l'andamento teorico delle tre curve in funzione della distanza  $r$ . Tale andamento teorico deve essere  
adattato ai dati sperimentali

Utilizzando invece il modello a scattering singolo, otterremo analogamente

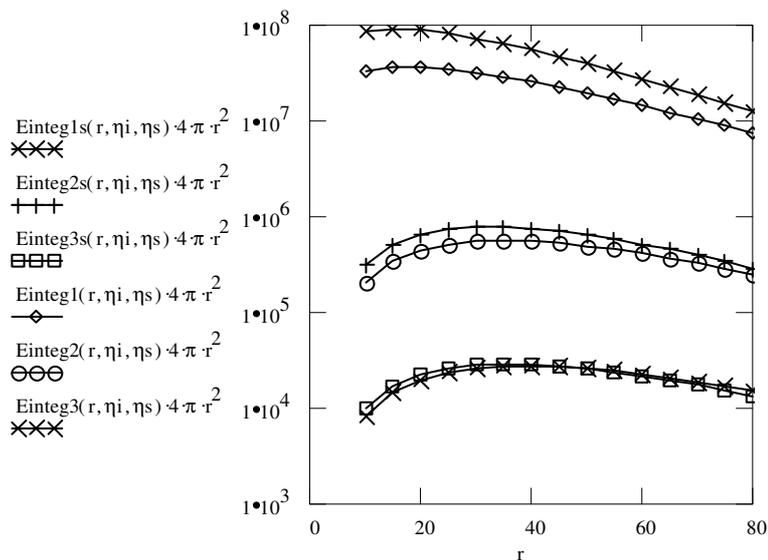
$$E_{integ1s}(r, \eta_i, \eta_s) := \frac{\int_{t_1(r)}^{t_2(r)} E_{sin}(r, t, \eta_i, \eta_s) dt}{t_2(r) - t_1(r)}$$

$$E_{\text{integ2s}}(r, \eta_i, \eta_s) := \frac{\int_{t_2(r)}^{t_3(r)} E_{\text{sin}}(r, t, \eta_i, \eta_s) dt}{t_3(r) - t_2(r)} \cdot \frac{1}{E_{\text{sin}}(r, 45, \eta_i, \eta_s)}$$

$$E_{\text{integ3s}}(r, \eta_i, \eta_s) := \frac{\int_{t_3(r)}^{t_4(r)} E_{\text{sin}}(r, t, \eta_i, \eta_s) dt}{t_4(r) - t_3(r)} \cdot \frac{1}{E_{\text{sin}}(r, 45, \eta_i, \eta_s)}$$



Il grafico a fianco rappresenta l'andamento teorico delle tre curve per il modello a scattering singolo.

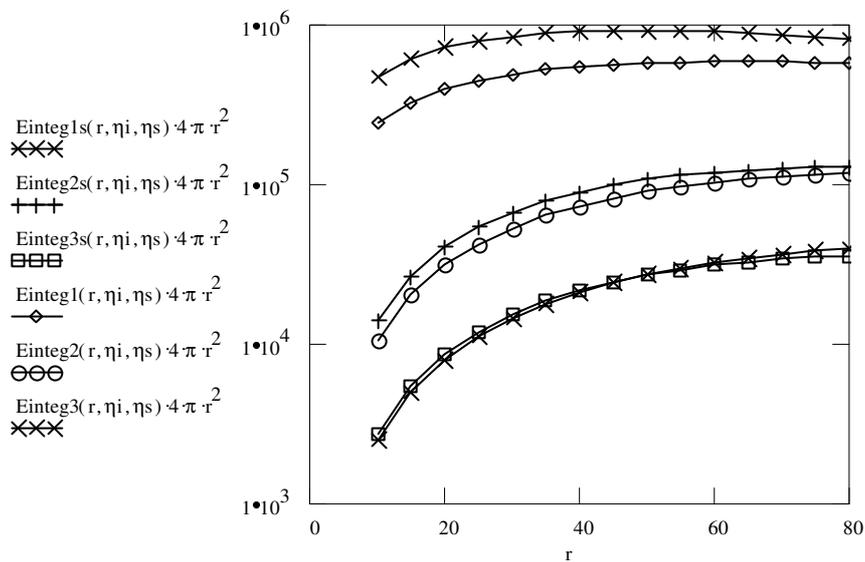


Nel grafico a sinistra viene rappresentato il confronto tra i due modelli

Un altro esempio per un mezzo con attenuazione per scattering maggiore di quella intrinseca

$\eta_i := 0.001$

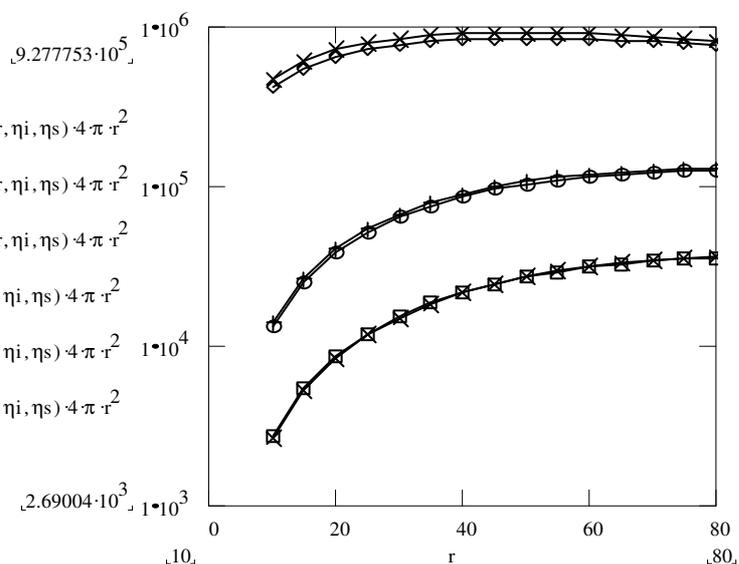
$\eta_s := 0.01$



Invece per un mezzo con attenuazione intrinseca maggiore di quella per scattering si avra:

$\eta_i := 0.01$

$\eta_s := 0.001$



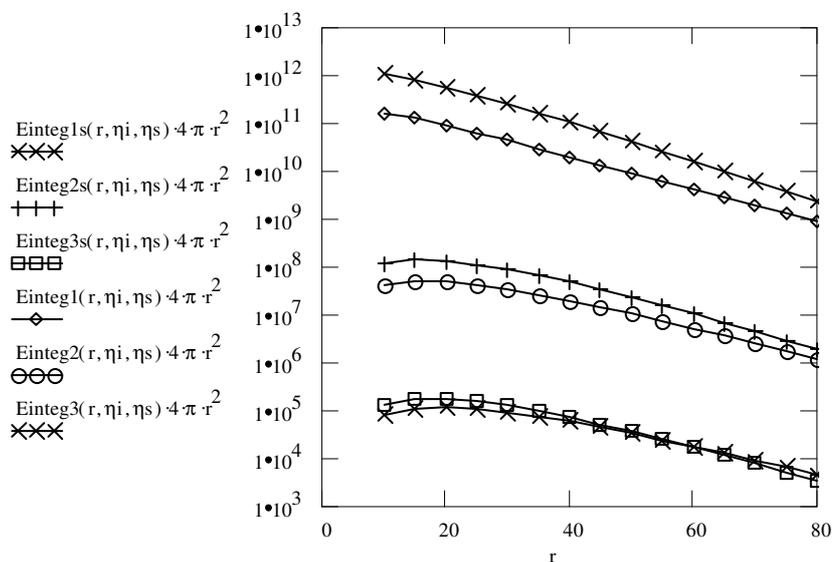
Nei grafici a lato si puo' osservare che per  $\eta_i > \eta_s$

i due modelli sono indistinguibili

Per valori confrontabili di  $\eta_s$  ed  $\eta_i$  si avra':

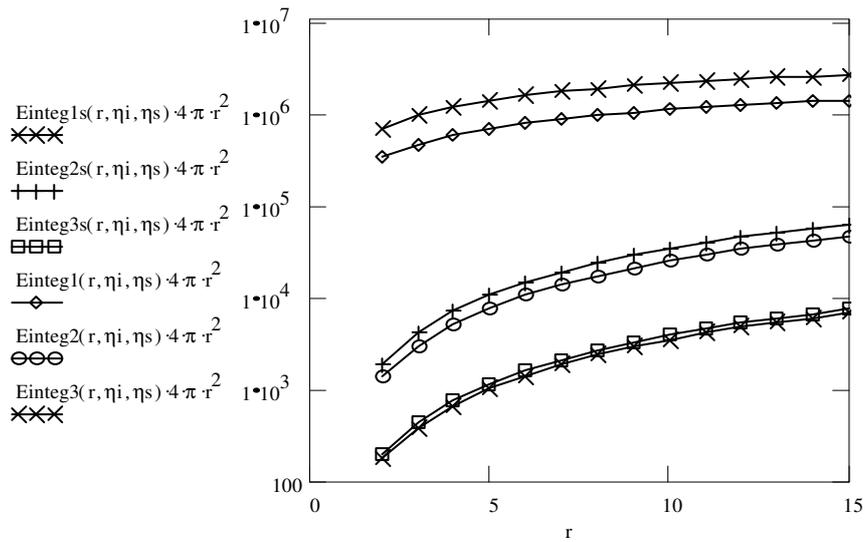
$\eta_i := 0.05$

$\eta_s := 0.05$



Interessante puo' risultare l' esempio seguente calcolato per un range di distanze più piccolo di quelli usati

fin ora.  
 $r := 2.. 15$   
 $t := 10.. 60$   
 $\eta_i := 0.01$   
 $\eta_s := 0.01$



Il confronto tra due situazioni diverse, in cui l'attenuazione per scattering è eguale a quella intrinseca. Nel primo caso ( $\eta_{i1}, \eta_{s1}$ ) l'attenuazione è maggiore.

$\eta_{i1} := 0.01$   
 $\eta_{s1} := 0.01$   
 $\eta_{s2} := 0.001$   
 $\eta_{i2} := 0.001$

