ゲーム理論における数理

慶應義塾大学商学部 小宮英敏
千葉商科大学商経学部 内海幸久

この小冊子は社会科学を専攻する学生の数理的問題設定能力と数理的推論能力を養うための教材を作成するため，ゲーム理論から広く題材を取り上げ具体的な例を収録している．示唆に富む例を作成あるいは文献から収集している．本小冊子は日吉特色 GP の活動第 3 年目の最後に作成されたものである．日吉特色 GP は 1 年後をもって終了するが，その時点までにこの小冊子は加筆推敲され，学生の教科書あるいは自習書としての体裁を整える予定である．

目次

1 概括

ゲームとはどのような状況を思い浮かべるだろうか？囲碁・将棋，トランプ，サッカーや野球，テレビゲームなど人それぞれであろう．いずれも対戦相手がいて勝ち負けなどの何らかの結果がきまるという点は共通と思われる．本報告書で展開されるゲーム理論のゲームも同様である．相手がいて結果が決まるという状況を数理的に分析する分析手法がゲーム理論であると呼べるかもしれない．

このようなゲーム理論の基本的な概念と応用例を本報告書では展開することにする．最初にゲームの構造について整理し，基本概念であるナッシュ均衡について紹介する．このナッシュ均衡とよばれる概念には大きく二つの解釈がある．第一は，行動様式としてナッシュ均衡をとらえる考え方，第二は，達成される状況がナッシュ均衡であるという考え方である．前者は，意思決定主体全員がナッシュ的な行動をとるという前提で議論が進められ，数多くの数理モデルがこれまで研究されてきている．これらの数理モデルは，われわれが観察することが出来る社会現象の一部をうまく表現でき，説明することが可能である．経験的な事実の説明能力の高さからゲーム理論の均衡概念であるナッシュ均衡を行動様式として捉える立場が，これが前者の考え方である．しかし，ナッシュ均衡は一般に複数存在することが知られている．意思決定主体の思考過程の結果，または，繰り返し行動をとった結果の到達先としてナッシュ均衡を捉えることで，ナッシュ均衡の中でも起こりえる状態は何かを探る立場が後者の考え方である．

二種類の捉え方に沿って，それぞれ概括していくことにする．まず最初に行動様式としてのナッシュ均衡を考察する．戦略形ゲームを基礎に，数多くの具体的な数理モデルを展開する．具体的には，下記のようなモデルである．

- ジレンマ型のモデル: 共有地の悲劇，公共財供給ゲーム，湖の汚染など
- 産業組織論への応用：企業の垂直統合，再販売価格維持などの契約プラン，製品差別化の問題
- 貿易論への応用：戦略的な関税や補助金政策など

ジレンマ型のモデルではナッシュ均衡と社会的に最適な水準が異なることが導かれる．産業組織論への応用では，プリンシパルとエイジェントのモデルと呼ばれる概念を用いて，垂直統合や系列組織などのモデルを分析する．貿易論への応用では，戦略的補完関係，戦略的代替関係と呼ばれる枠組みを利用して関税や補助金の政策効果の違いを分析する．

次に，戦略形ゲームの不確実性版とも呼べるベイジアンゲームを考察する．具体的には，下記のようなモデルである．

- オークション

- 逆選択（adverse selection）のゲーム，保険契約など，道徳的危険（moral hazard）のゲーム，労働契約

ベイジアンゲームの典型的な応用例であるオークションをモデル化し比較検討する．保険契約における逆選択や労働契約における道徳的危険といった行為を分析する．

後半部分では，繰り返しゲームと呼ばれるクラスのゲームを紹介する．戦略形ゲームが繰り返し行われる状況ではどのような結果が起こりえるのか？一回限り，ないし，有限回の繰り返しと無限回の繰り返しではどのような違いが生じるのかといった問題を中心に議論する．

最後に，到達点としてナッシュ均衡をとらえる分析方法について考察する．具体的には，

- 進化ゲーム，社会ゲーム

再生動学，最適反応動学，完全予見動学などの進化過程に従って，どのナッシュ均衡が実現されるのかを議論する．近年研究が盛んな分野の一端を紹介して終えることにする．

2　ゲームの基本的構造

意思決定の主体が 2 人以上いて，相互に影響し合う状態をゲームと呼ぶ．各主体が独立に，しかも戦略的に行動するという状態を扱う．

定義 1 戦略形 (Strategic form) ゲーム $(N, (X_j)_{j \in N}, (u_j)_{j \in N})$ とは，

1. $N = \{1, ..., n\}$ 　(プレイヤーの集合)
2. X_j: 集合 　(プレイヤー j の戦略集合)
3. $u_j : \prod_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ 　(プレイヤー j の利得関数)

という組のことである．

簡略化のため戦略形のゲームを (N, X_i, u_i) と表記する．1 人の意思決定では，相手がどのような行動，戦略をとるのかを考えなくて良い．しかし，ゲームの状態では，相手の行動を予想しなくてはいけない．以降では，相手がどのような行動をとるのかの予想に関して，常にすべてのプレーヤーで予想が整合しているというナッシュ的な行動様式 (ナッシュ均衡) を中心に議論していく．

定義 2 (N, X_i, u_i) : 戦略形のゲーム．

1. プレイヤー j の純粋戦略 (pure strategy) とは，$x_j \in X_j$
2. プレイヤー j の混合戦略 (mixed strategy) とは，$\mu_j \in \Delta(X_j)$
3. 提携 S の相関戦略 (correlated strategy) とは，$\mu_S \in \Delta(X_S)$．ここで，提携 S は N の

部分集合，$X_S = \prod_{i \in S} X_i$.

戦略形ゲームの基本的な均衡概念であるナッシュ均衡の存在を議論する.

定義 3 戦略形ゲーム (N, X_i, u_i) のナッシュ均衡とは,

$$\forall i \in N,\ \forall x_i \in X_i,\ u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(x_i, x_{-i}^*)$$

を満たす戦略ベクトル $(x_1^*, ..., x_n^*) \in \prod_{i=1}^n X_i$ である.

定理 1 (ナッシュ) (N, X_i, u_i)：戦略形ゲーム

1. $N = \{1, ..., n\}$
2. $X_j \subset \mathbb{R}^{m_j}$：すべての j について非空，凸，コンパクト集合
3. $u_j : \prod_{i=1}^n X_i \to \mathbb{R}$：すべての j について $\prod_{i=1}^n X_i$ 上で連続，X_j 上で擬凹関数

この時，ナッシュ均衡 $x^* \in \prod_{i=1}^n X_i$ が存在する.

3 戦略形ゲームの応用例

3.1 ジレンマ型のモデル

とあるアパートに住んでいる n 人が，それぞれ部屋の暖房の設定温度を決めるという問題を考察する．暖房の設定温度は高め (H) と低め (L) しかなく，高め (H) に設定すると 1000w の，低め (L) に設定すると 500w の電力を消費するとする．設定温度が高めの時の住人の効用を 10，低めの時を 5 とおく．住人の総電力利用量 (Q) が c を超えると, ブレーカーが落ち，電力が使えない状況になる．ここで，話を面白くするために，$500n < c < 1000n$ を仮定する．つまり，住人全員が同時に H の温度設定にすることはできないとする.

アパートに住んでいる i さんの戦略集合 X_i は設定温度なので，$X_i = \{H, L\}$ と表記される．k を設定温度 L を選んだ住人の人数とすると，総電力利用料は $Q(k) = 500k + 1000(n - k) = 1000n - 500k$ となる．これらの設定から i さんの利得関数は,

$$u_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{if } Q(k) > c \\ 5 & \text{if } Q(k) \leq c, x_i = L \\ 10 & \text{if } Q(k) \leq c, x_i = H \end{cases}$$

となる.

この様なアパートの住人の意思決定問題をナッシュ均衡を利用して考察してみる.

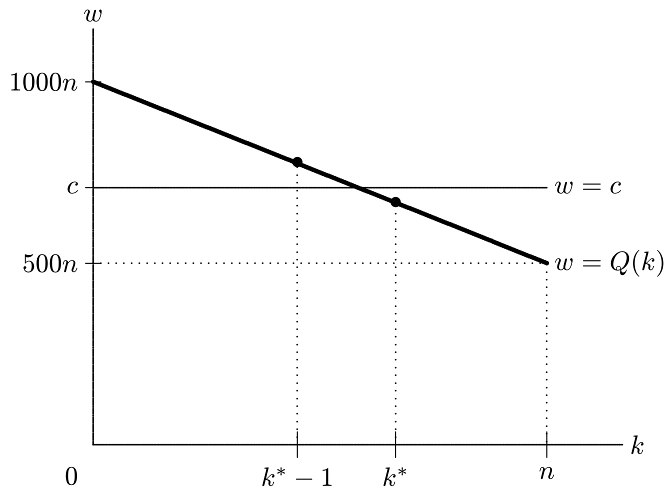


図 3.1 $Q(k)$ のグラフおよび k^* の決定

1. k^* 人が L，$n-k^*$ 人が H となる戦略の組はナッシュ均衡になる．
2. k^*-2 人以下が L，それ以外が H となる戦略の組はナッシュ均衡になる．
3. k^*-1 人が L，$n-k^*+1$ 人が H となる戦略の組はナッシュ均衡ではない．

特に，第 2 の場合として全員が H という戦略の組がナッシュ均衡になり，利己心の追求の結果，全体としては，好ましくない状況が起こりうることをこのモデルは示唆している．このタイプのモデルは，若干の修正を施すことで，環境問題などにも応用されている．

3.2　湖の汚染

湖の周辺に n の工場が生産活動をしているとする．それぞれの工場は湖水を利用して生産を行い，その後に廃水を湖に流すものと考える．各工場の経営者は，工場廃水の浄化装置をつける (C) か，つけない (D) かのいずれかを選択をしなくてはいけない．つまり，$X_i=\{C,D\}$ とする．装置の設置には，A の費用がかかり，実際に廃水を浄化するには，浄化装置をつけていない工場の数 (これを k とおく) に比例して費用がかかるとし，その限界費用を L とする．各工場の費用は経営者の戦略に依存し，工場 i は費用を，

$$c_i(x_1,\dots,x_n) := \begin{cases} A+k_iL & \text{if } x_i=C \\ (k_i+1)L & \text{if } x_i=D \end{cases}$$

と特定化することである．ここで，k_i は i を除いて浄化装置をつけていない工場の数を表す．kL を湖の浄化装置を実際に稼動させる費用とする．費用に関して，$L<A<nL$ を仮定する．

通常の最大化問題と同じように考えるため，利得関数を $u_i(x_1,\dots,x_n) = -c_i(x_1,\dots,x_n)$ と考える．

- $(D,\dots,D)$ が唯一のナッシュ均衡になる．

実際

$$\begin{aligned} u_i(\cdots,D,\cdots) - u_i(\cdots,C,\cdots) &= -(k_i+1)L - (-A - k_iL) \\ &= A - L \\ &> 0 \end{aligned}$$

より D が支配戦略になる．

4　産業組織理論への応用

企業間の垂直的な取引について考える．部品メーカーが最終財メーカーへ財を供給し，最終財メーカーが財を市場に供給するという状況を考察する．最初に 1 部品メーカー，1 最終財メーカーのモデルを考察する．続いて，部品メーカー，最終財メーカーが寡占の状況を考察する．

4.1　垂直統合の問題

4.1.1　独占的な状況

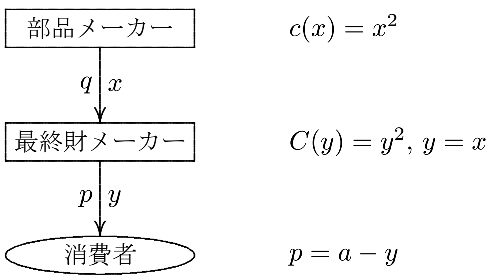


図 4.1 独占的な状況

部品メーカーの費用関数を $c(x) = x^2$ とする．最終財メーカーはその費用関数を $C(y) = y^2$ とし，部品メーカーから財を価格 q で購入する．一単位の部品から財を一単位生産すると仮定する．つまり，$y = x$ という生産関数を持つとする．最終財メーカーは，価格 p で最終財 y を供給する．市場の逆需要関数を $p = a - y$ とする．

１．系列なし (最終財メーカーが独占) のケース

部品メーカーの利潤は，$\pi(x) = qx - x^2$ にて与えられる．これより，利潤を最大にする供給量 x を求めると，$q = 2x$ となる．部品メーカーの供給関数である．次に最終財メーカーの利潤は，$\Pi(y) = py - y^2 - qy$ と定式化される．最終財メーカーは独占企業として行動するので，最終財の価格を自らの利潤を最大化するように決定できるので，$q = 2x$，$p = a - y$ を代入して，利潤は，$\Pi(y) = (a - y)y - y^2 - 2y^2$ となる．利潤を最大にする最終財 y の供給量は，$a - 2y - 2y - 4y = 0$ より，$y = a/8$ と求まる．

これらより，

$$x^* = a/8, y^* = a/8, q = a/4, p = 7a/8$$

を得る．ゆえに，部品メーカーと最終財メーカーの利潤の和は，

$$\pi(x^*) + \pi(y^*) = 5a^2/64$$

となる．

２．系列あり (垂直統合) のケース

両企業が系列関係，垂直統合されている事に注意する．両企業の利潤の和は，

$$\pi + \Pi = (py - y^2 - qx) + (qx - x^2)$$

となる．部品メーカーは最終財メーカーへ，内部取引を行う．需要関数 $p = a - x$，生産関数 $y = x$ などを代入することで，利潤は，

$$\pi + \Pi = (a - y)y - 2y^2$$

と求まる．利潤を最大にする最終財の供給量は，$a - 6y = 0$ より，$y = a/6$ となる．

これらより，

$$x^* = a/6,\ y^* = a/6,\ p = 5a/6$$

ゆえに，部品メーカーと最終財メーカーが垂直統合した場合の利潤は，

$$\pi + \Pi = a^2/12$$

となる．

ケース１，ケース２の利潤を比較すると $5a^2/64 < a^2/12$ より，系列関係を維持する場合が，系列関係を解消するよりも両企業の利潤の合計が高くなることがわかる．

- 系列関係維持のケースが系列関係解消よりも両企業合計利潤が高い．

３．競争的部品市場 (q を所与として行動) のケース

部品メーカーが複数存在し，競争的な部品市場の場合を考察する．最終財メーカーは，独占企業ではあるが，部品価格 q をコントロールすることができないことに注意．この事によって，部品市場が競争的であることを表す．

最終財メーカーの利潤は，$\Pi(y) = py - y^2 - qx$．生産関数 $y = x$ や市場需要関数 $p = a - y$ を代入すると，$\Pi(x) = (a - x)x - x^2 - qx$ となる．利潤を最大にする部品 x の投入量 (要素需要量) は，$a - 4x = q$ になる．これは，部品市場の需要関数になっている．供給関数は $q = 2x$ であった．

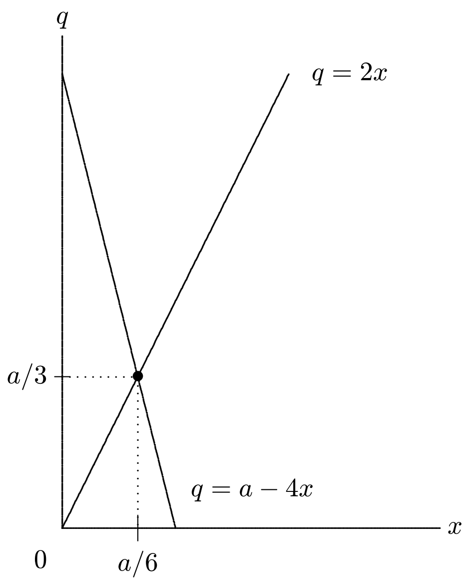


図 4.2 競争的部品市場における需給の一致

部品市場は競争市場であるので需給の一致より，

$$x = \frac{a}{6}$$

と求まる，ケース 2 と同じ取引量になっている点に注意．これは，内部取引が競争市場と同じ事をあらわしている．

- 内部取引と競争市場における取引が等しい．

4.1.2　寡占市場型

部品メーカー，最終財メーカーがともに複占市場のモデルを考察する．図からも明らかなように，取引関係にさまざまな種類がありえる．この小節では，垂直統合はしないが取引企業に制限が課される場合，両企業とも統合し系列を維持するモデルを紹介する．

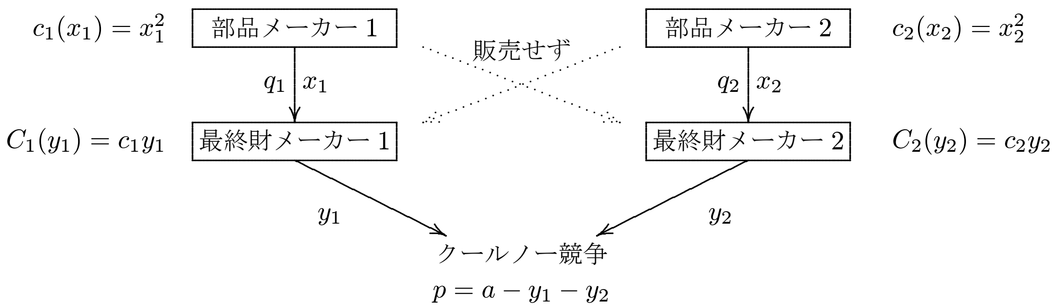


図 4.3 寡占市場型

基本的には独占型のモデルと同じ状況で考察する．部品メーカー 1 は最終財メーカー 1 に財を供給し，部品メーカー 2 は最終財メーカー 2 に財を供給する．最終財メーカーは共に，市場にてクールノー競争 (数量競争) を行うとする．部品メーカー i の費用関数を x_i^2，最終財メーカー i の費用関数を $c_i y_i$ とする．最終財メーカー i は部品メーカー i から財を価格 q_i で購入する．一単位の部品から財を一単位生産すると仮定する．つまり，$y_i = x_i$ という生産関数を持つとする．最終財メーカー i は，逆需要関数が $p = a - y_1 - y_2$ の市場に最終財 y_i を市場に供給する．

1．部品メーカーと最終財メーカーの統合がないケース．

部品メーカー 1 の利潤は,

$$\pi_1 = q_1 x_1 - x_1^2.$$

よって，供給関数 $q_1 = 2x_1$ を得る．同様にして，部品メーカー 2 の利潤は,

$$\pi_2 = q_2 x_2 - x_2^2$$

となるので，供給関数は $q_2 = 2x_2$ となる．

最終財メーカー 1 の利潤は，$\Pi_1 = py_1 - c_1 y_1 - q_1 x_1$，また，最終財メーカー 2 の利潤は，$\Pi_2 = py_2 - c_2 y_2 - q_2 x_2$ である．逆需要関数，部品メーカーの供給関数を代入すると，それぞれ,

$$\Pi_1(y_1, y_2) = (a - y_1 - y_2)y_1 - c_1 y_1 - 2y_1^2$$

$$\Pi_2(y_1, y_2) = (a - y_1 - y_2)y_2 - c_2y_2 - 2y_2^2$$

となる．一階の条件より，

$$a - 2y_1 - y_2 - c_1 - 4y_1 = 0$$

を得る．同様にして，最終財メーカー２も導出してまとめると，

$$y_1 = (a - c_1 - y_2)/6, \quad y_2 = (a - c_2 - y_1)/6$$

になる．これらより，ナッシュ均衡を求める．

$$y_1 = (5a - 6c_1 + c_2)/35, \quad y_2 = (5a - 6c_2 + c_1)/35$$
$$x_1 = (5a - 6c_1 + c_2)/35, \quad x_2 = (5a - 6c_2 + c_1)/35$$
$$q_1 = 2(5a - 6c_1 + c_2)/35, \quad q_2 = 2(5a - 6c_2 + c_1)/35$$
$$p = (5a + c_1 + c_2)/7$$

また，部品メーカー，最終財メーカーの統合利潤は

$$\pi_1 + \Pi_1 = 4((5a - 6c_1 + c_2)/35)^2$$

となる．

２．部品メーカーと最終財メーカーが統合したケース

部品メーカー i と最終財メーカー i が統合するので，状況は 2 企業のクールノー競争として捉えられる．

部品メーカー i と最終財メーカー i の統合をグループ企業 i と呼ぶことにする．グループ企業 1 の利潤は，

$$\begin{aligned}\pi_1 + \Pi_1 &= py_1 - c_1y_1 - x_1^2 \\ &= (a - y_1 - y_2)y_1 - c_1y_1 - y_1^2\end{aligned}$$

また，グループ企業 2 の利潤は

$$\pi_2 + \Pi_2 = (a - y_1 - y_2)y_2 - c_2y_2 - y_2^2$$

一階の条件より，最適反応関数を導出すると，

$$y_1 = (a - y_2 - c_1)/4, \quad y_2 = (a - y_1 - c_2)/4$$

となる．これらより，ナッシュ均衡を求める．

$$y_1 = (3a - 4c_1 + c_2)/15, \quad y_2 = (3a - 4c_2 + c_1)/15$$

$$p = (3a + c_1 + c_2)/5$$

グループ企業 1 の利潤は,

$$\pi_1 + \Pi_1 = 2((3a - 4c_1 + c_2)/15)^2$$

となる.

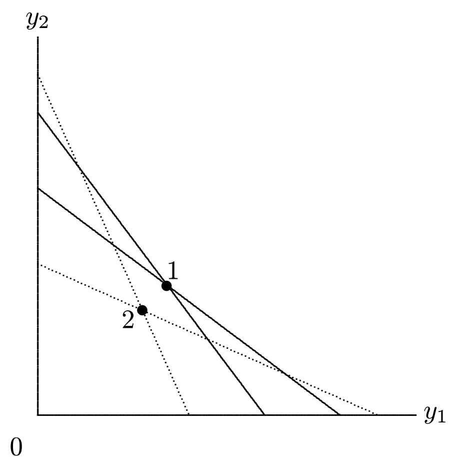


図 4.4 ケース 1 とケース 2 における最適反応曲線

- $c_1 = c_2 = c$ の時，ケース 1 の利潤 $>$ ケース 2 の利潤となる．つまり，統合しない場合が利潤が高いことになる.

4.2　フランチャイズ契約，再販売価格維持

卸売り業と小売業のフランチャイズ契約, 再販売価格維持などの契約について考察を加える.

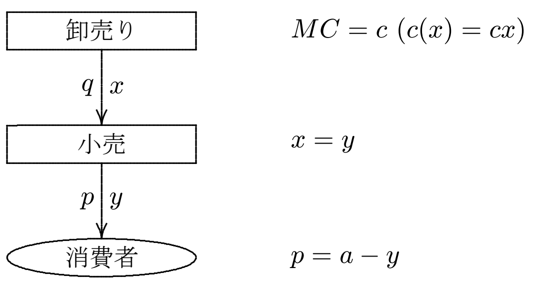


図 4.5 フランチャイズ契約, 再販売価格維持

垂直統合を行わない場合のケース

1 卸売り企業 1 小売業の市場を考察する．卸売り企業は小売業へ財 x を価格 q にて販売し，小売業はその財を $y = x$ という生産関数にて加工し，価格 p にて販売するものとする．市場需要を $y = a - p$ とする．卸売り企業の限界費用を c と特定化する．$c < a$ を仮定する．

小売企業の利潤は

$$\pi_r = (p - q)(a - p)$$

であるので，一階の条件 $a - 2p + q = 0$ より，

$$p = \frac{a+q}{2},\ y = \frac{a-q}{2},\ \pi_r = \left(\frac{a-q}{2}\right)^2$$

を得る．

$x = y$ と $y = (a - q)/2$ に注意しつつ，卸売り企業の利潤を書き下すと，

$$\begin{aligned}\pi_m &= (q - c)x \\ &= (q - c)\left(\frac{a-q}{2}\right)\end{aligned}$$

となる．一階の条件 $a/2 - q + c/2 = 0$ より，

$$q = \frac{a+c}{2},\ p = \frac{3a+c}{4} =: p^{NI}\ \pi_m = \frac{1}{2}\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

を得る．

これらより，卸売り，小売企業の合計利潤は，

$$\Pi^{NI} = \pi_m + \pi_r = \frac{3}{16}(a - c)^2$$

となる．

垂直統合された場合

二企業が統合している状況を考察する．利潤は，

$$(p - c)(a - p)$$

となるので，一階の条件から

$$p = \frac{a+c}{2} =: p^I,\ \Pi^I := \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

を得る．

- $p^I < p^{NI}$，$\Pi^I > \Pi^{NI}$
- 市場での価格は，非統合（市場取引を経由した状況）の価格の方が統合時の価格よりも低い．また，統合時の利潤は非統合の合計利潤を上回る．

フランチャイズ契約

卸売り企業は小売企業への販売の際，フランチャイズ料金 A も課す場合を考察する．即ち，小売企業は，卸売り企業から x 単位財を購入するには，$qx + A$ という支払いをする．このようなフランチャイズ契約における卸売り企業にとっての最適なフランチャイズ料金を求める．

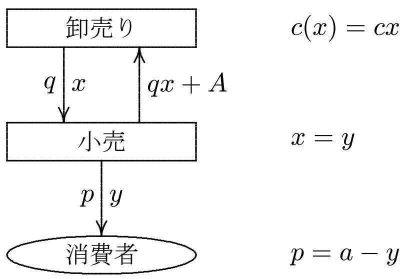


図 4.6 フランチャイズ契約

小売企業の利潤は，フランチャイズ料金 A を課されるので，

$$\pi_r = (p - q)(a - p) - A$$

となる．一階の条件 $a - 2p + q = 0$ から，

$$p = \frac{a+q}{2},\ y = \frac{a-q}{2},\ \pi_r = \left(\frac{a-c}{4}\right)^2 - A$$

を得る．

卸売り企業の利潤は，

$$\pi_m = (q - c)\left(\frac{a-q}{2}\right) + A$$

と書き下されるので，一階の条件から，

$$q = \frac{a+c}{2},\ \pi_m = \frac{1}{8}(a-c)^2 + A$$

を得る．これらから，フランチャイズ料金を

$$A = \left(\frac{a-c}{4}\right)^2$$

と設定することで，卸売り企業は小売企業の利潤をそのまま奪うことが可能となる．即ち，$\pi_r = 0$，$\pi_m = \frac{3}{16}(a-c)^2$ とできる．

- フランチャイズ料金の設定によって，卸売り企業は，小売企業と卸売り企業の合計利潤を得ることが可能となる．

再販売価格維持

卸売り企業が小売企業の販売価格 p を制限できる状況を考察する．卸売り企業は，小売企業に対し，販売価格を $\bar{p}$ と制限したとする．このような再販売価格維持制度における卸売り企業にとっての最適な再販売価格を求める．

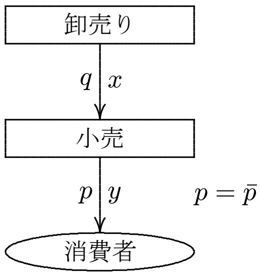


図 4.7 再販売価格維持

卸売り企業は，再販売価格維持によって小売企業の行動を制御できる．そのため，卸売り企業が限界費用 c で需要関数が $y = a - p$ の市場に直接販売している状況とみなすことができる．そこで卸売り企業の利潤があたかも

$$\pi_m = (p-c)(a-p)$$

であると考える．一階の条件 $a - 2p + c = 0$ から，$p = (a+c)/2$，$y = (a-c)/2$ を得る．この価格を再販売価格とする．即ち，

$$\bar{p} = \frac{a+c}{2}$$

と設定する．小売企業の利潤は，

$$\begin{aligned}\pi_r &= (\bar{p}-q)(a-\bar{p}) \\ &= \left(\frac{a+c}{2} - q\right)\left(a - \frac{a+c}{2}\right)\end{aligned}$$

となる．そこで，卸売り企業は，財 x の販売価格を

$$q = \frac{a+c}{2}$$

と設定することで小売企業の利潤を奪うことが可能となる．このことから，卸売り企業の利潤は,

$$\begin{aligned}\pi_m &= (q-c)x \\ &= \left(\frac{a+c}{2} - c\right)\left(\frac{a-c}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(a-c)^2\end{aligned}$$

となる．

- 卸売り企業は垂直統合の利潤を再販売価格維持制度を利用して実現することが可能になる．
- 卸売り企業にとって，再販売価格維持制度の方がフランチャイズ契約よりも高い利潤を実現することが可能になる．

4.3 製品差別化

立地モデルの区間を製品差別の度合いと解釈し，更に，各企業が価格競争を行うというモデルを考察する．製品差別と価格競争を同時にモデル化する 1 つの方法を紹介する．

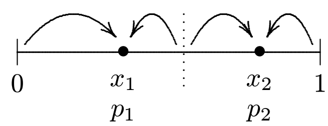


図 4.8 製品差別化

第一ステージ．このステージでは，両企業が企業の立地位置を決める．

1. $N^{(1)} = \{$ 企業 1, 企業 2$\}$
2. $X_j^{(1)} = [0,1] \ni x_j$ (立地，製品差別の度合い)

第二ステージ．このステージでは，企業が価格競争に直面する．価格を決定するステージ.

1. $N^{(2)} = \{$ 企業 1, 企業 2$\}$
2. $X_j^{(2)} = [0,\infty) \ni p_j$ (企業 j の価格)

第三ステージ．このステージでは，消費者がどの企業から財を購入するのかを決定し，ゲームが終了する．

1. $N^{(3)} = [0,1] \ni i$ (消費者の集合)
2. $X_i^{(3)} = \{$ 企業 1 より購入, 企業 2 より購入 $\}$ (消費者 i の行動集合)
3. u_i(企業 j より購入) $= u - p_j - c(i - x_j)^2$ (消費者 i の効用)

部分ゲーム完全均衡の導出

以下の分析では，$x_1 \leq x_2$ を仮定して計算を進める．反対のケースも同様に計算できる．

第三ステージの行動．

消費者 i の行動を決める．

$$u_i(\text{企業 1 より購入}) = u - p_1 - c(i - x_1)^2$$
$$u_i(\text{企業 2 より購入}) = u - p_2 - c(i - x_2)^2.$$

これより，企業 1，2 の分岐点 $\bar{i}$ は，$u - p_1 - c(\bar{i} - x_1)^2 = u - p_2 - c(\bar{i} - x_2)^2$ をみたす．よって，

$$\bar{i} = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2c(x_2 - x_1)}.$$

- p_1 が上昇するにつれ，第 1 企業からの購入者が減少する．

第二ステージ以降の行動

第三ステージの消費者の行動を下に，両企業は価格競争をする．製品差別の度合い，$x_1, x_2 \in [0,1]$ を所与の下で，各企業の利潤は，

$$\pi_1^{(2)}(p_1, p_2) = p_1 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2c(x_2 - x_1)} \right)$$
$$\pi_2^{(2)}(p_1, p_2) = p_2 \left(1 - \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{2c(x_2 - x_1)} \right).$$

最適反応関数はそれぞれ，

$$p_1 = \frac{p_2}{2} + \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} c$$
$$p_2 = \frac{p_1}{2} + c(x_2 - x_1)(1 - \frac{x_2 + x_1}{2}).$$

以上より，第二ステージ以降のナッシュ均衡は，

$$p_1^* = \frac{2}{3} c(x_2 - x_1)(1 + \frac{x_1 + x_2}{2})$$
$$p_2^* = \frac{2}{3} c(x_2 - x_1)(2 - \frac{x_1 + x_2}{2}).$$

価格が決まったので，分岐点 $\bar{x}$ は，

$$\bar{x} = \frac{1}{3} + \frac{x_1 + x_2}{6}$$

となる．

- x_1 と x_2 の差が大きくなると，p_1 と p_2 が上昇する．つまり，製品差別化が価格競争を和らげる．

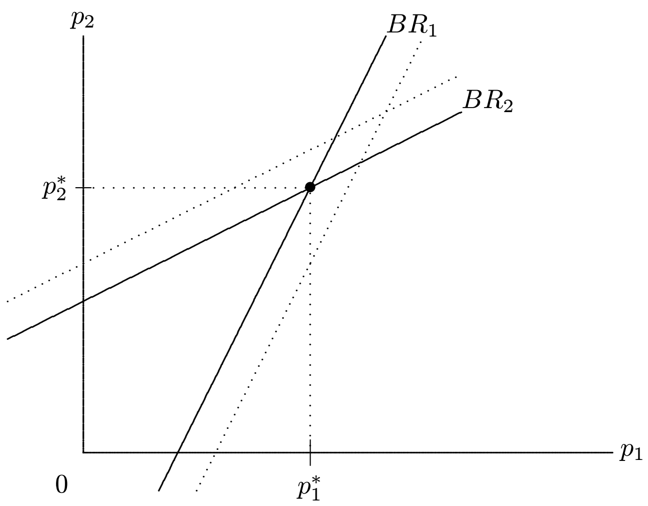


図 4.9 反応曲線のグラフ

第一ステージ以降の行動

第三ステージの消費者の行動や，第二ステージでの価格競争に関する予想がたったので，これらを利用して，第一ステージの行動を分析する．最初のステージでは，両企業が製品差別の度合い（製品の品質）を決める．両企業の利潤関数は，

$$\begin{aligned}
\pi_1^{(1)}(x_1, x_2) &= p_1^* \bar{x} \\
&= \frac{2}{3} c(x_2 - x_1)(1 + \frac{x_1 + x_2}{2})(\frac{1}{3} + \frac{x_1 + x_2}{6}) \\
&= \frac{2}{9} c(x_2 - x_1) \left(1 + \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \\
\pi_2^{(1)}(x_1, x_2) &= p_2^* (1 - \bar{x}) \\
&= \frac{2}{3} c(x_2 - x_1)(2 - \frac{x_1 + x_2}{2})(\frac{1}{3} + \frac{x_1 + x_2}{6}).
\end{aligned}$$

一階の条件は，$x_1 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}$ になる．よって，$x_2 \in [0,1]$ を考えて，最適反応関数は $x_1 = 0$ となる．この時，$x_2 = 1$ が第 2 企業の利潤を最大にしていることもわかる．

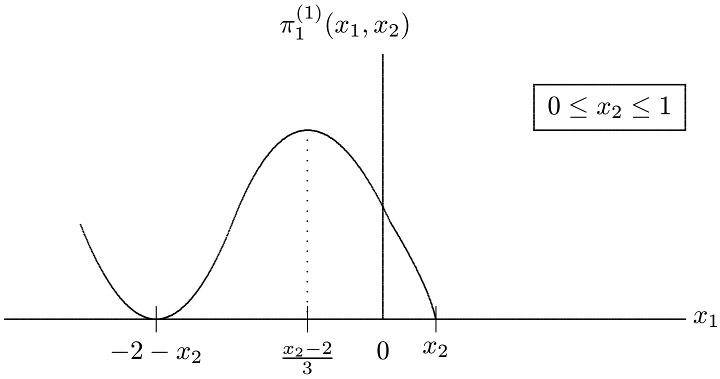


図 4.10 企業 1 の反応曲線のグラフ

以上より，部分ゲーム完全均衡は，$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ p_1^* = p_2^* = c,\ \bar{x} = 1/2$ になる．

- 企業 1 は 0 を，企業 2 は 1 を選択．つまり，完全に製品差別化を行う．消費者を半分に分けあうのが部分ゲーム完全均衡になる．

5　戦略的貿易政策

貿易理論への応用を紹介する．自国と外国の貿易をゲームにより表現し，自国企業に有利な状況を作り出す政策手段は何かを考察する．このような政策は戦略的貿易政策と呼ばれている．

5.1　戦略的代替関係 (クールノー型)

1. 輸出補助金政策

(1) 補助金なしの場合

クールノー競争と等しい状況になる．両企業の利潤はそれぞれ，

$$\pi_1(x_1, x_2) = (a - x_1 - x_2)x_1 - c_1 x_1$$

$$\pi_2(x_1, x_2) = (a - x_1 - x_2)x_2 - c_2 x_2$$

となる．一階の条件より最適反応関数は，

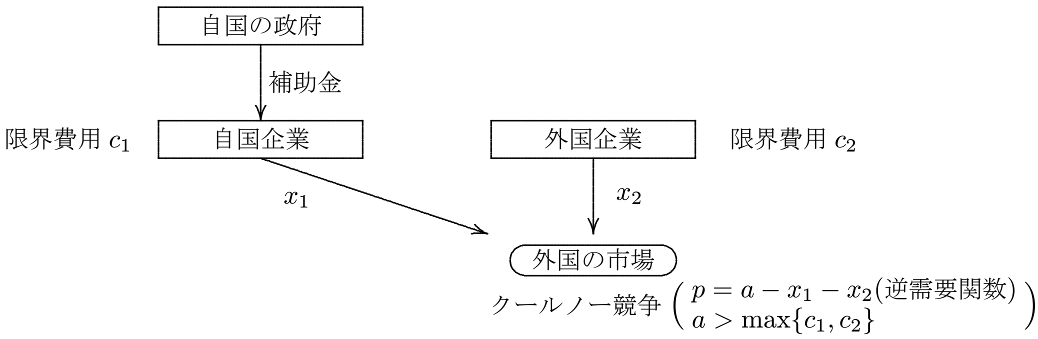


図 5.1 輸出補助金政策

$$\partial\pi_1/\partial x_1 = 0 \text{ より } x_1 = (a - c_1 - x_2)/2$$

$$\partial\pi_2/\partial x_2 = 0 \text{ より } x_2 = (a - c_2 - x_1)/2$$

となる．これらより, ナッシュ均衡は,

$$x_1 = (a - 2c_1 + c_2)/3, \quad x_2 = (a - 2c_2 + c_1)/3$$

(2) 輸出補助金政策の場合

自国の企業にのみ補助金が課された場合を考察する．両企業の利潤はそれぞれ,

$$\pi_1(x_1, x_2) = (a - x_1 - x_2)x_1 - c_1 x_1 + s x_1$$

$$\pi_2(x_1, x_2) = (a - x_1 - x_2)x_2 - c_2 x_2$$

となる．一階の条件より最適反応関数は,

$$x_1 = (a - c_1 + s - x_2)/2$$

$$x_2 = (a - c_2 - x_1)/2$$

になるので，ナッシュ均衡は,

$$x_1 = (a - 2c_1 + 2s + c_2)/3 \equiv x_1^*(s), \quad x_2 = (a - 2c_2 + c_1 - s)/3 \equiv x_2^*(s)$$

と求まる．

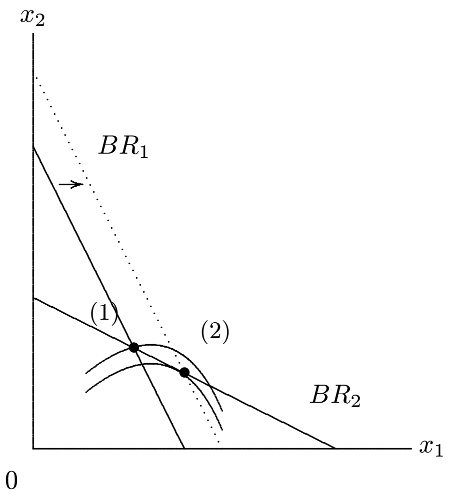


図 5.2 最適補助金政策

自国の企業の均衡における利潤は，

$$\pi_1(s) = (a - 2c_1 + 2s + c_2)^2/9$$

となることから，補助金額を割り引いた純余剰 (net surplus) は，

$$\pi_1(s) - sx_1^* = (a - 2c_1 + c_2 + 2s)(a - 2c_1 + c_2 - s)/9$$

となる．純余剰を最大にする最適な補助金額 (戦略的補助金額と呼ばれる) は，

$$s^* = (a - 2c_1 + c_2)/4$$

と求まる．続いて補助金の効果を計算する．

$$\pi_1(s^*) - s^*x_1 - \pi_1(0) = s^*(a - 2c_1 + c_2 - 2s^*)/9 > 0$$

であることから最適な補助金額を課すことで自国の企業の純余剰が増加していることがわかる．

- 自国の企業の最適生産量は，$x_1^*(s^*) = (a - 2c_1 + c_2)/2$.
- 自国の企業への最適補助金額は，$s^* = (a - 2c_1 + c_2)/4$.

シュタッケルベルグ競争との比較

最適補助金額の下での自国の企業の生産量は，シュタッケルベルグ競争での自国の企業の生産量と一致する．政府の補助金によって，ゲームがクールノー競争からシュタッケルベルグ競争へ移行したと解釈できる．

自国の企業が先に行動し，その後に外国の企業が行動するシュタッケルベルグ競争では，自国の企業の利潤は，外国の企業の最適反応を考慮に入れるので，

$$\pi_1(x_1, BR_2(x_1)) = (a - x_1 - (a - c_2 - x_1)/2)x_1 - c_1 x_1$$

となる．利潤最大化の生産数量は，

$$d\pi_1/dx_1 = 0 \text{ より}, x_1^S = (a - 2c_1 + c_2)/2$$

と求まる．

- $x_1^*(s^*) = x_1^S$　即ち，
  最適補助金下での生産量 = シュタッケルベルグ競争での生産量

2. 輸入関税政策

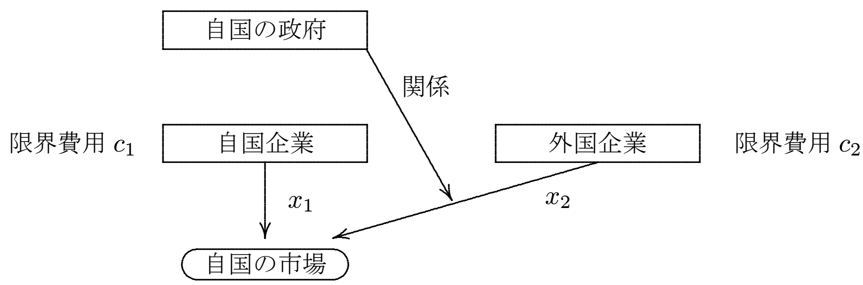


図 5.3 輸入関税政策

自国の政府が外国の企業へ輸入関税を課す場合を考察する．両企業の利潤はそれぞれ，

$$\pi_1(x_1, x_2) = (a - x_1 - x_2)x_1 - c_1 x_1$$

$$\pi_2(x_1, x_2) = (a - x_1 - x_2)x_2 - c_2 x_2 - t x_2$$

となる．一階の条件より最適反応関数は，

$$x_1 = (a - c_1 - x_2)/2$$

$$x_2 = (a - c_2 - t - x_1)/2$$

になる．これより，ナッシュ均衡は

$$x_1 = (a - 2c_1 + c_2 + t)/3, \quad x_2 = (a - 2c_2 + c_1 - 2t)/3$$

と求まる．

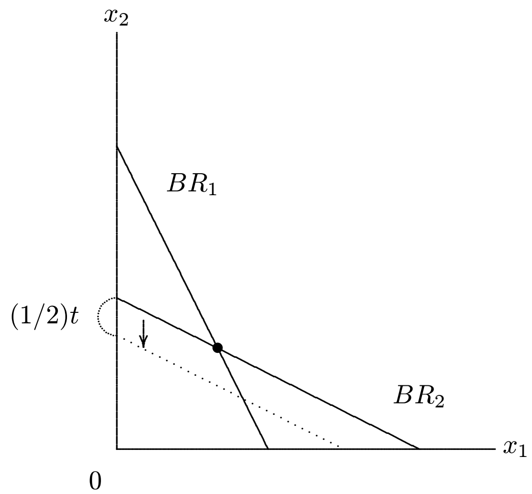


図 5.4 最適反応曲線

自国の企業の均衡における利潤は，

$$\pi_1(t) = (a - 2c_1 + c_2 + t)^2/9$$

となる．

- $t\uparrow \Rightarrow \begin{cases} p(t) = (a + c_1 + c_2 + t)/3\uparrow \\ x_1(t) + x_2(t) = (2a - c_1 - c_2 - t)/3\downarrow \\ \text{消費者余剰が減少} \quad \pi_1(t)\uparrow \quad tx_2\uparrow \end{cases}$
- 自国の社会的余剰は $w(t) = \text{c.s.} + \pi_1(t) + tx_2$
- 最適関税の効果は，$w(t^*) - w(0) > 0$ なので有効となる．

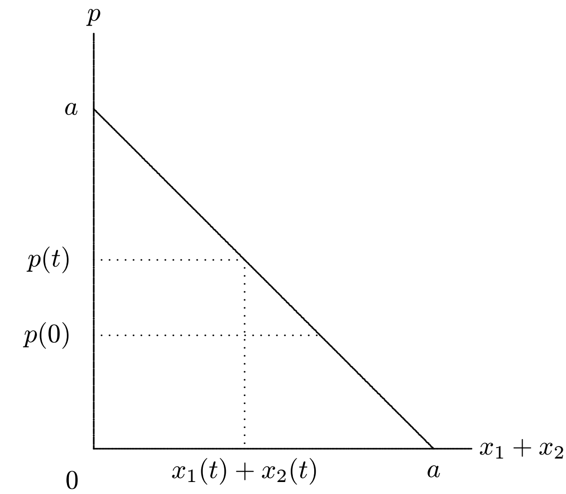


図 5.5 価格・数量・消費者余剰

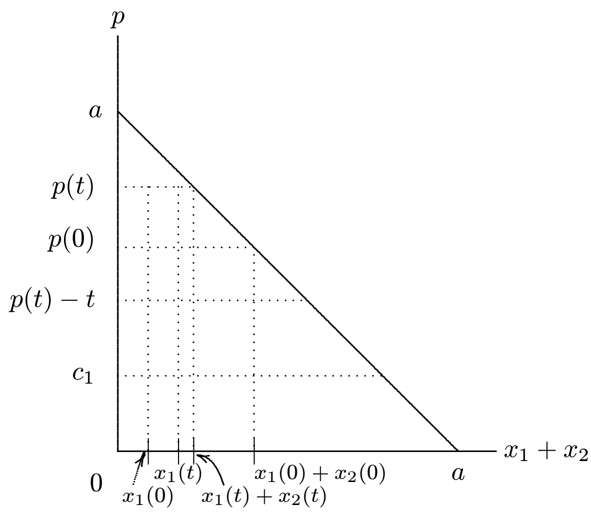


図 5.6 価格・数量と消費者余剰

5.2　戦略的補完関係 (ベルトラン型)

1．ベルトラン 競争

ベンチマークとして通常のベルトラン競争を考察する．両企業の利潤はそれぞれ，

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c_1)(1 - p_1 + bp_2)$$
$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c_2)(1 - p_2 + bp_1)$$

となる．一階の条件より最適反応は，

$$\partial\pi_1/\partial p_1 = 0 \text{ より } p_1 = (bp_2 + c_1 + 1)/2$$
$$\partial\pi_2/\partial p_2 = 0 \text{ より } p_2 = (bp_1 + c_2 + 1)/2$$

と求まる．これらより，ナッシュ均衡は，

$$p_1^* = (bc_2 + b + 2c_1 + 2)/(4 - b^2), \quad p_2^* = (bc_1 + b + 2c_2 + 2)/(4 - b^2)$$

と計算される．

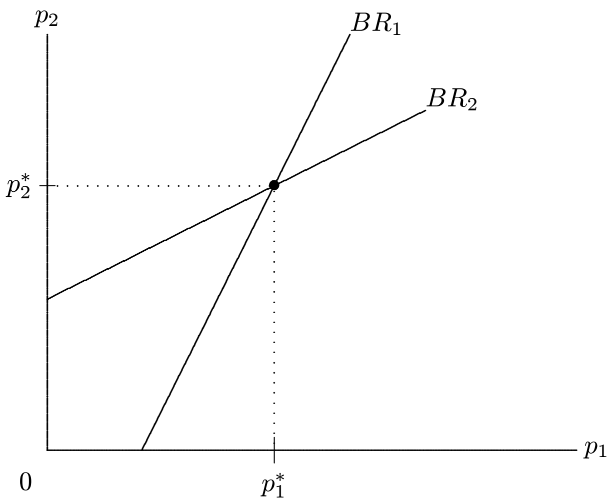


図 5.7 ベルトラン競争におけるナッシュ均衡

2．輸出補助金政策

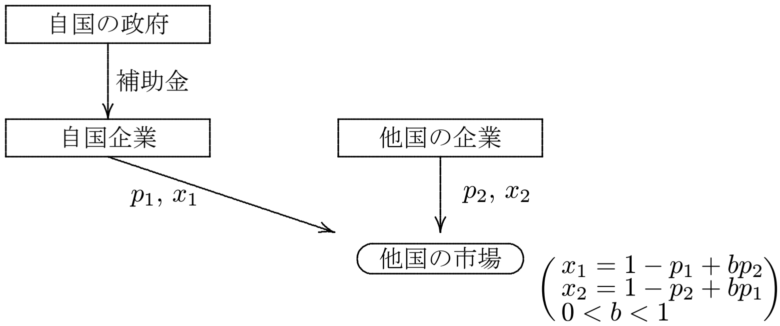


図 5.8 輸出補助金政策

自国の企業にのみ補助金が課された場合を考察する．両企業の利潤はそれぞれ，

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c_1 + s)(1 - p_1 + bp_2)$$

$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c_2)(1 - p_2 + bp_1)$$

となる．自国の企業の最適反応は，一階の条件より

$$p_1 = (bp_2 + c_1 + 1 - s)/2$$

と求まる．これより，ナッシュ均衡は，

$$p_1(s) = (bc_2 + b + 2c_1 - 2s + 2)/(4 - b^2), \quad p_2(s) = (bc_1 - bs + b + 2c_2 + 2)/(4 - b^2)$$

になる．

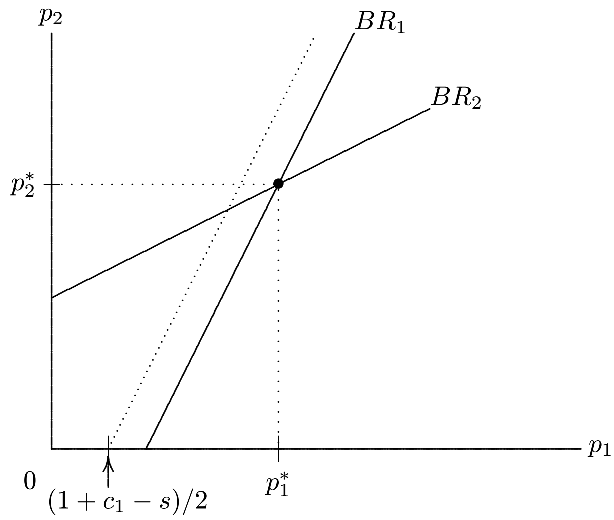


図 5.9 輸出補助金政策におけるナッシュ均衡

- $p_1(s) < p_1(0) = p_1^*, \quad p_2(s) < p_2(0) = p_2^*$

補助金政策の効果について考察する．

$$
\begin{aligned}
&\pi_1(s) - sx_1(s) - \pi_1(0) \\
&= (p_1(s) - c_1)(1 - p_1(s) + bp_2(s)) - (p_1(0) - c_1)(1 - p_1(0) + bp_2(0)) \\
&= -(p_1(0) - p_1(s)) + (p_1(0)^2 - p_1(s)^2) + bp_1(s)p_2(s) - bp_1(0)p_2(0) \\
&\qquad - c_1(p_1(0) - p_1(s)) - bc_1(p_2(0) - p_2(s)) \\
&< 0
\end{aligned}
$$

ここで最後の不等号は以下のようにして導くことができる．$0 < b, c_1, c_2 < 1$ であり，

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c_1 + s)(1 - p_1 + bp_2)$$

$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c_2)(1 - p_2 + bp_1)$$

であり，これらの関数の定義域は $0 \leq p_1$，$0 \leq p_2$ である．$0 \leq s < 1$ なる s について考える．ナッシュ均衡は

$$p_1(s) = (bc_2 + b + 2c_1 - 2s + 2)/(4 - b^2), \quad p_2(s) = (bc_1 - bs + b + 2c_2 + 2)/(4 - b^2)$$

であった．また，$0 < p_1(s) \leq 2$，$0 < p_2(s) \leq 2$ は明らかで，

$$p_2(s) = \frac{1}{2}(bp_1(s) + c_2 + 1) \tag{1}$$

をみたすので，

$$\pi = f(p_1, p_2) = (p_1 - c_1)(1 - p_1 + bp_2)$$

の等式 (1) で制約される (p_1, p_2) に対する値を考えればよい．

$$\begin{aligned}\pi =&(p_1 - c_1)(1 - p_1 + \frac{b}{2}(bp_1 + c_2 + 1)))\\ =&(p_1 - c_1)((-1 + \frac{b^2}{2})p_1 + (1 + \frac{b}{2}(c_2 + 1)))\\ =&(-1 + \frac{b^2}{2})(p_1 - c_1)(p_1 - \frac{2 + b(c_2 + 1)}{2 - b^2})\end{aligned}$$

ここで，

$$\frac{1}{2}(c_1 + \frac{2 + b(c_2 + 1)}{2 - b^2}) > \frac{bc_2 + b + 2c_1 + 2}{4 - b^2} = p_1(0) \tag{2}$$

がいえれば，$s = 0$ の近傍で s が増加するにつれ π が減少することがいえることになる．

これについては以下の不等号の連鎖により確認できる．(2) 式を整理すると

$$\frac{2c_1 - c_1b^2 + 2 + bc_2 + b}{4 - 2b^2} > \frac{bc_2 + b + 2c_1 + 2}{4 - b^2} = p_1(0)$$

となる．ここで，$\alpha = bc_2 + b + 2c_1 + 2 > 0$，$\beta = 4 - b^2 > 0$ とおき，

$$\frac{\alpha - c_1b^2}{\beta - b^2} > \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\alpha\beta - \beta c_1b^2 > \alpha\beta - \alpha b^2$$

$$-\beta c_1b^2 > -\alpha b^2$$

$$\beta c_1b^2 < \alpha b^2$$

$$\beta c_1 < \alpha$$

ここで，最後の不等号は以下の不等号の連鎖で確認できるので，上記の不等号を逆にたどることにより求める結果を得る．

$$\beta c_1 < 4c_1 < 2c_1 + 2 < \alpha$$

以上より，

$$\pi_1(s) - sx_1(s) < \pi_1(0)$$

を得る．このことから補助金政策は自国の企業の利潤を減少させることがわかる．

- ベルトラン競争において補助金政策は負の効果を持つ．

３．輸出関税政策

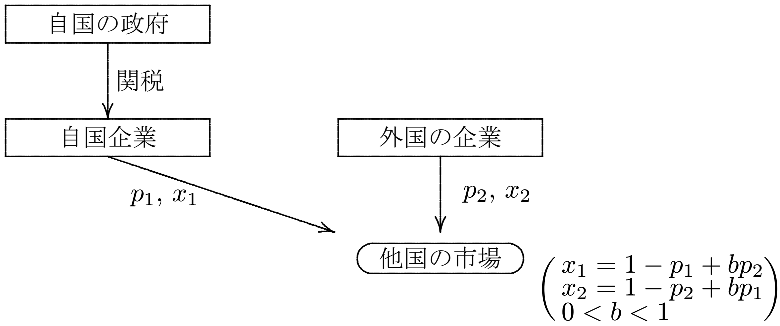


図 5.10 輸出関税政策

自国の企業が輸出する際に，自国の政府が自国の企業に税金を課す輸出関税政策を考察する．外国の企業は固定されているので自国の企業に注目する．利潤は，

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c_1 - t)(1 - p_1 + bp_2)$$

となるので，最適反応関数は，

$$p_1 = (bp_2 + c_1 + t + 1)/2$$

と求まる．このことからナッシュ均衡は，

$$p_1(t) = (bc_2+b+2c_1+2t+2)/(4-b^2) > p_1(0),\ p_2(t) = (bc_1+bt+b+2c_2+2)/(4-b^2) > p_2(0)$$

になる．

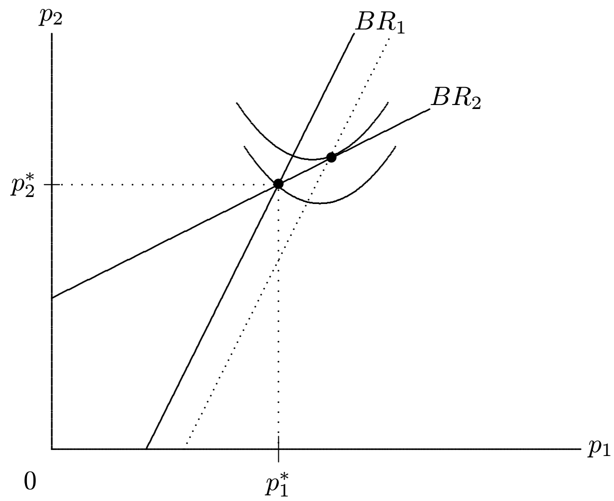


図 5.11 最適反応曲線

- 輸出関税政策によって両国の企業の利潤が上昇する．正確には，ある $\bar{t}$ に対して，$0 < t < \bar{t}$ を満たす t について，$\pi_1(t) \uparrow$ & $\pi_2(t) \uparrow$.

4．輸入関税政策

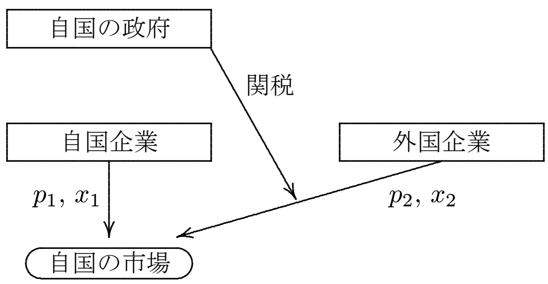


図 5.12 輸入関税政策

自国の政府が外国の企業に関税を課す場合を考察する．それぞれの利潤は

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c_1)(1 - p_1 + bp_2)$$

$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c_2 - t)(1 - p_2 + bp_1)$$

となる．一階の条件より最適反応関数は

$$\partial\pi_2/\partial p_2 = 0 \text{ より } p_2 = (bp_1 + c_2 + 1 + t)/2$$

と求まるので，Nash 均衡は,

$$p_1(t) = (bc_2 + bt + b + 2c_1 + 2)/(4 - b^2), \quad p_2(t) = (bc_1 + b + 2c_2 + 2t + 2)/(4 - b^2)$$

になる．

- $p_1(t) > p_1(0), \quad p_2(t) > p_2(0)$．輸入関税政策により両企業の価格が上昇する．
- 消費者者余剰が減少する．
- 自国の企業の利潤 $\pi_1(t)$ が上昇する．
- 自国の企業の生産数量が上昇し，外国の企業の生産数量は減少する．

6 モラルハザード (道徳的危険)

プリンシパルはエージェントの行動を観察できない, 又は, 観察可能としても立証できない (契約に書けない). これらによって起こる問題をモラルハザード (道徳的危険) と呼ぶ. プリンシパル-エージェント型のモデル.

6.1 労働契約

- ゲームの進展

1. 企業は賃金契約を提示する.
2. 契約を結ぶ.
3. エージェントが努力水準 $e = e^H$, e^L を決める.
4. 企業は成果 x を観察できる.

労働者:

$\{e^H, e^L\}$: 努力水準
$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $u' > 0 > u''$. 効用函数.
$d(e^H) > d(e^L)$: 労働者の努力から得る不効用.
$\{x_1, \ldots, x_n\}$: $x_1 < \cdots < x_n$. 成果, 売上の集合.
$p_i(e^K)$: e^K のとき x_i が起こる確率 $(p(x_i|e^K))$.
$w(\cdot)$: 賃金契約.
$\underline{u}$: 留保賃金の効用.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(e^K)u(w(x_i)) - d(e^K)\text{: 期待効用.}$$

● 参考

「$\{p_i(e^H)\}_{i=1}^n$ が $\{p_i(e^L)\}_{i=1}^n$ を first order stochastic dominate している」とは, 任意の $k = 1, \ldots, n-1$ に対して, $\sum_{i=1}^k p_i(e^H) < \sum_{i=1}^k p_i(e^L)$ が成立することを云う.

企業:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(e^K)[x_i - w(x_i)] \ (K = H,\, L)\text{: 期待利潤.}$$

1. プリンシパルが e^L を要求.

   エージェントは, どんな賃金契約 $w(x_i)$ であろうと

   $$u(w(x_i)) - d(e^L) > u(w(x_i)) - d(e^H)$$

   が成立するので, e^L の努力を行う. $\longrightarrow$ モラルハザードはない.

   プリンシパルは

   $$w^L := u^{-1}(\underline{u} + d(e^L))$$

   という固定給の契約を既述するのが望ましい.

2. プリンシパルが e^H を要求.

   いかなる固定給 w でも,

   $$u(w) - d(e^L) > u(w) - d(e^H)$$

   となり, エージェントは e^L の努力水準を実行. プリンシパルは e^H を要求しているが努力水準の観察不可能性よりエージェントは e^L を行うインセンティブがある. $\longrightarrow$ モラルハザード.

3. P-A モデル.

   $$\begin{aligned}
   \max_{w(x_i)} \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i(e^H)[x_i - w(x_i)] \\
   \text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i(e^H)u(w(x_i)) - d(e^H) \geq \underline{u} && \text{(IR)} \\
   & \sum_{i=1}^{n} p_i(e^H)u(w(x_i)) - d(e^H) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i(e^L)u(w(x_i)) - d(e^L) && \text{(IC)}
   \end{aligned}$$

   このモデルは労働契約のゲームの進展を考慮した際に，後ろ向き帰納法で解くのと同

じ.

プリンシパルはエージェントに e^H を実行させる契約を書く.

$$\begin{aligned}L = &\sum_{i=1}^{n} p_i(e^H)[x_i - w(x_i)] \\ &+\lambda_1 \left[\sum_{i=1}^{n} p_i(e^H)u(w(x_i)) - d(e^H) - \underline{u}\right] \\ &+\lambda_2 \left[\sum_{i=1}^{n} (p_i(e^H) - p_i(e^L))u(w(x_i)) - d(e^H) + d(e^L)\right].\end{aligned}$$

一階の条件: $w(x_i) \in \mathbb{R}$ で微分すると, 任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して,

$$-p_i(e^H) + \lambda_1 p_i(e^H)u'(w(x_i)) + \lambda_2(p_i(e^H) - p_i(e^L))u'(w(x_i)) = 0.$$

両辺を $u'(w(x_i))$ で割って,

$$\frac{p_i(e^H)}{u'(w(x_i))} = \lambda_1 p_i(e^H)) + \lambda_2(p_i(e^H) - p_i(e^L))$$

となるので, $i = 1, \ldots, n$ について足すと,

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i(e^H)}{u'(w(x_i))} > 0.$$

従って, IR は等式で成立. また,

$$\frac{1}{u'(w(x_i))} = \lambda_1 + \lambda_2 \left(1 - \frac{p_i(e^L)}{p_i(e^H)}\right) \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

$\lambda_2 = 0$ とすると, $\lambda_1 = 1/u'(w(x_i))$ となり, $w(x_i) = (u')^{-1}(1/\lambda_1)$ で $w(x_i)$ は定数. これは IC を満たさず NG. したがって $\lambda_2 > 0$. ゆえに

$$w(x_i) = (u')^{-1}\left(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2\left(1 - \frac{p_i(e^L)}{p_i(e^H)}\right)}\right).$$

注意: $p_i(e^L)/p_i(e^H)$ が i について減少ならば, $w(x_i)$ は i について増加.

注意:

1. $p_i(e^H) > p_i(e^L)$ のケース. $w(x_i) > \overline{w}$.
2. $p_i(e^H) < p_i(e^L)$ のケース. $w(x_i) < \overline{w}$.

● 参考

$p_i(e^L)/p_i(e^H)$ が monotone likelihood quotient (ratio) property

$\Longleftrightarrow$

$p_i(e^L)/p_i(e^H)$ が i について減少 (増加).

労働契約のモデルを，具体的な数値例を通して理解，計算する．ラグランジュの未定乗数を複数利用する例になる．

○ 数値例

エージェント:

$\{e^H, e^L\}$: 努力水準

$u(w) = \sqrt{w}$: 効用函数.

$d(e^H) > d(e^L) > 0$: 労働者の努力から得る不効用.

$\{x^H, x^L\}$: $x^L < x^H$. 成果, 売上の集合.

$p_i(e^K)$: 以下のように定義された e^K のとき x^i が起こる確率 $(p(x^i|e^K))$:

	x^H	x^L
e^H	$3/4$	$1/4$
e^L	$1/4$	$3/4$

$\underline{u} = 0$: 留保賃金の効用.

$\sum_{i=1}^{n} p_i(e^K)u(w(x_i)) - d(e^K)$: 期待効用.

プリンシパル:

$\sum_{i=H,L} p_i(e^K)[x^i - w(x_i)]$ $(K = H,\ L)$: 期待利潤.

1. 対称情報.

プリンシパルが e^H を要求.

$$\begin{aligned}\max_{\{w(x^i)\}} \quad & \frac{3}{4}(x^H - w(x^H)) + \frac{1}{4}(x^L - w(x^L)) \\ \text{subject to} \quad & \frac{3}{4}(\sqrt{w(x^H)} - d(e^H)) + \frac{1}{4}(\sqrt{w(x^L)} - d(e^H)) \geq 0 \qquad \text{(IR)}\end{aligned}$$

一階の条件:

$$w(x^H): -\frac{3}{4} + \lambda_1 \frac{3}{4}\frac{1}{2\sqrt{w(x^H)}} = 0 \iff \lambda_1 = 2\sqrt{w(x^H)},$$

$$w(x^L): -\frac{1}{4} + \lambda_1 \frac{1}{4}\frac{1}{2\sqrt{w(x^L)}} = 0 \iff \lambda_1 = 2\sqrt{w(x^L)}.$$

よって, $\lambda_1 = 2\sqrt{w(x^H)} = 2\sqrt{w(x^L)} \geq 0$. $\lambda_1 = 0$ のときは IR に矛盾するので, $\lambda_1 > 0$. ゆえに

$$w(x^H) = w(x^L) = [d(e^H)]^2.$$

2. モラルハザード.

プリンシパルが e^H を要求. 契約 $\{w^H\} = \{[d(e^H)]^2\}$ を提示. エージェントは

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{4}(\sqrt{w^H} - d(e^H)) + \frac{1}{4}(\sqrt{w^H} - d(e^H)) \\
&= \sqrt{w^H} - d(e^H) \\
&< \sqrt{w^H} - d(e^L)
\end{aligned}$$

となるので, e^L を実行する. $\longrightarrow$ モラルハザードの発生.

3. 最適契約

プリンシパルが e^H を要求.

$$\begin{aligned}
\max_{w(x_i)} \quad & \frac{3}{4}(x^H - w(x^H)) + \frac{1}{4}(x^L - w(x^L)) \\
\text{subject to} \quad & \frac{3}{4}(\sqrt{w(x^H)} - d(e^H)) + \frac{1}{4}(\sqrt{w(x^L)} - d(e^H)) \geq 0 \qquad \text{(IR)} \\
& \frac{3}{4}(\sqrt{w(x^H)} - d(e^H)) + \frac{1}{4}(\sqrt{w(x^L)} - d(e^H)) \\
& \quad \geq \frac{1}{4}(\sqrt{w(x^H)} - d(e^L)) + \frac{3}{4}(\sqrt{w(x^L)} - d(e^L)) \qquad \text{(IC)}
\end{aligned}$$

一階の条件

$$\begin{aligned}
w(x^H):\ & -\frac{3}{4} + \lambda_1 \frac{3}{4} \frac{1}{2\sqrt{w(x^H)}} + \lambda_2 \frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{w(x^H)}} = 0, \\
w(x^L):\ & -\frac{1}{4} + \lambda_1 \frac{1}{4} \frac{1}{2\sqrt{w(x^L)}} - \lambda_2 \frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{w(x^L)}} = 0.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
3\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 6\sqrt{w(x^H)}, \\
\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 2\sqrt{w(x^L)}.
\end{aligned}$$

両辺足し合わせると, $4\lambda_1 = 6\sqrt{w(x^H)} + 2\sqrt{w(x^L)}$.

ゆえに

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = 0 &\implies w(x^H) = w(x^L) = 0 \\
&\implies \text{IR に矛盾.} \quad (-d(e^H) < 0)) \\
&\implies \lambda_1 > 0.
\end{aligned}$$

一方, $8\lambda_2 = 6\sqrt{w(x^H)} - 6\sqrt{w(x^L)}$ なので,

$$\begin{aligned}\lambda_2 = 0 &\implies w(x^H) = w(x^L) =: w \\ &\implies \sqrt{w} - d(e^H) < \sqrt{w} - d(e^L) \text{ より IC に矛盾.} \\ &\implies \lambda_2 > 0.\end{aligned}$$

以上より IR, IC は等式で成立.

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\sqrt{w(x^H)} + \frac{1}{4}\sqrt{w(x^L)} - d(e^H) = 0, \\ \frac{1}{2}\sqrt{w(x^H)} - \frac{1}{2}\sqrt{w(x^L)} - d(e^H) + d(e^L) = 0.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}w(x^H) &= \frac{1}{4}(3d(e^H) - d(e^L))^2, \\ w(x^L) &= \frac{1}{4}(3d(e^L) - d(e^H))^2.\end{aligned}$$

● 参考

$$w(x^H) - w(x^L) = \frac{1}{4}(8[d(e^H)]^2 - 8[d(e^L)]^2) > 0$$

が成立する．これは成果主義と考えられる．

6.2 契約理論の応用例

○ 漁業契約

プリンシパル: 漁場の持ち主. 使用量 $T(x)$ の漁場を提供.

エージェント: 漁をする人. 使用量 $T(x)$ を支払って利用. 漁獲量 x を外で販売.

記号:

エージェント:

$\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$: 努力水準. $e_1 < e_2 < \cdots < e_m$.

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$: 漁獲量. $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

$P(x_j|\, e_i)$: 以下を満足するような努力水準が e^i のとき, 漁獲量が x_j となる確率:

$$\begin{aligned}&P(x_j|\, e_i) > 0 \quad \text{for all} \quad i,\, j, \\ &\sum_{j=1}^{n} P(x_j|\, e_i) = 1.\end{aligned}$$

$u(px - T(x)) - d(e)$: エージェントの利得函数. 但し,

$u' > 0 > u''$　リスク回避的効用関数
$\underline{u}$　留保効用
p: 市場での販売価格.
$T(x)$: プリンシパルへの支払い.
$d(e)$: 不効用 $d(e_i) < d(e_{i+1})$.

プリンシパル:

$T(x) - c(x)$: プリンシパルの利得函数. 但し, $c(x)$ は漁獲量が x のときのコスト.
(エージェントの努力水準は観察できないが, x は確率的に観察できる)

ゲームの手順:

1. P: 契約 $T(x)$ を提示.
2. A: 契約を結ぶ.
3. A: e を実行.

1. 対称情報.

e^*: プリンシパルが要求する努力水準.

$$\max_{\{T(x_j)\}_{j=1}^n} \sum_{j=1}^n P(x_j|\, e^*)\{T(x_j) - c(x_j)\}$$
$$\text{subject to} \sum_{j=1}^n P(x_j|\, e^*)u(px_j - T(x_j)) - d(e^*) \geq \underline{u} \qquad \text{(IR)}$$

一階の条件 ($T(x_j)$ で微分):

$$P(x_j|\, e^*) - \lambda P(x_j|\, e^*)u'(px_j - T(x_j)) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

よって,

$$\frac{1}{\lambda} = u'(px_j - T(x_j)) \quad (\lambda > 0,\, u' > 0)$$

最適な契約:

$$T(x_j) = \underbrace{px_j}_{\text{出来高払い}} - \underbrace{(u')^{-1}(1/\lambda)}_{\text{固定支払}}.$$

マイナスなので, エージェントがもらう.

2. 非対称情報.

プリンシパルが e^* を要求.

$$\begin{aligned} &\max_{\{T(x_j)\}_{j=1}^n} && P(x_j|\, e^*)\{T(x_j) - c(x_j)\} \\ &\text{subject to} && \sum_{j=1}^n P(x_j|\, e^*)u(px_j - T(x_j)) - d(e^*) \geq \underline{u} && \text{(IR)} \\ &&& \sum_{j=1}^n P(x_j|\, e^*)u(px_j - T(x_j)) - d(e^*) \\ &&& \qquad \geq \sum_{j=1}^n P(x_j|\, e_i)u(px_j - T(x_j)) - d(e_i) \quad \forall i \neq * && \text{(IC)} \end{aligned}$$

ラグランジアン:

$$\begin{aligned} L = &\sum_{j=1}^n P(x_j|\, e^*)\left\{T(x_j) - c(x_j)\right\} + \lambda \left\{ \sum_{j=1}^n P(x_j|\, e^*)u(px_j - T(x_j)) - d(e^*) - \underline{u} \right\} \\ &\sum_{i\neq *} \lambda_i \left\{ \sum_{j=1}^n P(x_j|\, e^*)u(px_j - T(x_j)) - d(e^*) - \sum_{j=1}^n P(x_j|\, e_i)u(px_j - T(x_j)) + d(e_i) \right\}. \end{aligned}$$

注.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n P(x_j|\, e^*)u(px_j - px_j + (u')^{-1}(1/\lambda)) - d(e^*) \\ &= u((u')^{-1}(1/\lambda)) - d(e^*) \\ &< u((u')^{-1}(1/\lambda)) - d(e_i) \quad (\because e_i < e^*) \\ &= \sum_{j=1}^n P(x_j|\, e^*)u(px_j - px_j + (u')^{-1}(1/\lambda)) - d(e_i). \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ モラルハザード.

$T(x_j)$ で微分.

$$\begin{aligned} &P(x_j|\, e^*) - \lambda P(x_j|\, e^*)u'(px_j - T(x_j)) \\ &\quad - \sum_{i\neq *} \lambda_i \left\{ P(x_i|\, e^*)u'(px_j - T(x_j)) - P(x_j|\, e_i)u'(px_j - T(x_j)) \right\} = 0. \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{1}{u'(px_j - T(x_j))} = \lambda + \sum_{i\neq *} \lambda_i \frac{P(x_j|\, e^*) - P(x_j|\, e_i)}{P(x_j|\, e^*)}.$$

注意:

- $\dfrac{P(x_j|\,e^*) - P(x_j|\,e_i)}{P(x_j|\,e^*)}$ が各 j について減少ならば,

$$\frac{1}{u'(px_j - T(x_j))} > \frac{1}{u'(px_{j'} - T(x_{j'}))} \quad (j < j').$$

- $T(x_{j'}) - T(x_j) > px_{j'} - px_j$ $(j < j')$.
  IC を満たす契約では, 漁獲量が多くなれば収入の増加分よりも大きく支払う契約内容となる.
- $\dfrac{P(x_j|\,e^*) - P(x_j|\,e_i)}{P(x_j|\,e^*)}$ が各 j について増加ならば,

$$T(x_{j'}) - T(x_j) < px_{j'} - px_j.$$

- 情報が対称なときは,

$$T(x_{j'}) - T(x_j) = px_{j'} - px_j.$$

数値例:

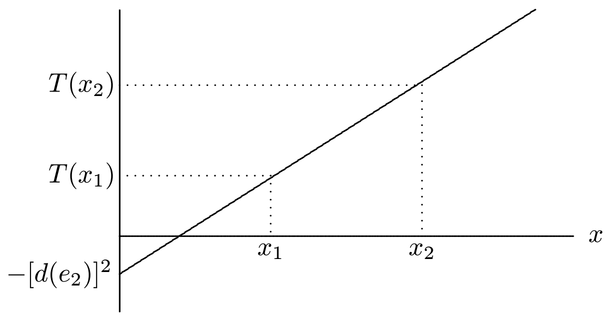
	x_1	x_2
e_1	3/4	1/4
e_2	1/4	3/4

- 対称情報.

$$\max \frac{1}{4}(T(x_1) - c(x_1)) + \frac{3}{4}(T(x_2) - c(x_2))$$
$$\frac{1}{4}\sqrt{px_1 - T(x_1)} + \frac{3}{4}\sqrt{px_2 - T(x_2)} - d(e_2) \geq 0 \qquad \text{(IR)}$$

プリンシパルが e_2 を要求のケース.

$$T(x_1) = px_1 - [d(e_2)]^2,$$
$$T(x_2) = px_2 - [d(e_2)]^2.$$



- 非対称情報.

$$\begin{aligned}
\max\ & \frac{1}{4}(T(x_1)-c(x_1))+\frac{3}{4}(T(x_2)-c(x_2)) \\
& \frac{1}{4}\sqrt{px_1-T(x_1)}+\frac{3}{4}\sqrt{px_2-T(x_2)}-d(e_2)\geq 0 \qquad \text{(IR)} \\
& \frac{1}{4}\sqrt{px_1-T(x_1)}+\frac{3}{4}\sqrt{px_2-T(x_2)}-d(e_2) \\
& \qquad \geq \frac{3}{4}\sqrt{px_1-T(x_1)}+\frac{1}{4}\sqrt{px_2-T(x_2)}-d(e_1) \qquad \text{(IC)}
\end{aligned}$$

$\lambda > 0$, $\lambda_1 > 0$ となり,

$$\begin{aligned}
T(x_1) &= px_1 - \frac{(17d(e_2)-3d(e_1))^2}{4}, \\
T(x_2) &= px_2 - \frac{(3d(e_2)-d(e_1))^2}{4}
\end{aligned}$$

を得る.

7 不完備情報ゲームとベイジアンゲーム

- 不完備情報ゲーム: ゲームができるほどルールの情報が揃っていない.
- ベイジアンゲーム: 共通事前確率 (common prior) を仮定.

1. プレイヤーは物理的な結果関数を知らない可能性がある.
2. プレイヤーは自分あるいは他人の効用関数を知らない可能性がある.
3. プレイヤーは自分あるいは他人の戦略空間を知らない可能性がある.

1, 3: プレイヤーが正しく戦略集合を認識できない. i.e., X_i の構成.

2: 利得関数の構成.

- 戦略集合.

1. 各プレイヤーは真の戦略集合を含めて予想できる.
2. プレイヤー j の X_i に対する情報の欠落は, i の利得関数に関する情報の欠落ととらえる（X_i が共有知識）.
3. プレイヤー j は, X_i を知っているが, 利得関数は正しく知らない.

- 利得関数.

1. プレイヤー i は j が $T_j^i = \{t_j^1, \ldots, t_j^{m_j}\}$ という有限個の属性で記述できると考えている.
2. 各プレイヤー i は T_j^i 上に主観的確率をわり振ると考える.
3. プレイヤー i は各 t_j ごとにプレイヤー j が戦略を決めると考えれば，プレイヤー i は各 t_j ごとにプレイヤー j に対する戦略を予想することで利得関数を定められる.

4. 各プレイヤー i は T_j^i を知っていると仮定. T_j^i に対する情報の欠落は主観確率によって考える.
5. プレイヤー i は自分の主観確率 p_i を知っていても相手の p_j については未知.

定義 4 以下の条件を満足する $(N, \{X_i, T_i, u_i, p_i\}_{i\in N})$ を**不完備情報ゲーム**という.

1. $N = \{1, \ldots, n\}$, (プレイヤーの集合)

すべての $i \in N$ に対し,

2. X_i は集合, (プレイヤー i の戦略集合; 1,3 の解決)
3. $T_i = \{t_i^1, \ldots, t_i^{m_i}\}$, (プレイヤー i のタイプの集合)
4. $u_i : \prod_{j=1}^n X_j \times T_i \to \mathbb{R}$, (プレイヤー i の効用関数; 2 の解決)
5. $p_i \in \Delta(\prod_{i=1}^n T_i)$. (主観確率)

◎ 各プレイヤー毎に異なるゲームを予想 $\Longrightarrow$ 事前確率の導入.

- 各プレイヤーは事前に共通の確率を持つと考える
- 仮に同一の情報にアクセス可能なら, 主体は等しい主観確率を形成するだろう.
  各プレイヤーは, 情報構造の違いから, 共通の確率を持っていたとしても事後的には異なる確率分布を持つと考える.

$$p_i(t|\,\bar{t}_i) = p(t|\,\bar{t}_i) = \frac{p((\bar{t}_i, t_{-i}))}{\sum_{t_{-i}} p((\bar{t}_i, t_{-i}))}.$$

  ただし, $t_i \neq \bar{t}_i$ の時は $p(t|\,\bar{t}_i) = 0$.

∘ タイプ集合から,
$\mathscr{P}_i := \{\{t_i\} \times T_{-i} |\, t_i \in T_i\}$
$(\prod_{j=1}^n T_j, \mathscr{P}_i)$: 情報構造

定義 5 $(N, \{X_i, T_i, u_i\}_{i\in N}, P)$ が以下の条件を満すとき**ベイジアンゲーム**であるという.

1. $N = \{1, \ldots, n\}$, (プレイヤーの集合)

すべての $i \in N$ に対し,

2. X_i は集合, (プレイヤー i の戦略の集合)
3. $T_i = \{t_i^1, \ldots, t_i^{m_i}\}$, (プレイヤー i のタイプの集合)
4. $u_i : \prod_{j=1}^n X_j \times T_i \to \mathbb{R}$, (プレイヤー i の利得関数)
5. $P \in \Delta(\prod_{i=1}^n T_i)$. (事前確率)

∘ $\Sigma_j := X_j^{T_j}$.

○ 事前利得関数

$$Eu_j(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum_{t \in T} P(t) u_j(\sigma_1(t_1), \ldots, \sigma_n(t_n), t_j)$$

○ 自分のタイプが決った後の 利得関数

$$Eu_j(\sigma_j(\bar{t}_j), \sigma_{-j} | \bar{t}_j) = \sum_{t \in T} P(t | \bar{t}_j) u_j(\sigma_1(t_1), \ldots, \sigma_n(t_n), \bar{t}_j)$$

事前にはベイジアンゲームは
$(N, \{\Sigma_i, Eu_i\}_{i \in N})$ という戦略形ゲームに帰着.

定義 6 事前ベイジアンゲーム $(N, \{\Sigma_i, Eu_i\}_{i \in N})$ に対して, $(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*) \in \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$ がナッシュ均衡であるとは,

$$\forall i \quad \forall \sigma_i \in \Sigma_i \quad Eu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

が成立することを云う.

定義 7 ベイジアンゲームの自分のタイプが決った後のナッシュ均衡 σ^* をベイジアン均衡とよぶ.

$$\forall i \quad \forall x_i \in X_i \quad \bar{t}_i \in T_i \quad Eu_i(\sigma_i^*(\bar{t}_i), \sigma_{-i}^* | \bar{t}_i) \geq Eu_i(x_i, \sigma_{-i}^* | \bar{t}_i).$$

命題 1 $\sigma^* \in \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$ について, 次の (1) と (2) は同値.

(1) $\forall i \quad \forall \sigma_i \in \Sigma_i \quad Eu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$.
(2) $\forall i \quad \forall x_i \in X_i \quad \bar{t}_i \in T_i \quad Eu_i(\sigma_i^*(\bar{t}_i), \sigma_{-i}^* | \bar{t}_i) \geq Eu_i(x_i, \sigma_{-i}^* | \bar{t}_i)$.

証明.

(1)' $\exists i \quad \exists \sigma_i \in \Sigma_i \quad Eu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) < Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$.
(2)' $\exists i \quad \exists x_i \in X_i \quad \bar{t}_i \in T_i \quad Eu_i(\sigma_i^*(\bar{t}_i), \sigma_{-i}^* | \bar{t}_i) < Eu_i(x_i, \sigma_{-i}^* | \bar{t}_i)$.

(1)' $\Longrightarrow$ (2)'.
仮に $\forall \bar{t}_i$, $Eu_i(\sigma_i^*(\bar{t}_i), \sigma_{-i}^* | \bar{t}_i) \geq Eu_i(x_i, \sigma_{-i}^* | \bar{t}_i)$ とすると,

$$\sum_{t_i} P(\{t_i\} \times T_{-i}) Eu_i(\sigma_i^*(t_i), \sigma_{-i}^* | t_i) \geq \sum_{t_i} P(\{t_i\} \times T_{-i}) Eu_i(x_i, \sigma_{-i}^* | t_i).$$

よって $Eu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$ となり矛盾.

(2)' $\Longrightarrow$ (1)'.
i について

$$\sigma_i(t_i) = \begin{cases} x_i & \text{if} \quad t_i = \bar{t}_i, \\ \sigma_i^*(t_i) & \text{if} \quad t_i \neq \bar{t}_i \end{cases}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
Eu_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) &= \sum_{t_i} P(\{t_i\} \times T_{-i}) Eu_i(\sigma_i^*(t_i), \sigma_{-i}^* | \, t_i) \\
&= \sum_{t_i \neq \bar{t}_i} P(\{t_i\} \times T_{-i}) Eu_i(\sigma_i^*(t_i), \sigma_{-i}^* | \, t_i) + P(\{\bar{t}_i\} \times T_{-i}) Eu_i(\sigma_i^*(\bar{t}_i), \sigma_{-i}^* | \, \bar{t}_i) \\
&< \sum_{t_i \neq \bar{t}_i} P(\{t_i\} \times T_{-i}) Eu_i(\sigma_i^*(t_i), \sigma_{-i}^* | \, t_i) + P(\{\bar{t}_i\} \times T_{-i}) Eu_i(x_i, \sigma_{-i}^* | \, \bar{t}_i) \\
&= Eu_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)
\end{aligned}$$

■

定理 2 ベイジアンゲーム $(N, \{X_i, T_i, u_i\}_{i \in N}, P)$ が以下の条件を満しているとする．すべての $i \in N$ に対し，

1. $X_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$; non-empty, convex, compact,
2. T_i is a finite set,
3. $u_i : \prod_{j=1}^n X_j \times T_i \to \mathbb{R}$; continuous, concave on X_i for all t_i.

このとき，ベイジアン均衡 $(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$ が存在する．

8　逆選択

8.1　保険契約問題

保険加入者のタイプの情報が不完備であるときの保険会社の問題意識の考察を行なう．

記号:

Θ: 非空有限集合　(購入者のタイプの集合)

S: 非空有限集合　(事象の集合)

$\{w_s^0\}_{s \in S}$: 任意の $s \in S$ に対して, $w_s^0 > 0$.　(各事象における資産)

$\{\hat{\rho}_i\}_{i \in \Theta}$: 任意の $i \in \Theta$ に対して, $\sum_{s \in S} \hat{\rho}_i(s) = 1$ が成立するような S から $[0, 1]$ への函数. (信念)

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that $u' > 0 > u''$.　(効用函数)

$c \geq 0$.　(支払額 (購入者の受取額))

$p \geq 0$.　(保険料)

仮定:

$\Theta = \{H, L\}$.

$S = \{G, B\}$.

$0 < \hat{\rho}_L(B) < \hat{\rho}_H(B) < 1.$

記号: $\rho_L = \hat{\rho}_L(B)$ and $\rho_H = \hat{\rho}_H(B)$.

解釈: H はハイリスクの購入者を, L はローリスクの購入者をそれぞれ表している. G は事故なし, B は事故ありの事象をそれぞれ表している.

- ゲームの手順.

1. 保険会社が契約プラン $\mathbf{L} = (w_G, w_B)$ を提示. これは保険料 p と支払額 c を提示することと同値.
2. 契約を結ぶ.
3. 事象が分かる.

但し, $w_G = w_G^0 - p$, $w_B = w_B^0 - p + c$.
契約プランは事象毎にどのような投資額になるのかを示す.

1. 準備

・購入者の期待効用

$$E_u^i(\mathbf{L}) = \rho_i u(w_B) + (1-\rho_i)u(w_G) \quad i = H,\, L.$$

・無差別曲線の図示
$w_B(w_G)$ とおいて, w_G で微分する.

$$\rho_i u(w_B(w_G)) + (1-\rho_i)u(w_G) = \bar{u}.$$
$$\rho_i u'(w_B(w_G))w_B'(w_G) + (1-\rho_i)u'(w_G) = 0.$$

よって,

$$w_B'(w_G) = -\frac{1-\rho_i}{\rho_i}\frac{u'(w_G)}{u'(w_B(w_G))} < 0.$$
$$w_B''(w_G) = -\frac{1-\rho_i}{\rho_i}\frac{u''(w_G)u'(w_B(w_G)) - u'(w_G)u''(w_B(w_G))w_B'(w_G)}{(u'(w_B(w_G)))^2} > 0.$$

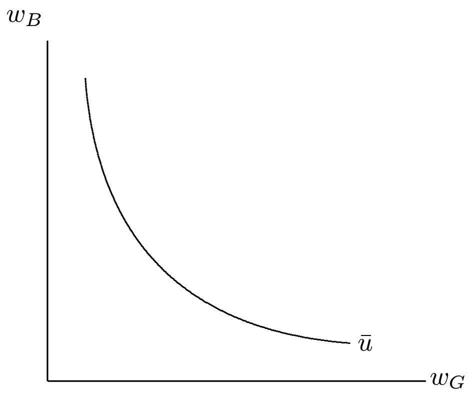


図 8.1 $Eu(\mathbf{L})$ の無差別曲線

2. タイプが区別可能

・保険会社の期待利潤

$$
\begin{aligned}
E\pi(\mathbf{L}) &= \rho_i(p-c)+(1-\rho_i)p \\
&= \rho_i(w_B^0-w_B)+(1-\rho_i)(w_G^0-w_G).
\end{aligned}
$$

等利潤曲線は傾き $-\dfrac{1-\rho_i}{\rho_i}$ の右下がりの直線となる.

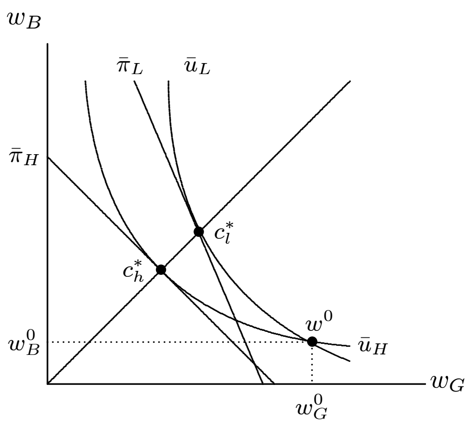


図 8.2 最適契約

図の書き順

(1) 点 w^0 を描く.

(2) 無差別曲線 $\bar{u}_H$ および $\bar{u}_L$ を描く.

(3) 45 度線を記入する.

(4) 等利潤線を描く.

各購入者は効用を最大化するような保険を購入する．その中で, 利潤を最大にする保険を各購入者に提示する.

注意: 最適契約は, $c_h^* = (w_G^h, w_B^h)$ をタイプ H へ, $c_l^* = (w_G^l, w_B^l)$ をタイプ L へそれぞれ提示する.

3. タイプが区別できない（逆選択）

保険会社は, 購入者のタイプは区別できないが, c_h^*, c_l^* を提示するとする.

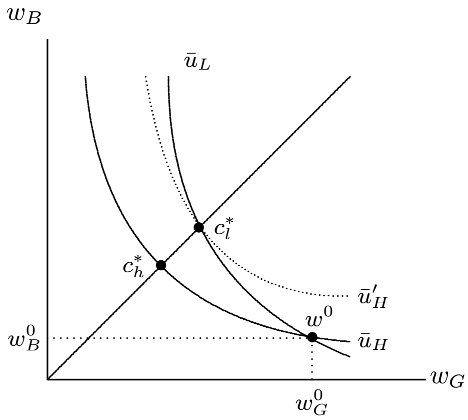


図 8.3 逆選択

注意:

- タイプ H の購入者は c_l^* を購入.
- 期待利潤が減少.
- タイプ H の購入者にとって

$$\rho_H u(w_B^l) + (1 - \rho_H) u(w_G^l) > \rho_H u(w_B^h) + (1 - \rho_H) u(w_G^h)$$

となり, タイプを L と偽って表明した方が得になる.

4. 解決の手段 1

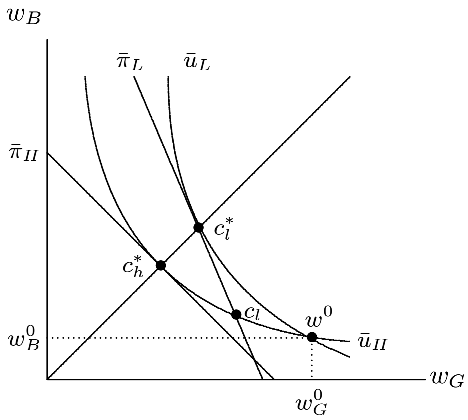


図 8.4 解決の手段 1

注意:

- c_h^* と c_l を提案.
- タイプ H の購入者は c_h^* と c_l とが無差別.
- タイプ L の購入者は $Eu(c_l) < Eu(w^0)$ となる. → 個人合理性 (参加制約) を満たさない.
- 購入者はタイプ H のみ.

5. 解決の手段 2（自己選択）

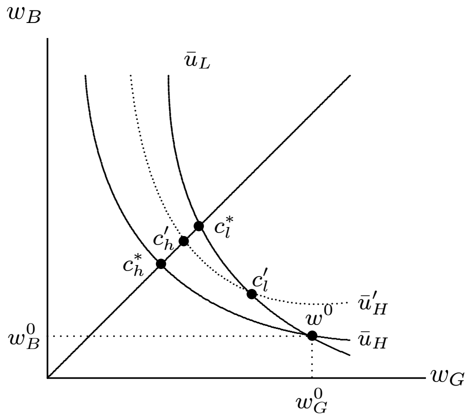


図 8.5 自己選択

注意:

- c_h' と c_l' を提案.

- タイプ H の購入者は c'_h を購入（タイプ H の購入者はタイプが区別できないことから得をしている）．
- タイプ L の購入者は c'_l を購入.
- タイプ H の契約は完全保証（$w_B = w_G$ の状況）．

6. プリンシパル-エージェント モデル

q を購入者がタイプ H である確率, $1-q$ を購入者がタイプ L である確率とする．
このときプリンシパル-エージェント モデルによる次善的契約は次の問題の解である．

$$
\begin{array}{lll}
\max\limits_{\{w_B^i, w_G^i\}_{i=H,L}} & qE\pi(w_B^H, w_G^H) + (1-q)E\pi(w_B^L, w_G^L) & \\
\text{subject to} & \rho_i u(w_B^i) + (1-\rho_i)u(w_G^i) \geq \rho_i u(w_B^0) + (1-\rho_i)u(w_G^0) \quad \forall i \in \{H, L\} & (IR) \\
 & \rho_i u(w_B^i) + (1-\rho_i)u(w_G^i) \geq \rho_i u(w_B^j) + (1-\rho_i)u(w_G^j) \quad \forall i,\, j \in \{H, L\} & (IC)
\end{array}
$$

(IR) は Individual Rationality の略で, 個人合理性 (参加) 条件と呼ばれる．
(IC) は Incentive Compatibility の略で, 誘引両立条件と呼ばれる．これは自己選択のための条件となっている．

8.2　労働契約問題

企業が労働者の情報を完全には知り得ない時におこる問題を考察する．

自己選択な労働契約を考える．

記号:

- Θ: a non-empty finite set. (労働者のタイプの集合)
- $\hat{q}$: $\sum_{i\in\Theta} \hat{q}(i) = 1$ が成立するような Θ から $[0,1]$ への函数. (信念)
- $U : \Theta \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (効用函数)
- $\underline{u}$: a real number. (留保効用)
- $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (企業の利潤函数)

仮定:

(i) $\Theta = \{G, B\}$.
(ii) 以下の性質をもつ $u,\, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $k > 1$ がある．
$u' > 0 > u''$,

$d' > 0$, $d'' > 0$ かつ $d(0) = 0$,
$U^G(w,e) = u(w) - d(e)$ かつ $U^B(w,e) = u(w) - kd(e)$.

(iii) 以下の性質をもつ $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がある.
$\pi' > 0 > \pi''$,
$\Pi(w,e) = \pi(e) - w$.

記号: $\hat{q}(G) = q$.

解釈: G は効率的な労働者, B は効率的ではない労働者を表している. $u(w)$ と $d(e)$ は, 賃金 w からの効用と努力水準 e からの不効用とをそれぞれ表している. $k > 1$ はタイプ B の労働者の方が努力水準からの不効用が高いことを表している. $\pi(e)$ は労働者の努力水準, e, からの売上を表す. したがって労働者の努力水準に応じて売上が変わる. 労働市場におけるタイプ G の労働者の比率を q, タイプ B の比率を $1-q$ とする.

注: 労働者の努力水準 e は立証可能である (契約に書ける) 事を仮定する.

- ゲームの手順.

1. 企業が契約プラン $\{(w,e)\}$ を提示.
2. 契約を結ぶ.
3. 事象が分かる.

1. 準備

・労働者の無差別曲線の図示

$e(w)$ とおいて, w で微分する. 以下, G タイプで計算する.

$$u(w) - d(e(w)) = \bar{u}.$$
$$u'(w) - d'(e(w))e'(w) = 0.$$

よって,

$$e'(w) = \frac{u'(w)}{d'(e(w))} > 0,$$
$$e''(w) = \frac{u''(w)d'(e(w)) - u'(w)d''(e(w))e'(w)}{\{d'(e)\}^2} < 0.$$

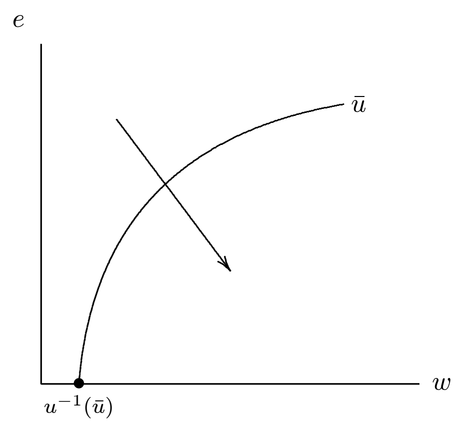


図 8.6 タイプ G の無差別曲線

但し, $u(w(0)) - d(0) = \bar{u}$ なので, $u(w(0)) = \bar{u} + d(0)$. したがって, $w(0) = u^{-1}(\bar{u} + d(0)) = u^{-1}(\bar{u})$.

・企業の無差別曲線の図示

$$\pi(e(w)) - w = \bar{\pi}.$$
$$\pi'(e(w))e'(w) - 1 = 0.$$

よって,

$$e'(w) = \frac{1}{\pi'(e(w))} > 0,$$
$$e''(w) = -\frac{\pi''(e(w))e'(w)}{\{\pi'(e)\}^2} > 0$$

となる.

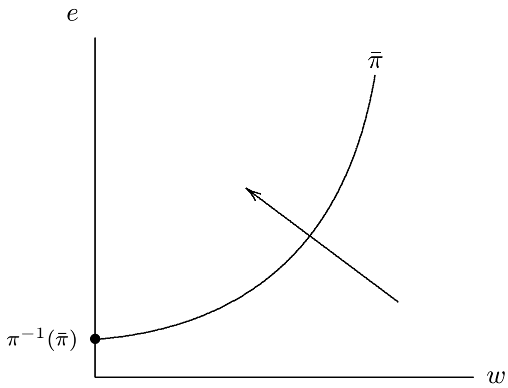


図 8.7 企業の無差別曲線

但し, $w = 0$ のとき $\pi(e(0)) = \bar{\pi}$ なので, $e(0) = \pi^{-1}(\bar{\pi})$.

2. タイプが区別可能

労働者の留保水準を $\underline{u}$ とする. このとき労働者の個人合理性条件 (IR) は,

$$u(w^G) - d(e^G) \geq \underline{u},$$
$$u(w^B) - d(e^B) \geq \underline{u}.$$

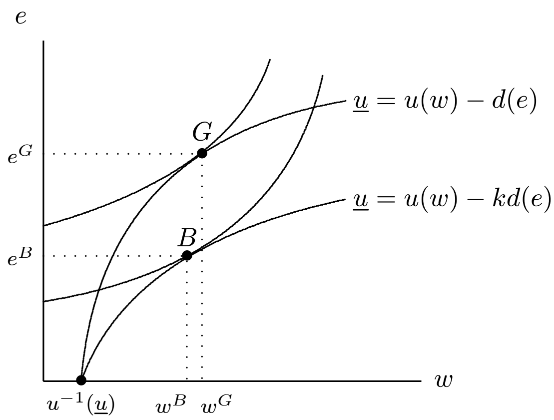


図 8.8 最適契約

注意: 最適契約は, タイプ G とタイプ B とに, (w^G, e^G) と (w^B, e^B) とをそれぞれ提示する.

ここで, 一階の条件より

$$\pi'(e^G) = \frac{d'(e^G)}{u'(w^G)},$$
$$\pi'(e^B) = \frac{kd'(e^B)}{u'(w^B)}.$$

3. タイプが区別できない

企業は, 労働者のタイプを区別できないが, 上の (w^G, e^G) と (w^B, e^B) とを提示するとする.

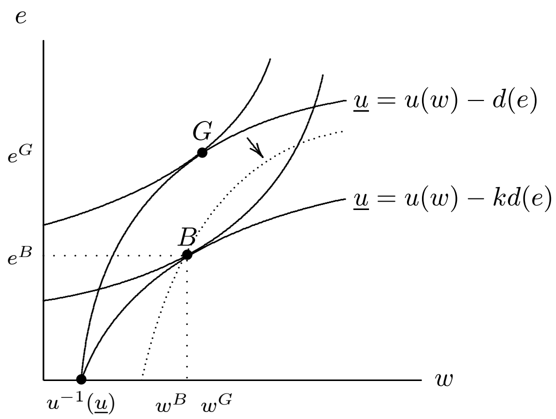


図 8.9 逆選択

注意:

- タイプ G の購入者にとって

$$u(w^B) - d(e^B) > u(w^G) - d(e^G)$$

となり, タイプを B と偽って表明した方が得になる.
- タイプ G の労働者は (w^B, e^B) の契約を結ぶ.
- 期待利潤が減少.

4. 自己選択の契約

$$
\begin{aligned}
&\max_{\{e^i,w^i\}_{i=G,B}} && q\{\pi(e^G)-w^G\}+(1-q)\{\pi(e^B)-w^B\} \\
&\text{subject to} && u(w^G)-d(e^G)\geq \underline{u} && \text{(IR-G)} \\
& && u(w^B)-kd(e^B)\geq \underline{u} && \text{(IR-B)} \\
& && u(w^G)-d(e^G)\geq u(w^B)-d(e^B) && \text{(IC-G)} \\
& && u(w^B)-kd(e^B)\geq u(w^G)-kd(e^G). && \text{(IC-B)}
\end{aligned}
$$

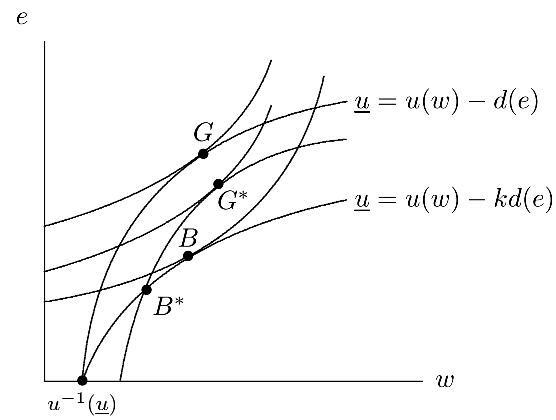


図 8.10 自己選択

注意:

- G^* と B^* とでタイプを分離.
- $w^{G^*} > w^G$,
  $e^{G^*} < e^G$.
- $w^{B^*} < w^B$,
  $e^{B^*} < e^B$.
- G タイプは高賃金. 努力水準はどちらのタイプも低下. $e^{G^*} > e^{B^*}$.

IC より

$$k(d(e^G)-d(e^B))\geq u(w^G)-u(w^B)\geq d(e^G)-d(e^B),$$

即ち, $(k-1)d(e^G)\geq(k-1)d(e^B)$ が成立する. $k>1$ より $d(e^G)\geq d(e^B)$ が成立するので, $e^G\geq e^B$.

特徴付け:

(i) $u(w^{G^*})-d(e^{G^*})=\underline{u}+(k-1)d(e^{B^*})$.

(ii) $u(w^{B^*}) - kd(e^{B^*}) = \underline{u}$.
(iii) $\pi'(e^{G^*}) = \dfrac{d'(e^{G^*})}{u'(w^{G^*})}$.
(iv) $\pi'(e^{B^*}) = \dfrac{kd'(e^{B^*})}{u'(w^{B^*})} + \dfrac{q(k-1)}{(1-q)} \times \dfrac{d'(e^{B^*})}{u'(w^{G^*})}$.

注) IR-G の条件が他から導出: 逆選択型制約の特徴.

$$\begin{aligned} u(w^G) - d(e^G) &\geq u(w^B) - d(e^B) \quad \text{(IC-G)} \\ &\geq u(w^B) - kd(e^B) \quad (k > 1) \\ &\geq \underline{u} \quad \text{(IR-B)} \end{aligned}$$

ラグランジュ関数を次のように定義する.

$$\begin{aligned} L = q\{&\pi(e^G) - w^G\} + (1-q)\{\pi(e^B) - w^B\} \\ &+\lambda_1(u(w^B) - kd(e^B) - \underline{u}) \\ &+\lambda_2(u(w^G) - d(e^G) - u(w^B) + d(e^B)) \\ &+\lambda_3(u(w^B) - kd(e^B) - u(w^G) + kd(e^G)) \end{aligned}$$

一階の条件:

$$e^G: \quad q\pi'(e^G) - \lambda_2 d'(e^G) + \lambda_3 kd'(e^G) = 0. \tag{3}$$
$$e^B: \quad (1-q)\pi'(e^B) - \lambda_1 kd'(e^B) + \lambda_2 d'(e^B) - \lambda_3 kd'(e^B) = 0. \tag{4}$$
$$w^G: \quad -q + \lambda_2 u'(w^G) - \lambda_3 u'(w^G) = 0. \tag{5}$$
$$w^G: \quad -(1-q) + \lambda_1 u'(w^B) - \lambda_2 u'(w^B) + \lambda_3 u'(w^B) = 0. \tag{6}$$

Step 1: (ii). (5) 式と (6) 式より,

$$\lambda_1 = \frac{q}{u'(w^G)} + \frac{1-q}{u'(w^B)} > 0$$

IR-B は等式で成立 → 特徴付けの (ii) が成立する.

(3) 式と (4) 式より,

$$\lambda_1 k = \frac{q\pi'(e^G)}{d'(e^G)} + \frac{(1-q)\pi'(e^B)}{d'(w^B)} > 0.$$

Step 2: (i). $\lambda_2 \geq 0$ であるので $\lambda_2 = 0$ と仮定する. (5) 式より

$$\lambda_3 = -\frac{q}{u'(w^G)} < 0$$

となり矛盾. したがって $\lambda_2 > 0$. よって IC-G も等式で成立. すると,

$$\begin{aligned} u(w^G) - d(e^G) &= u(w^B) - d(e^B) \\ &= u(w^B) - kd(e^B) + (k-1)d(e^B) \\ &= \underline{u} + (k-1)d(e^B). \end{aligned}$$

以上より, (i) が成立する.

参考) $e^G = e^B$ ならば, $u(w^G) - u(w^B) = 0$ となり $w^G = w^B$. このとき

$$\lambda_2 = \frac{q}{u'(w)} + \lambda_3 = q\lambda_1 + \lambda_3,$$
$$\lambda_2 = \frac{q\pi'(e)}{d'(e)} + k\lambda_3 = q\lambda_1 k + k\lambda_3 = k(q\lambda_1 + \lambda_3)$$

となり矛盾. したがって, $e^G \geq e^B$ は先に示しているので $e^G > e^B$ を得る.

Step 3: (iii). $e^G > e^B$ より, IC-G と IC-B が両方同時に等号で成立することはない. よって $\lambda_3 = 0$ (IC-G が等号なので). (1) 式と (3) 式より,

$$\lambda_2 = \frac{q}{u'(w^G)} = \frac{q\pi'(e^G)}{d'(e^G)}$$

となり

$$\pi'(e^G) = \frac{d'(e^G)}{u'(w^G)}.$$

したがって (iii) が成立する.

Step 4: (iv). (2) 式より,

$$-\lambda_2 = \frac{(1-q)\pi'(e^B)}{d'(e^B)} - \lambda_1 k.$$

(4) 式より,

$$-\lambda_2 = \frac{(1-q)}{u'(w^B)} - \lambda_1.$$

よって

$$\frac{(1-q)\pi'(e^B)}{d'(e^B)} - \lambda_1 k = \frac{(1-q)}{u'(w^B)} - \lambda_1.$$

$$\begin{aligned}
\frac{(1-q)\pi'(e^B)}{d'(e^B)} - \frac{(1-q)}{u'(w^B)} &= \lambda_1(k-1) \\
&= \frac{q(k-1)}{u'(w^G)} + \frac{(1-q)(k-1)}{u'(w^B)} \\
\therefore \frac{(1-q)\pi'(e^B)}{d'(e^B)} - \frac{(1-q)k}{u'(w^B)} &= \frac{q(k-1)}{u'(w^G)}
\end{aligned}$$

よって

$$\pi'(e^B) = \frac{q(k-1)}{1-q}\frac{d'(e^B)}{u'(w^G)} + \frac{kd'(e^B)}{u'(w^B)}$$

となり (iv) が成立する.

9 オークション

・ベイジアンゲームの例としてはオークションとシグナリングが 2 つの主要なものである.

オークション. ベイジアンゲームの例. Vijay Krishna, *Auction Theory*, Elsevier. 参照

◎ 一位価格入札.

$N = \{1, \ldots, n\}$, (プレイヤーの集合)

$X_i = [0, \infty[$, (プレイヤー i の戦略の集合)

$T_i = [0, 1]$, (プレイヤー i の評価額)

$u_i : \prod_{j=1}^n X_j \times T_i \to \mathbb{R}$ は以下のように定義される.

$$u_i(b_1, \ldots, b_n, v_i) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{if} \quad b_i = \max b_j, \\ 0 & \text{if} \quad b_i < b_j \quad \text{for some} \quad j, \\ \dfrac{1}{k}(v_i - b_i) & \text{if} \quad b_i = \max b_j,\ k \text{ 人が同じ入札額.} \end{cases}$$

$P(\cdot|\, v_i)$: 一様分布, 各タイプで独立. (事前確率)

○ 自分のタイプが決った後の期待利得関数

$$Eu_i(b_i(v_i), b_{-i}|\, v_i) = (v_i - b_i(v_i))\overbrace{P(\{v_{-i}|\, b_i(v_i) > b_j(v_j) \quad \forall j \neq i\}|\, v_i)}^{i\text{ が落札する確率}}$$

$\Sigma_i = X_i^{T_i}$.

場合 *1.* $\Sigma_i^l := \{b_i = k_i v_i|\, v_i \in T_i,\ k_i > 0\} \subset \Sigma_i$

$$\begin{aligned} & P(\{v_{-i}|\, b_i(v_i) > b_j(v_j) \quad j \neq i\}|\, v_i) \\ = {} & P(\{v_{-i}|\, b_i(v_i) > k_j v_j \quad j \neq i\}|\, v_i) \\ = {} & P(\{v_{-i}|\, b_i(v_i)/k_j > v_j \quad j \neq i\}|\, v_i) \\ = {} & \prod_{j \neq i} P(\{v_j|\, b_i(v_i)/k_j > v_j \quad j \neq i\}|\, v_i) \quad \text{(独立な分布)} \\ = {} & \prod_{j \neq i} \frac{b_i(v_i)}{k_j} \quad \text{(一様な分布).} \end{aligned}$$

ゆえに $Eu_i(b_i(v_i), b_{-i}|\, v_i) = (v_i - b_i(v_i)) \cdot \prod_{j\neq i} \frac{b_i(v_i)}{k_j}$.

ベイジアンナッシュ均衡.

$$\max_{x_i} (v_i - x_i) \cdot \prod_{j\neq i} \frac{x_i}{k_j}$$

つまり,

$$\max_{x_i} (v_i - x_i) x_i^{n-1} \cdot \prod_{j\neq i} \frac{1}{k_j}.$$

一階の条件.

$$\prod_{j\neq i} \frac{1}{k_j} x_i^{n-2}\{(n-1)v_i - nx_i\} = 0.$$

ゆえに $x_i = \dfrac{n-1}{n} v_i$.

よって $\left(\dfrac{n-1}{n}v_1, \ldots, \dfrac{n-1}{n}v_n\right)$ がベイジアンナッシュ均衡. 自分の評価額の $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ 倍.

Case 2. 狭義単調増加微分可能 $\leftarrow$ 線形

$$\Sigma_i^s := \{b \in \Sigma i|\, b'(v) > 0, \quad b(0) = 0\}.$$

対称な均衡をさがす. $b_i(v_i) = b(v_i)$ として,

$$\begin{aligned}
&P(\{v_{-i}|\, b(v_i) > b(v_j) \quad j \neq i\}|\, v_i) \\
&= P(\{v_{-i}|\, b^{-1}(b(v_i)) > v_j \quad j \neq i\}|\, v_i) \\
&= \prod_{j\neq i} P(\{v_{-i}|\, b^{-1}(b(v_i)) > v_j\}|\, v_i) \\
&= \prod_{j\neq i} b^{-1}(b(v_i)).
\end{aligned}$$

自分のタイプが決った後の期待利得関数: $Eu_i(b(v_i), b_{-i}|\, v_i) = (v_i - b(v_i)) \cdot [b^{-1}(b(v_i))]^{n-1}$.

ベイジアンナッシュ均衡.

$$\max_{x_i} (v_i - x_i) \cdot [b^{-1}(x_i)]^{n-1}$$

一階の条件

$$[-b^{-1}(x_i)]^{n-1} + (v_i - x_i)(n-1) \cdot \frac{1}{b'(v_i)} [b^{-1}(x_i)]^{n-2} = 0.$$

$b(v_i) = x_i$, $b^{-1}(x_i) = v_i$ なので,

$$v_i^{n-1} = (v_i - b(v_i))(n-1) \cdot \frac{1}{b'(v_i)} v_i^{n-2}.$$

よって
$$v_i^{n-1}b'(v_i) = (v_i - b(v_i))(n-1)v_i^{n-2}.$$
これを解くと,
$$b(v_i) = \frac{n-1}{n}v_i.$$
ゆえにベイジアンナッシュ均衡は $\left(\frac{n-1}{n}v_1, \ldots, \frac{n-1}{n}v_n\right)$.

注

$$\begin{aligned}
v^{n-1}b'(v) &= (v - b(v))(n-1)v^{n-2}.\\
(v^{n-1}b(v))' &= (n-1)v^{n-2}b(v) + v^{n-1}b'(v)\\
&= (n-1)v^{n-2}b(v) + (v - b(v))(n-1)v^{n-2}\\
&= v(n-1)v^{n-2}.\\
v^{n-1}b(v) &= \int v(n-1)v^{n-2}dv\\
&= \int (n-1)v^{n-1}dv\\
&= \frac{n-1}{n}v^n + K
\end{aligned}$$

$b(0) = 0$ より $K = 0$.
$$b(v) = \frac{n-1}{n}v.$$

◎ 二位価格入札.

$u_i : \prod_{j=1}^n X_j \times T_i \to \mathbb{R}$ は以下の式で定義される.

$$u_i(b_1, \ldots, b_n, v_i) = \begin{cases} v_i - \max_{j \neq i} b_j & b_i = \max_{j=1,\ldots,n} b_j \text{の場合}, \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

一番高い入札額の人が, 二番目に高い入札額で落札する.

注意 1 $b_i(v_i) = v_i$ が弱支配戦略になる.

証明. $\forall x_{-i} \in \prod_{j \neq i} X_j$ に対して, $\alpha_i := \max_{j \neq i} x_j$ とおく.

1. $v_i > \alpha_i$ のケース.
i が落札するので,
$$u_i(v_i, x_{-i}, v_i) \geq u_i(x_i, x_{-i}, v_i) \quad \forall x_i \in X_i.$$

2. $v_i = \alpha_i$ のケース.

$$0 \geq u_i(v_i, x_{-i}, v_i) \geq u_i(x_i, x_{-i}, v_i) \quad \forall x_i \in X_i.$$

3. $v_i < \alpha_i$ のケース.

$$0 = u_i(v_i, x_{-i}, v_i) = u_i(x_i, x_{-i}, v_i) \quad \forall x_i \in X_i.$$

よって $b_i(v_i) = v_i$ は弱支配戦略となる. ■

◎ 真のタイプを表明することが戦略となる (truth telling, **incentive compatibility**).

○ 一位価格入札，二位価格入札，イングリッシュ，ダッチオークション.

1. 一位価格入札:

期待利得

$$Eu_i(b(v_i), b_{-i}|\, v_i) = (v_i - b(v_i)) \cdot [b^{-1}(b(v_i))]^{n-1}.$$

ダッチオークション:

最初にボタンを押した人が落札するので,

戦略 $b_i : [0,1] \to \mathbb{R}_+$.

期待利得 $Eu_i(b(v_i), b_{-i}|\, v_i) = (v_i - b(v_i))P(\{v_{-i}|\, b_i(v_i) > b_j(v_j) \quad \forall j\}|\, v_i)$.

以上 2 つのオークションは「期待利得が等しい」. また，これら 2 つのオークションはプレイヤーの集合と戦略集合が一致している. このときこの 2 つのゲームは**戦略的同等である** (strategically equivalent) と云う.

2. 二位価格入札:

弱支配戦略 $b(v) = v$.

イングリッシュオークション (日本オークション):

ボタンを最後まで押した人が落札.

$b(v_i) = v_i$ が i の弱支配戦略となる.

$\because$) $b_i > v_i$, $b_i < v_i$ でも利得が下がるか同じ.

以上 2 つのオークションは**均衡が等しい**(ミルグロム=ウェーバー).

注意 2

1. ダッチオークションと一位価格オークションとは「戦略的同等」.
2. イングリッシュオークション (日本オークション) と二位価格オークションとは「均衡が等しい」.

○ 収益同等性 (Revenue Equivalence). 財の売り手の収入.

・一位価格入札での期待収入.
落札額 $\dfrac{n-1}{n}v$.
売り手からみた, $\dfrac{n-1}{n}v$ が起こる確率密度は nv^{n-1}.
期待収入 R_1

$$\begin{aligned}
R_1 &= \int_0^1 \frac{n-1}{n}v \times nv^{n-1}dv \\
&= \int_0^1 (n-1)v^n dv \\
&= \left[\frac{n-1}{n+1}v^{n+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{n-1}{n+1}.
\end{aligned}$$

・二位価格入札での期待収入.
順序統計

$X_1, \ldots, X_n$: 確率変数 (以下, r.v.), 独立同分布. 分布関数 F.
Y_i: i 番目に大きい r.v.

$$Y_1 = \max\{X_1, \ldots, X_n\}. \qquad \text{cf) } Y_1(\omega) = \max\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}.$$

$\{\omega |\, Y_2(\omega) \le y\}$ の確率を求めたい.　　　(2 番目に大きな r.v. が y 以下の事象の確率)

$$\{\omega |\, Y_2(\omega) \le y\} = \underbrace{\{\omega |\, Y_1(\omega) \le y\}}_{\text{全部が } y \text{ 以下}} \cup \underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega |\, X_i(\omega) > y \ge X_j(\omega) \quad \forall j \ne i\}}_{1 \text{ つ } y \text{ 以上がある}}$$

これらは互いに共通部分がない.

$$
\begin{aligned}
&P(\{\omega|\, Y_2(\omega) \le y\}) \\
&= P(\{\omega|\, Y_1(\omega) \le y\}) + \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega|\, X_i(\omega) > y \ge X_j(\omega) \quad \forall j \ne i\}) \\
&= P(\{\omega|\, Y_1(\omega) \le y\}) + \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega|\, X_i(\omega) > y\}) \prod_{j \ne i} P(\{\omega|\, y \ge X_j(\omega)\}) \\
&= P(\{\omega|\, Y_1(\omega) \le y\}) + \sum_{i=1}^{n} (1 - F(y))[F(y)]^{n-1} \\
&= [F(y)]^n + n(1 - F(y))[F(y)]^{n-1}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
F_{Y_2}(x) &= [F(x)]^n + n(1 - F(x))[F(x)]^{n-1}, \\
f_{Y_2}(x) &= n(n-1)(1 - F(x))[F(x)]^{n-2} f(x)
\end{aligned}
$$

落札額 v.

期待収入 R_2

$$
\begin{aligned}
R_2 &= \int_0^1 vn(n-1)(1-v)v^{n-2} dv \\
&= \int_0^1 n(n-1)(1-v)v^{n-1} dv \\
&= n(n-1) \int_0^1 (v^n - v^{n-1}) dv \\
&= n(n-1) \left[\frac{1}{n} v^n - \frac{1}{n+1} v^{n+1} \right]_0^1 \\
&= n(n-1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= (n-1) - \frac{n(n-1)}{n+1} \\
&= \frac{(n-1)(n+1-n)}{n+1} \\
&= \frac{n-1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

注意 3

1. $R_1 = R_2$.
2. $R_1(n+1) - R_1(n) = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0$ より, 参加者が増えると期待収入増加.

10　リスクに対する態度

定義 8 $u : X \to \mathbb{R}$ を効用関数 $Eu : \Delta(X) \to \mathbb{R}$ を期待効用関数とする.

1. リスク回避的 *(risk averse)* 効用関数とは，すべての $t \in [0,1]$, $u(tx + (1-t)y) \geq tu(x) + (1-t)u(y)$,
2. リスク中立的 *(risk neutral)* 効用関数とは，すべての $t \in [0,1]$, $u(tx + (1-t)y) = tu(x) + (1-t)u(y)$,
3. リスク愛好的 *(risk lover)* 効用関数とは，すべての $t \in [0,1]$, $u(tx + (1-t)y) \leq tu(x) + (1-t)u(y)$.

注

- $Eu(tL_1 + (1-t)L_2) = tEu(L_1) + (1-t)Eu(L_2)$.
- リスク回避的な個人が, リスクの存在する商品を好むこともある.

例) 次のようなくじ L と C を考える.

図 10.1 くじと賞金

L は確率 0.9 で 12 が, 確率 0.1 で 8 が当たるようなくじである．一方 C は確実に 10 がもらえるようなくじである.

個人の効用が $u(x) = \sqrt{x}$ で与えられているとする．するとこの個人はリスク回避的である．期待効用を計算すると,

$$Eu(L) = 0.9\sqrt{12} + 0.1\sqrt{8} = 3.40 > 3.16 = \sqrt{10} = Eu(C)$$

となり, リスクのある L の方を好む.

○ 効用関数とリスク態度を知る.

● 実験のアイディア

くじを $L=(x,y;p,1-p)$ で与える.

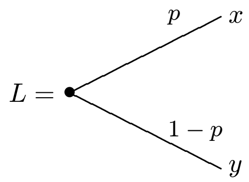


図 10.2 くじと賞金

このとき $u(C)=pu(x)+(1-p)u(y)$ を満たす C を実験でさがす.

例) $x=1$, $y=0$, $u(x)=1$, $u(y)=0$ とする.

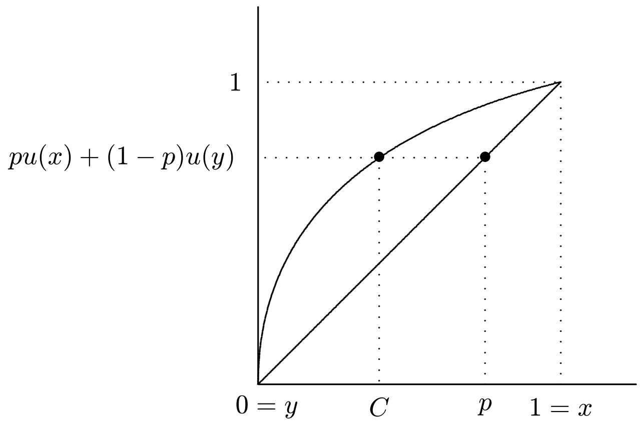


図 10.3 賞金と期待効用

ここで,

$C \le p$ ならば, リスク回避的,

$C = p$ ならば, リスク中立的,

$C \ge p$ ならば, リスク愛好的.

実験手順.

1. 被験者に L のくじの販売価格 X を宣言させる.
2. 実験者がランダムにくじの購入価格 Z を決める.

   $Z \ge X$ ならば, Z で販売.

   $Z < X$ ならば, 被験者はくじを引く. その賞金を得る.
3. L を変えてくり返す.

注意 4 $X = C$ とするのが弱支配戦略 (但し, C は $u(C) = pu(x) + (1-p)u(y)$ を満たすもの).

$\because$) （期待効用を仮定する.）

	$z < C$	$C < z < x$	$x < z$
$X = C$ と設定	$pu(x) + (1-p)u(y)$	$u(z)$	$u(z)$
$X > C$ と設定	$pu(x) + (1-p)u(y)$	$pu(x) + (1-p)u(y)$	$u(z)$

$C < Z$, u は増加であることから, $pu(x) + (1-p)u(y) = u(C) < u(Z)$.

	$z < C$	$C < z < x$	$x < z$
$X = C$ と設定	$pu(x) + (1-p)u(y)$	$u(z)$	$u(z)$
$X < C$ と設定	$pu(x) + (1-p)u(y)$	$pu(x) + (1-p)u(y)$	$u(z)$

$X = C$ とするのが弱支配戦略となる. ■

例) $x = 1$, $y = 0$, $u(x) = 1$, $u(y) = 0$ とする.

図 10.4 くじと賞金

0 くじ L についていくらで売りますか?

1 $X = 1/4 \longrightarrow$ この人はリスク回避的

2 くじ L' についていくらで売りますか?

3 $X = 1/2$.

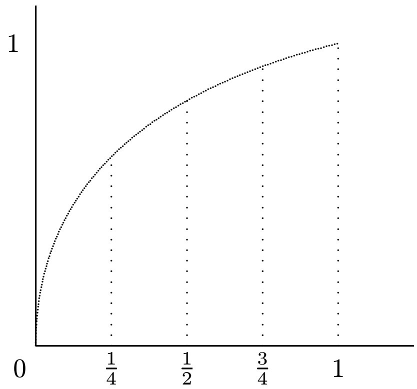


図 10.5 賞金と期待効用

確率や金額を変えて, 効用函数を求める.

○ リスク回避的 v.s. リスク中立的

利得関数: リスク回避的な利得関数

$$u_i(b_1, \ldots, b_n, v_i) = \begin{cases} u(v_i - b_i(v_i)) & \text{if } i \text{ が落札}, \\ u(0) = 0 & \text{if } i \text{ 以外が落札}. \end{cases}$$

$u' > 0 > u''$: リスク回避的の仮定.

● リスクに対する態度でどのような違いが生じるか?

一位価格入札

$$Eu_i(b_1, \ldots, b_n, v_i) = u(v_i - b(v_i))(b^{-1}(b(v_i)))^{n-1}$$
$$\max_{x_i} u(v_i - x_i)(b^{-1}(x_i))^{n-1}$$

一階の条件は,

$$0 = -u'(v_i - x_i)b^{-1}(x_i)^{n-1} + u(v_i - x_i)(n-1) \times \frac{1}{b'(v_i)} \times b^{-1}(x_i)^{n-2}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} b'(v_i) &= \frac{u(v_i - x_i)(n-1)}{u'(v_i - x_i)b^{-1}(x_i)} \\ &= \frac{u(v_i - x_i)(n-1)}{u'(v_i - x_i)v_i} \quad (\because v_i = b^{-1}(x_i)) \\ &=: b'_A(v_i) \end{aligned}$$

リスク中立的なケース

$$b'(v_i) = \frac{(v_i - x_i)(n-1)}{v_i} =: b'_N(v_i).$$

参) u は狭義凹なので $u(z) > u'(z)z$.

$$\begin{aligned}
b'_A(v_i) - b'_N(v_i) &= \frac{u(v_i - x_i^A)(n-1)}{u'(v_i - x_i^A)v_i} - \frac{(v_i - x_i^N)(n-1)}{v_i} \\
&> (v_i - x_i^A)\frac{n-1}{v_i} - \frac{(v_i - x_i^N)(n-1)}{v_i} \\
&= \frac{n-1}{v_i}(v_i - x_i^A - v_i + x_i^N) \\
&= \frac{n-1}{v_i}(x_i^N - x_i^A) \\
&= \frac{n-1}{v_i}(b_N(v_i) - b_A(v_i)).
\end{aligned}$$

ただし,

$x_i^A = b_A(v_i)$: リスク回避的なときの入札額,
$x_i^N = b_N(v_i)$: リスク中立的なときの入札額.

参)

$$\begin{aligned}
p(v) &:= \exp\left(-\int_v^1 \frac{n-1}{x}dx\right) \\
p'(v) &= \frac{n-1}{v}\exp\left(-\int_v^1 \frac{n-1}{x}dx\right) \\
&= p(v)\frac{n-1}{v}.
\end{aligned}$$

すると,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dv_i}[p(v_i)(b_A(v_i) - b_N(v_i))] \\
&= p'(v_i)(b_A(v_i) - b_N(v_i)) + p(v_i)(b_A(v_i) - b_N(v_i))' \\
&> p'(v_i)(b_A(v_i) - b_N(v_i)) + p(v_i)\frac{n-1}{v_i}(b_N(v_i) - b_A(v_i)) \\
&= p(v_i)\frac{n-1}{v_i}(b_A(v_i) - b_N(v_i)) - p(v_i)\frac{n-1}{v_i}(b_A(v_i) - b_N(v_i)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

したがって, $p(v_i)(b_A(v_i) - b_N(v_i)) > 0$. よって $b_A(v_i) > b_N(v_i)$.

注意 5

1. 一位価格入札では $b_A(v_i) > b_N(v_i)$ が成立する．即ち, リスク回避者の方がリスク中立的な個人よりも高い入札額.
2. リスク回避的な効用の下では,

$$\text{一位価格入札の期待収入} > \text{二位価格入札の期待収入}.$$

$\because$) 1 は既に示した.

二位価格入札において u がリスク回避的ならば, $b_i(v_i) = v_i$ が弱支配戦略となる．したがって,

$$\begin{aligned}\text{一位価格入札 (リスク中立的) の期待収入} &= \text{二位価格入札 (リスク中立的) の期待収入}\\ &= \text{二位価格入札 (リスク回避的) の期待収入}.\end{aligned}$$

一方

$$\text{一位価格入札 (リスク回避的) の期待収入} > \text{一位価格入札 (リスク中立的) の期待収入}.$$

よって所望の結果を得る.

11　ダブルオークション

○ ダブルオークション (市場取引ゲーム)

売り手が売値を, 買い手が買値を提示し,「売 $\leq$ 買」のときに取引が成立する市場取引ゲームであり，その時の取引価格は両価格のちょうど真ん中の価格とする.

記号:

$N = \{b, s\}$.　　(プレイヤーの集合)

$X_i = [0, \infty[$.　　(価格の集合)

$T_i = [0, 1]$.　　(プレイヤー i の評価額のタイプの集合)

$u_i : X_b \times X_s \times T_b \times T_s \to \mathbb{R}$ を下記で与える.

$$u_b(p_b, p_s, v_b, v_s) = \begin{cases} v_b - \dfrac{p_b + p_s}{2} & \text{if} \quad p_s \leq p_b, \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

$$u_s(p_b, p_s, v_b, v_s) = \begin{cases} \dfrac{p_b + p_s}{2} - v_s & \text{if} \quad p_s \leq p_b, \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

$P(\cdot \mid v_i)$: 一様分布.

- 自分のタイプが決った後の期待効用

$$Eu_b(p_b, p_s|\,v_b) = \left\{v_b - \frac{p_b + E[p_s(v_s)|\,p_b \geq p_s(v_s)]}{2}\right\} \times P(\{v_s|\,p_b \geq p_s(v_s)\}|\,v_b),$$
$$Eu_s(p_b, p_s|\,v_s) = \left\{\frac{p_s + E[p_b(v_b)|\,p_b(v_b) \geq p_s]}{2} - v_s\right\} \times P(\{v_b|\,p_b(v_b) \geq p_s\}|\,v_s).$$

ここで, $E[p_s(v_s)|\,p_b \geq p_s(v_s)]$ は取引が成立するときの p_s の期待値を表している.

- 戦略集合を

$$\Sigma_i^a = \{p_i : T_i \to X_i|\,p_i(v_i) = a_i + c_i v_i\}$$

とする.

1．確率

$$\begin{aligned} P(\{v_s|\,p_b \geq p_s(v_s)\}|\,v_b) &= P(\{v_s|\,p_b \geq a_s + c_s v_s\}|\,v_b) \\ &= P\left(\left\{v_s \middle| \frac{p_b - a_s}{c_s} \geq v_s\right\} \middle| v_b\right) \\ &= \frac{p_b - a_s}{c_s}, \\ P(\{v_b|\,p_b(v_b) \geq p_s\}|\,v_s) &= P(\{v_b|\,a_b + c_b v_b \geq p_s\}|\,v_s) \\ &= P\left(\left\{v_b \middle| v_b \geq \frac{p_s - a_b}{c_b}\right\} \middle| v_s\right) \\ &= 1 - \frac{p_s - a_b}{c_b}. \end{aligned}$$

2. 条件付期待値

$$
\begin{aligned}
E[p_s(v_s)|\, p_b \geq p_s(v_s)] &= E[a_s + c_s v_s|\, p_b \geq a_s + c_s v_s] \\
&= \frac{c_s}{p_b - a_s}\int_0^{\frac{p_b-a_s}{c_s}} a_s + c_s v_s dv_s \\
&= \frac{c_s}{p_b - a_s}\left[a_s v_s + \frac{1}{2}c_s v_s^2\right]_0^{\frac{p_b-a_s}{c_s}} \\
&= \frac{c_s}{p_b - a_s} \times \frac{(p_b - a_s)(p_b + a_s)}{2c_s} \\
&= \frac{p_b + a_s}{2}, \\
E[p_b(v_s)|\, p_b(v_b) \geq p_s] &= E[a_b + c_b v_b|\, a_b + c_b v_b \geq p_s] \\
&= \frac{c_b}{c_b - p_s + a_b}\int_{\frac{p_s-a_b}{c_b}}^{1} a_b + c_b v_b dv_b \\
&= \frac{c_b}{c_b - p_s + a_b} \times \frac{(c_b - p_s + a_b)(c_b + p_s + a_b)}{2c_b} \\
&= \frac{c_b + p_s + a_b}{2}.
\end{aligned}
$$

3. 自分のタイプが決った後の期待効用

$$
\begin{aligned}
Eu_b(p_b, p_s|\, v_b) &= \left\{v_b - \frac{1}{2}\left(p_b + \frac{p_b + a_s}{2}\right)\right\} \times \frac{p_b - a_s}{c_s}, \\
Eu_s(p_b, p_s|\, v_s) &= \left\{\frac{1}{2}\left(p_s + \frac{p_s + a_b + c_b}{2}\right) - v_s\right\} \times \left(1 - \frac{p_s - a_b}{c_b}\right).
\end{aligned}
$$

4. ベイジアンナッシュ均衡

一階の条件より

$$
\begin{aligned}
p_b &= \tfrac{2}{3}v_b + \tfrac{1}{3}a_s \quad (= c_b v_b + a_b), \\
p_s &= \tfrac{2}{3}v_s + \tfrac{1}{3}(a_b + c_b) \ (= c_s v_s + a_s).
\end{aligned}
$$

$c_b = 2/3$, $c_s = 2/3$, $a_b = 1/12$ かつ $a_s = 1/4$.

ベイジアンナッシュ均衡は

$$
\begin{aligned}
p_b(v_b) &= \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12}, \\
p_s(v_s) &= \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

5. 取引領域

$$
\begin{aligned}
p_b \geq p_s &\iff \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12} \geq \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4} \\
&\iff v_b \geq v_s + \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

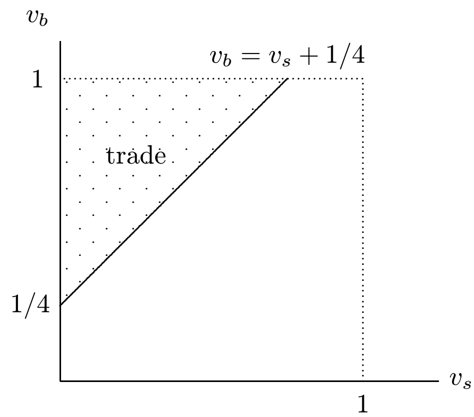


図 11.1 取引領域

6. 意義

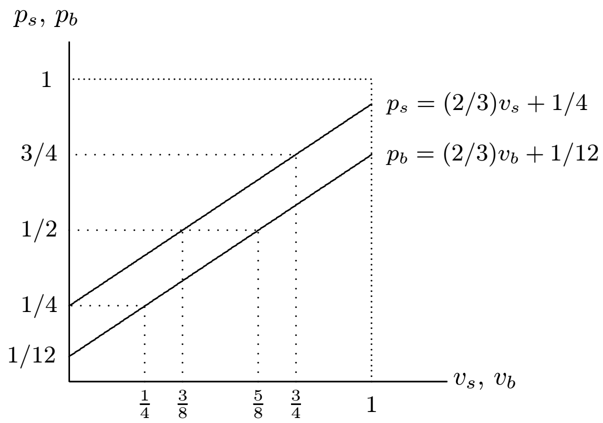


図 11.2

買い手

$p_s = 1/4$ のとき, $[1/4, 1]$ のタイプの買い手が $p_b \geq 1/4$ で購入可能.
$p_s = 1/2$ のとき, $[5/8, 1]$ のタイプの買い手が $p_b \geq 5/8$ で購入可能.

cf) 財を 1 単位のみ交換.

売り手

$p_b = 1/4$ のとき, 0 のタイプの売り手が売る.
$p_b = 1/2$ のとき, $[0, 3/8]$ のタイプの売り手が売る.

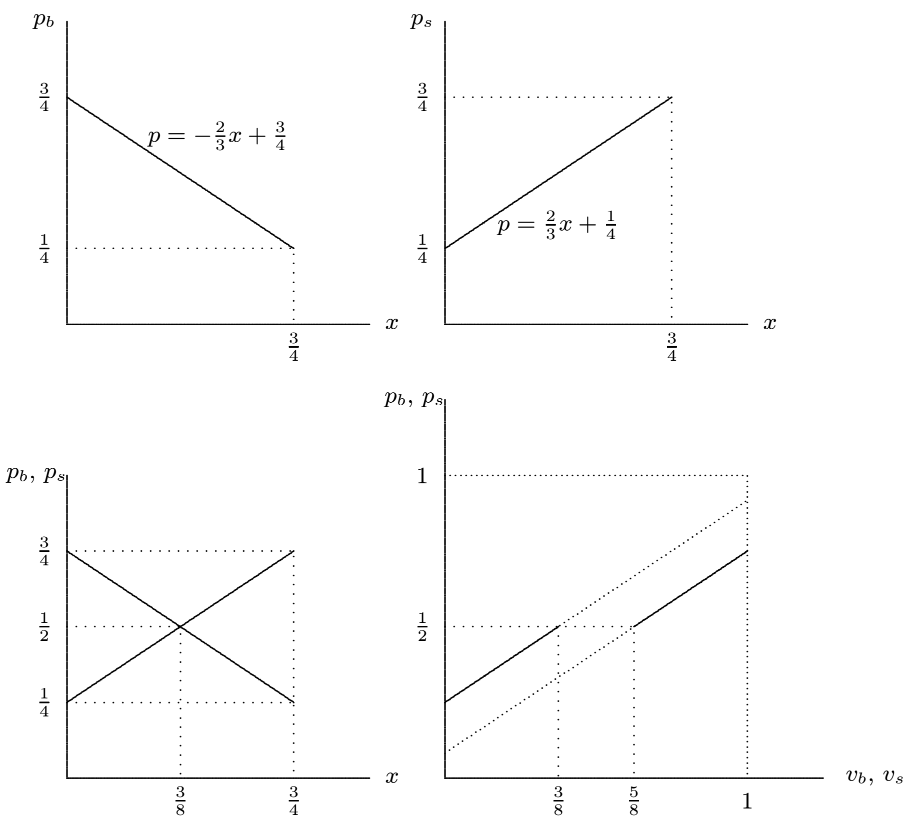


図 11.3 (x は人数, 取引量)

「$p_b \geq p_s$」より, 3/8 まで取引が可能（成立).
買い手は $[5/8, 1]$ の人達が, 売り手は $[0, 3/8]$ の人達が取引を行う.

12　シグナリングゲーム (Signaling Games)

∘ プレーヤーの行動がシグナルの役割を果たす.

モデル: スペンスのモデルをベイジアンゲームで考える.

労働者:

$T = \{H, L\}$: タイプ.
$u(w) - d(t, e)$: タイプ t の労働者の利得函数. 但し,

w: 賃金.
e: 教育水準.

$u' > 0 \geq u''$ かつ $d_e,\, d_{ee} > 0$.
$d(H,e) < d(L,e)$ かつ $d_e(H,e) < d_e(L,e)$.

注: 労働者の戦略は教育水準 $e(\,\cdot\,) : T \to \mathbb{R}_+$.

企業: 競争的な企業を考え, 利潤ゼロを仮定.

$\pi(t,e) - w$: 労働者のタイプが t のときの利得函数. 但し,

$\pi_e > 0 \geq \pi_{ee}$.
$\pi(H,e) > \pi(L,e)$ かつ $\pi_e(H,e) > \pi_e(L,e)$.

1. 準備 1

シグナリングゲームの構成

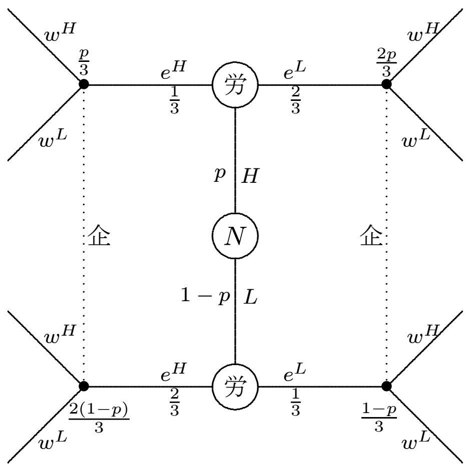


図 12.1. シグナリングゲーム

注:

- 労働者の行動をシグナルと解釈.
- 企業は労働者のタイプが未知.
- 下のような期待利得表をもつ 4×4 の戦略形ゲーム (ナッシュ均衡=ベイジアン均衡

(部分ゲーム完全均衡))

企 \ 労	$e^H e^H$	$e^H e^L$	$e^L e^H$	$e^L e^L$
$w^H w^H$				
$w^H w^L$				
$w^L w^H$				
$w^L w^L$				

- 均衡概念として完全ベイジアン均衡 (PBE, 均衡を戦略と信念の組で捉える) がよく使われる.

定義 9 シグナリングゲームとは,

(a) $N = \{1, 2\}$.
　プレーヤー 1 をシグナルの送り手
　プレーヤー 2 をシグナルの受け手

(b) X_1 : プレーヤー 1 の行動集合で，プレーヤー 1 のシグナル
　X_2 : プレーヤー 2 の行動集合

(c) T_1 : プレーヤー 1 のタイプ集合

(d) $u_i : X_1 \times X_2 \times T_1 \to \mathbb{R}$: プレーヤー i の利得関数

(e) $p \in \Delta(T_1)$: タイプの起こる確率

から構成され，手順

(a) 最初にタイプが確率的に決まる.

(b) プレーヤー 1 がタイプを受けた後，シグナル (行動) を決める.

(c) プレーヤー 2 がシグナルを受けた後，プレーヤー 1 のタイプが未知のまま行動を決める.

(d) 最後に利得が定まる.

によって進行されるベイジアンゲームである.

定義 10 シグナリングゲームにおいて，$(x_1^*(t_1), x_2^*(x_1), \mu(t_1|x_1))$ が完全ベイジアン均衡であるとは，下記の手順によって求められる戦略と信念の組である.

(a) シグナル x_1 を受け取った時タイプが t_1 である信念 $\mu(t_1|x_1)$ を,

$$\mu(t_1|x_1) = \frac{p(t_1)}{\sum_{t_i \in T_1} p(t_i)}$$

　と計算し,

(b) プレーヤー 2 は，プレーヤー 1 の行動 x_1 を所与とした下で

$$x_2^*(x_1) \in \arg\max_{x_2 \in X_2} \sum_{t_1 \in T_1} \mu(t_1|x_1) u_2(x_1, x_2, t_1)$$

　に従って最適反応戦略を立て,

(c) プレーヤー 1 は，プレーヤー 2 の最適反応戦略 $x_2^*(x_1)$ を所与とした下で

$$x_1^*(t_1) \in \arg\max_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2^*(x_1), t_1)$$

に従って戦略を決める．

2. 準備 2

労働者の無差別曲線を w-e 平面上に描く．

$$\begin{aligned} w'(e) &= \frac{d_e(\theta, e)}{u'(w)} > 0, \\ w''(e) &= \frac{d_{ee}(\theta, e)u'(w) - d_e(\theta, e)u''(w)}{[u'(w)]^2} > 0. \end{aligned}$$

よって

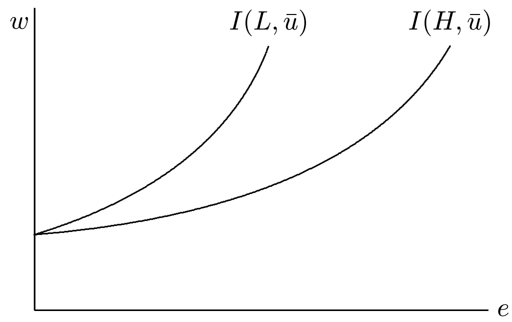


図 12.2 労働者の無差別曲線

次に企業の無差別曲線 (等利潤曲線) を w-e 平面に描く．

$$\begin{aligned} w'(e) &= \pi_e(t, e) > 0, \\ w''(e) &= \pi_{ee}(t, e) < 0. \end{aligned}$$

よって

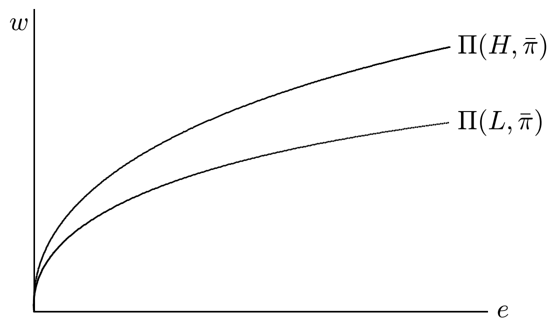


図 12.3 企業の等利潤曲線

3. 対称情報

企業は競争的で利得ゼロを仮定して分析する.

労働者は $w(e)$ を所与の下, 次の問題を解く:

$$\max_{e} \; u(w(e)) - d(t, e).$$

(i) No Envy な場合: $u(w^L) - d(L, e^L) \geq u(w^H) - d(L, e^H)$

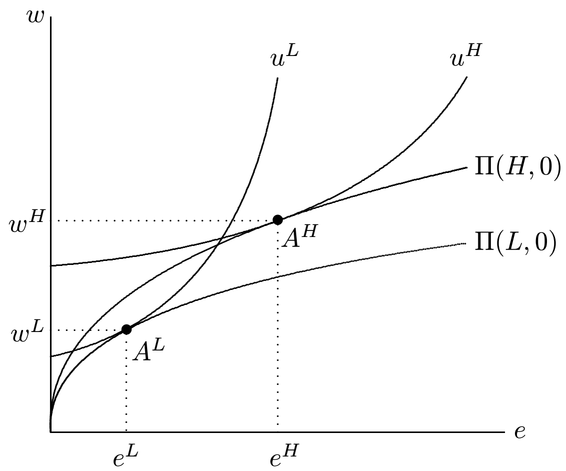


図 12.4 対称情報かつ No envy な場合

(ii) Envy な場合: $u(w^L) - d(L, e^L) < u(w^H) - d(L, e^H)$

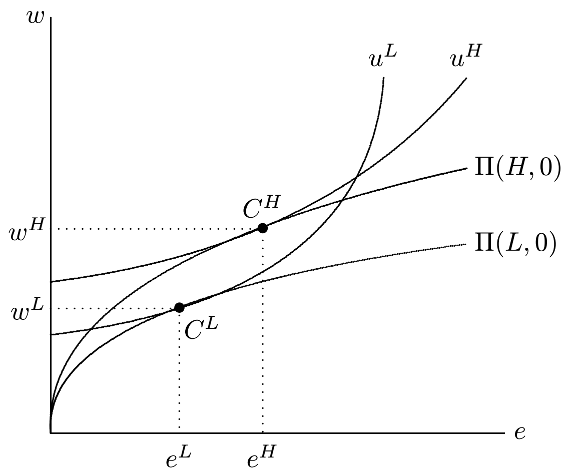


図 12.5 対称情報かつ Envy な場合

注: タイプが分かるので $\{C^L, C^H\}$ を契約できる.

4. 分離均衡

シグナルが有効な均衡を考える.

4.1 No envy な場合:

$$w(e) = \begin{cases} \pi(L,e) & \text{if} \quad e < e^H, \\ \pi(H,e) & \text{if} \quad e \geq e^H, \end{cases} \tag{7}$$

$$e(H) = e^H, \quad e(L) = e^L, \tag{8}$$

$$\mu(H|\,e) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad e < e^H, \\ 1 & \text{if} \quad e \geq e^H. \end{cases} \tag{9}$$

(7), (8), (9) → 完全ベイジアン均衡.

4.2 Envy な場合: 下図にあるようにタイプ L の労働者は C^L ではなく, C^H を選択するインセンティブがある. → 逆選択.

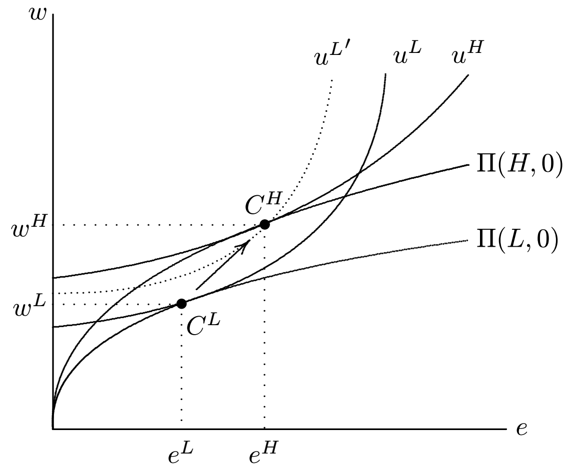


図 12.6 非対称情報且つ Envy なケース

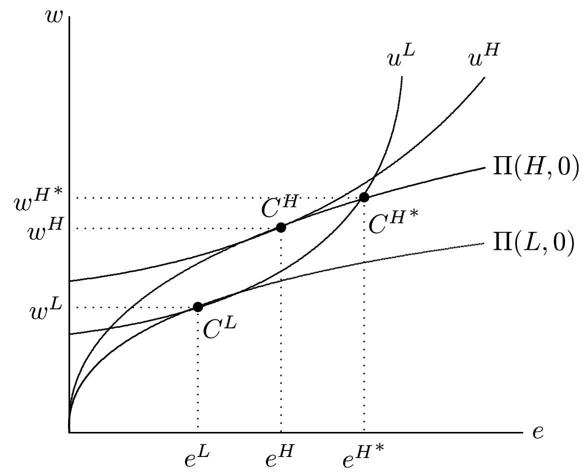


図 12.7 分離均衡

$$w(e) = \begin{cases} \pi(L, e) & \text{if} \quad e < e^{H^*}, \\ \pi(H, e) & \text{if} \quad e \geq e^{H^*}, \end{cases} \tag{10}$$

$$e(H) = e^{H^*}, \quad e(L) = e^L, \tag{11}$$

$$\mu(H|\, e) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad e < e^{H^*}, \\ 1 & \text{if} \quad e \geq e^{H^*}. \end{cases} \tag{12}$$

(10), (11), (12) $\rightarrow$ 完全ベイジアン均衡.

注 1: H タイプの労働者は $e^{H^*} > e^L$ の教育水準を選択.

注 2: 企業が競争的でない場合: IR: $u(w) - d(t, e) \geq \underline{u}$ を制約とする. プリンシパルが企業の逆選択型.

13 実験経済の概要とゲーム理論への応用

13.1 歴史

個人的選択（意思決定）からスタート

$\Big\downarrow$ Allais, Ellsberg...

ゲーム論の実験

- シミュレーション　アクセルロッド他...

- 囚人のジレンマの実験, 交渉ゲーム等 不平等回避によるアプローチ（利得関数の修正）

V. Smith: 実験の手法を確立.
目　　的: 理論との整合性, 新理論構築の為

○ 実験と実証分析

実証:
既存のデータを利用. 容易に入手.
ミクロデータが存在しないこともある.
長期的, 大規模な経済モデル.

実験:
必要なデータを生成する.
実験費が高価.
短期的, 小規模な経済モデル.

○ 心理学との比較

実験心理:
一般に妥当する人間の諸活動.
経験的な法則性の発見.
実験の為に被験者を騙すこともある.
報酬が一定なことが多い.

$B = f(E, P)$ の f を発見.
但し, B, E および P は, 行動 (behavior), 環境 (environment) および人格 (personality) をそれぞれ表す.

実験経済:
特定の制度（モデル）下で妥当する法則.
理論との整合性.
実験の為に被験者を騙すことがない（詳しい説明）
報酬が人により異なることも多い.

○ 期待効用の実験

以下では $u(0) = 0$ として考える.

• Allais の実験.

以下の図のような 4 つのくじ A, B, C および D を考え, 次のような 2 つの質問を行う.
Q 1. A と B とどちらを好みますか?
Q 2. C と D とどちらを好みますか?

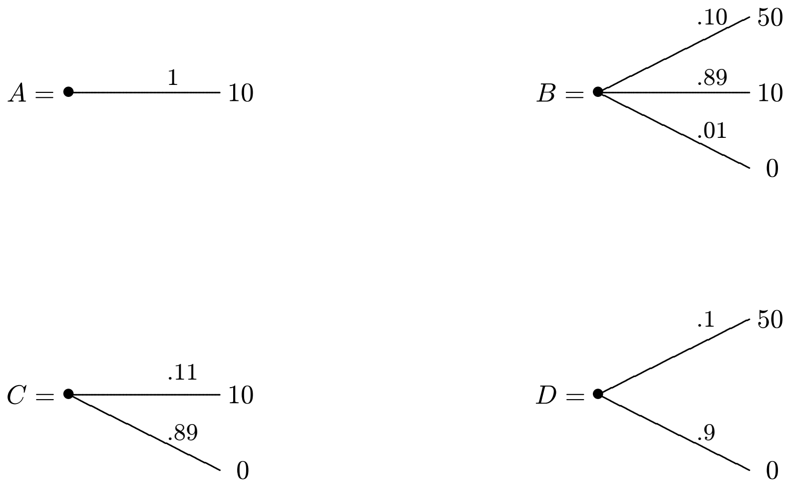


図 13.1 Allais の実験: くじと賞金

・結果: 多くの人は

$$A \succ B \quad \text{and} \quad D \succ C$$

を選択する. しかしこれは期待効用の理論とは整合的ではない. なぜならば,

$$\begin{aligned}
A \succ B &\iff u(10) > 0.1u(50) + 0.89u(10) \\
&\iff 0.11u(10) > 0.1u(50) \\
&\iff 1.1u(10) > u(50), \\
D \succ C &\iff 0.1u(50) > 0.11u(10) \\
&\iff u(50) > 1.1u(10)
\end{aligned}$$

が成立するが, これは矛盾である.

• Ellsberg の実験.

300 個のボールが入った箱を考える. 300 個のボールの内 100 個は赤色（R）のボールであることが分かっている. 残りの 200 個は青色（B）と黄色（Y）のボールからなるが, その内訳は分からないとする.

赤	100 個	$1/3$
青	?個	p
黄	200−?個	$2/3-p$

このとき, 以下の図のような 4 つのくじ A, B, C および D を考え, 次のような 2 つの質問を行う.

Q 1. A と B とどちらを好みますか？

Q 2. C と D とどちらを好みますか？

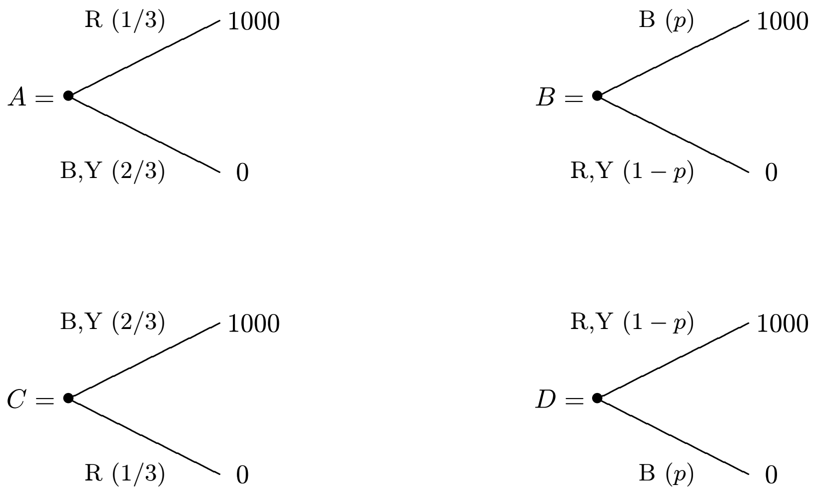


図 13.2 Ellsberg の実験: くじと賞金 (括弧の中身は確率)

・結果: 多くの人は

$$A \succ B \quad \text{and} \quad C \succ D$$

を選択する．しかしこれは主観的期待効用の理論とは整合的ではない．なぜならば,

$$\begin{aligned} A \succ B &\iff \frac{1}{3}u(1000) > pu(1000) \\ &\iff \frac{1}{3} > p, \\ C \succ D &\iff \frac{2}{3}u(1000) > (1-p)u(1000) \\ &\iff p > \frac{1}{3} \end{aligned}$$

が成立するが, これは矛盾である．

○ Ellsberg の実験に対するショケ期待効用による整合的な解釈

記号:

$\Omega = \{R, B, Y\}$. (状態の集合)

$\mathscr{F} = 2^{\Omega}$. (イベントの集合)

$\theta : \mathscr{F} \to [0,1]$, 密度.[*1] (信念)

但し,

$$\begin{aligned} &\theta(\{R\}) = \frac{1}{3}, \quad \theta(\{R,Y\}) = \frac{1}{2}, \quad \theta(\Omega) = 1, \\ &\theta(\{B\}) = \frac{1}{4}, \quad \theta(\{R,B\}) = \frac{1}{2}, \quad \theta(\emptyset) = 0, \\ &\theta(\{C\}) = \frac{1}{4}, \quad \theta(\{B,C\}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

とする．

ショケ期待効用の定理: $(\Omega, \mathscr{F})$, $\theta : \mathscr{F} \to [0,1]$ は密度, 行動 (acts) x, y は $\mathscr{F}$-可測, u は効用関数とする．このとき,

$$x \succ y \iff \int (u \circ x)(s) d\theta(s) > \int (u \circ y)(s) d\theta(s).$$

但し, $\int$ はショケ積分で

$$\int (u \circ x)(s) d\theta(s) = \int_{-\infty}^{0} [\theta(\{s | x(s) > k\}) - 1] dk + \int_{0}^{\infty} \theta(\{s | x(s) > k\}) dk.$$

[*1] $\theta : \mathscr{F} \to [0,1]$ が密度であるとは, $\theta(\emptyset) = 0$, $\theta(\Omega) = 1$ かつ $A \subset B \implies \theta(A) \leq \theta(B)$ が成立することを云う．

Ellsberg の実験に戻る．各くじの CEU を計算すると，

$$\begin{aligned}
\int (u\circ A)(s)d\theta(s) &= \int \theta(\{\omega|\, u(A(s)) > y\})dy \\
&= \int_0^{u(1000)} \theta(\{R\})dy \\
&= \frac{1}{3}u(1000), \\
\int (u\circ B)(s)d\theta(s) &= \int \theta(\{\omega|\, u(B(s)) > y\})dy \\
&= \int_0^{u(1000)} \theta(\{B\})dy \\
&= \frac{1}{4}u(1000), \\
\int (u\circ C)(s)d\theta(s) &= \int \theta(\{\omega|\, u(C(s)) > y\})dy \\
&= \int_0^{u(1000)} \theta(\{B, Y\})dy \\
&= \frac{2}{3}u(1000), \\
\int (u\circ D)(s)d\theta(s) &= \int \theta(\{\omega|\, u(D(s)) > y\})dy \\
&= \int_0^{u(1000)} \theta(\{R, Y\})dy \\
&= \frac{1}{2}u(1000),
\end{aligned}$$

が成立する．したがって，$A \succ B$ かつ $C \succ D$ が成立する．

14　繰り返しゲーム (Repeated Games)

14.1　フォーク定理

戦略形ゲーム (N, X_i, u_i) を繰り返し実行するようなスタイルのゲームを考察する．

段階ゲーム (stage game) が一回終わるたびに，相手の行動が分かり，記憶している状況では

$$X_i^\infty := X_i \times F(X, X_i) \times F(X \times X, X_i) \times \cdots F(X \times \cdots X, X_i) \times \cdots$$

という戦略集合が決まる．ここで，$F(X, X_i)$ は，X から X_i への関数をすべて集めた集合のことである．値域を X にすることで相手の行動がすべて分かるという意味を持つ．$F(X \times \cdots X, X_i)$ は，それまでのすべての行動の列を記憶しているという意味を持つ．

$(f_1, ..., f_n) = f \in \prod_{i=1}^n X_i^\infty$ とする．構成要素である f_i が $f_i = (x_i, f_i^2, f_i^3, ..., f_i^t, ...)$ と表記されたとする．

- $\sigma^1(f) \in X$：戦略 f から構成される第一期の行動
- $f^t = (f_1^t, ..., f_n^t)$
- $\sigma^t(f) := f^t(\sigma^1(f), ..., \sigma^{t-1}(f))$：戦略 f から構成される t 期の行動
- $(\sigma^1(f), ..., \sigma^t(f), ...)$：戦略 f から構成される段階ゲームの戦略の列

代表的な利得関数の種類

1. $\liminf \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_i(\sigma^t(f))$：時間平均による利得関数
2. $(1-\delta) \sum_{t=1}^\infty \delta^{t-1} u_i(\sigma^t(f))$：割引平均による利得関数

繰り返しゲームの表記を G^T または $G(T)$ によって，T 回繰り返しゲーム，G^∞ によって無限回繰り返しゲームと表記することが多い．

定義 11 (N, X_i, u_i) を戦略形ゲームとする．

- $u_j \in \mathbb{R}$ が β 個人合理的であるとは

$$u_j \geq \min_{x_{-j}} \max_{x_j} u_j(x_j, x_{-j}) =: v_\beta(j)$$

- $(u_1, ..., u_n)$ が実行可能な利得ベクトルとは

$$(u_1, ..., u_n) \in V := \mathrm{co}\{(v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n | \exists x \in X : (u_1(x), ..., u_n(x)) = (v_1, ..., v_n)\}$$

注）V は提携 N で実現できる利得の集合

命題 2 段階ゲーム G が唯一のナッシュ均衡を持つならば $G(T)$ は唯一の部分ゲーム完全均衡を持ち，それは，G のナッシュ均衡を繰り返す戦略である．

証明

$T-1$ 期の結果を $(u_1, ..., u_n)$，x^* を段階ゲームのナッシュ均衡とする．

$$u_i(x_i^*, x_{-i}^*) + u_i \geq u_i(x_i, x_{-i}^*) + u_i$$

がすべての $x_i \in X_i$ について成立する．よって T 期には行動 x_i^* をとる．後は帰納法より成立する．

命題 3 $X_i = \{x_i^1, ..., x_i^{m_i}\}$：有限集合．$u_i : \prod_{i=1}^n X_i \to \mathbb{R}$：利得関数．繰り返しゲームの利得関数は割引平均を考えるとする．この時，G^∞ において，

1. $v \in V$

2. $\forall j \in N,\ v_j \geq v_\beta(j)$

を満たせば，v は繰り返しゲームのナッシュ均衡利得になる．

証明

1. $\exists x \in X : u_j(x) = v_j \geq v_\beta(j)$ のケース

この x を繰り返す時の利得は，

$$u_j^\infty(f_1(x), ..., f_n(x)) = (1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u_i(x) = v_j$$

となる．ここで，プレーヤー j の繰り返しゲームの戦略 f_j を次の手順で定義する．

1. 0 期，直前の期の段階ゲームの戦略が x ならば x_j
2. 直前の期のプレーで 2 人以上が逸脱するならば x_j
3. プレーヤー i のみが直前の期で逸脱するならば m_j^i

ここで，m_j^i はプレーヤー i を $\min\max$ する戦略のことである．形式的には

$$u_i(m_i^i, m_{-i}^i) = \min_{x_{-i}} \max_{x_i} u_i(x_i, x_{-i})$$

と定義される．

割引率を $\underline{\delta}_j$ として

$$(1-\underline{\delta}_j) \max_x u_j(x) + \delta_j v_\beta(j) = v_j$$

を満たすものを考える．実際

$$\max_x u_j(x) \geq v_j \geq v_\beta(j)$$

より，$\underline{\delta}_j \in (0,1)$ で存在する．

更に，$\underline{\delta} = \max_j \underline{\delta}_j$ とする．この時，$\delta \in (\underline{\delta}, 1)$ について

$$(1-\delta) \max_x u_j(x) + \delta v_\beta(j) < v_j$$

が成立する．よって j は f_j から逸脱しないことがわかる．

2. $\neg\exists x \in X : u_j(x) = v_j$ のケース

期待効用が v_j になる行動戦略を考える．戦略が有限なので確率化戦略 (randomized strategy)$x_j : \Omega \to X_j$ を使って行動戦略を表せる．つまり，

$$\exists x : \Omega \to \prod_{j=1}^{n} X_j : Eu_j(x) := \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u_j(x(\omega)) = v_j$$

となる．x を $x(\omega)$ に変更して 1 と同様の議論を行う．ただし，$\underline{\delta}_j$ の定義を

$$(1-\underline{\delta}_j) \max_{x(\omega)} u_j(x(\omega)) + \delta_j v_\beta(j) = (1-\underline{\delta}_j) \min_{x(\omega)} u_j(x(\omega)) + \underline{\delta}_j v_j$$

とする.

注意 6

- $X_i \subset \mathbb{R}^l$ をコンパクト集合．$u_i : \prod_{j=1}^n X_j \to \mathbb{R}$ を連続関数としても同様の命題が成立する.

14.2 共謀 (Collusion)

クールノー競争の無限回繰り返しゲームを考え，共謀の可能性を探る.

0. 段階ゲームの記述

- $N = \{1, 2\}$
- $X_i = [0, \infty) \ni x_i$
- $u_i(x_1, x_2) = (a - x_1 - x_2)x_i - cx_i$
- $p = a - x_1 - x_2$：逆需要関数で $x_1 + x_2 < a$ を満たすとする
- c：限界費用

1. 準備

- $x_c := \frac{a-c}{3}$：クールノー生産量
- $x_m := \frac{a-c}{2}$：独占生産量
- $\pi_c := \frac{(a-c)^2}{9}$：クールノー利潤
- $\pi_m := \frac{(a-c)^2}{4}$：独占利潤

2. トリガー戦略 (trigger strategy)

トリガー戦略と呼ばれる戦略を下記のように定義する.

- 第一期，直前の期に $(\frac{x_m}{2}, \frac{x_m}{2})$ を観察できれば次期は $\frac{x_m}{2}$.
- 直前の期に $\frac{x_m}{2}$ 以外の行動を相手がとるならば次期は x_c.

プレーヤー 1 (第一企業) の逸脱を考える.

$$\max_{x_1}(a - x_1 - \frac{1}{2}x_m - c)x_1$$

一階の条件より,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(a + \frac{1}{2}x_m - c) \\ &= \frac{3(a-c)}{8} \end{aligned}$$

逸脱時の利得は,

$$\pi_d := \frac{9(a-c)^2}{64}$$

と求まる．トリガー戦略がナッシュ均衡であるためには,

$$\frac{1}{1-\delta}\frac{\pi_m}{2} \geq \pi_d + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_c$$

を満たさなくてはいけない．つまり，$\frac{x_m}{2}$ととり続ける時の利得が逸脱時の利得と逸脱後の利得の合計よりも大きいという条件である．これより，

$$\delta \geq \frac{9}{17}$$

をえる．

注意 7 $\delta \geq \frac{9}{17}$ ならばトリガー戦略によって共謀が独占生産量を均等する戦略がナッシュ均衡になり共謀が発生すると考えることが出来る．

3. $\delta < \frac{9}{17}$ のケース

$\delta < \frac{9}{17}$ の時，どのような段階ゲームの戦略が実現されるのかを考察する．

- 第一期，直前の期に (x^*, x^*) がならば x^*
- 直前の期に x^* 以外の行動ならば x_c

という戦略を考察する．この戦略を利用して協調行動が観察されるか否かを考察する．

両プレーヤーとも x^* を生産するときの利得は,

$$\pi^* := (a - 2x^* - c)x^*$$

逸脱時の最大利得は,

$$\max_{x_i}(a - x_i - x^* - c)x_i$$

をとけばよい．一階の条件より,

$$x_i = \frac{a - x^* - c}{2}$$

となる．対応する利得は

$$\tilde{\pi}_d := \frac{(a - x^* - c)^2}{4}$$

となる．トリガー戦略がナッシュ均衡であるためには,

$$\frac{1}{1-\delta}\pi^* \geq \tilde{\pi}_d + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_c$$

でなくてはいけない．これより，

$$\frac{1}{1-\delta}(a-2x^*-c)x^* \geq \frac{(1-x^*-c)^2}{4}+\frac{\delta}{1-\delta}\frac{(a-c)^2}{9}.$$

$A := a-c$ とおいて，この不等式を変形すると

$$0 \geq (9-\delta)x^{*2}-2(3-\delta)Ax^*+(1-\frac{5}{9}\delta)A^2$$

を得る．これより，x^* の範囲を求めると

$$\frac{(a-c)}{9-\delta}\left(3-\frac{5}{3}\delta\right) \leq x^* \leq \frac{a-c}{3}$$

となる．

注意 8 最小の x^* を $\underline{x}^*$ とする．最大の x^* を $\bar{x}^*$ とする．

- $\underline{x}^* = \frac{a-c}{9-\delta}\left(3-\frac{5}{3}\delta\right)$ は δ について減少する．
- $\underline{x}^*$ は $\delta \to \frac{9}{17}$ につれて $\frac{x_m}{2}$ へ収束する．
- $\underline{x}^*$ は $\delta \to 0$ につれて x_c へ収束する．
- $\bar{x}^* = \frac{a-c}{3} = x_c$ となる．
- $\delta < \frac{9}{17}$ のケースでは利得 π^* が部分ゲーム完全均衡 (SPE) として実現される．

4. アメとムチ戦略 (Carrot and Stick strategy)

戦略を変更することで，$\delta < \frac{9}{17}$ のケースでも共謀が発生する可能性を探る．

- 第一期，直前の期に $(\frac{x_m}{2}, \frac{x_m}{2})$ ならば $\frac{x_m}{2}$
- 直前の期に (x, x) ならば $\frac{x_m}{2}$
- 直前の期に相手のみ違う戦略ならば x

という戦略 (アメとムチ戦略) を考察する．

両プレーヤーとも x を生産する時の利潤は,

$$\pi(x) := (a-2x-c)x$$

となる．共に x を生産し，その後 $\frac{x_m}{2}$ に戻る時の現在価値は,

$$V(x) := \pi(x)+\frac{\delta}{1-\delta}\frac{1}{2}\pi_m$$

となる．x から逸脱した時の最大利潤は,

$$\max_{q_i}(a-q_i-x-c)q_i$$

をとくことで求められる．一階の条件より，

$$q_i = \frac{a-x-c}{2}$$

その時の利潤 (deviation from punishment) は，

$$\pi_{dp}(x) := \frac{(a-x-c)^2}{4}$$

となる．

注意 9 両企業ともアメとムチ戦略に従うならば部分ゲームは，

1. 共謀ゲーム (collusive subgame)
   直前の期が $(\frac{x_m}{2}, \frac{x_m}{2})$ もしくは (x, x) の状況
2. 懲罰ゲーム (punishment subgame)
   直前の期が $(\frac{x_m}{2}, \frac{x_m}{2})$ もしくは (x, x) ではない状況

に分類される．

(1)(2) から逸脱がないことを確認すればよい．

1. 共謀ゲーム (collusive subgame)

(1) から逸脱が生じないという条件は，

$$\frac{1}{1-\delta}\frac{1}{2}\pi_m \geq \pi_d + \delta V(x)$$

である．これは，$\frac{1}{2}\pi_m$ を受け取り続ける時の利得が，$\frac{x_m}{2}$ から逸脱したときの最大利得とその後両プレーヤーとも数量 x を実行し，再び $\frac{x_m}{2}$ に行動を変えたときの利得の和よりも大きいことを示している．ここで，

$$\pi_d = \frac{9(a-c)^2}{64}$$

である．

2. 懲罰ゲーム (punishment subgame)

(2) から逸脱が生じないという条件は，

$$V(x) \geq \pi_{dp} + \delta V(x)$$

である．これは，直前の期が $\frac{x_m}{2}$，x 以外の行動なので今期は生産数量 x を実行しその後 $\frac{x_m}{2}$ を生産した時の利得が，x から逸脱した時の利得と両プレーヤーとも生産数量 x を実行しその後 $\frac{x_m}{2}$ に行動を変えたときの利得の和よりも大きいことを示している．

それぞれ，$V(x)$ を代入すると，

$$\delta\left(\frac{1}{2}\pi_m - \pi(x)\right) \geq \pi_d - \frac{1}{2}\pi_m \tag{13}$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\pi_m - \pi(x)\right) \geq \pi_{dp} - \pi(x) \tag{14}$$

$\delta = \frac{1}{2}$ のケースを考察する．

$$\frac{x}{a-c} \leq \frac{1}{8},\ \frac{3}{8} \leq \frac{x}{a-c}$$

ならば，(13) を満たす．

$$\frac{3}{10} \leq \frac{x}{a-c} \leq \frac{1}{2}$$

ならば，(14) を満たす．

よって，

$$\frac{3}{8} \leq \frac{x}{a-c} \leq \frac{1}{2}$$

の時，アメとムチ戦略が部分ゲーム均衡となる．

注意 10 $\frac{3}{8} \leq \frac{x}{a-c} \leq \frac{1}{2}$，$\delta = \frac{1}{2}$ ならば，共謀が発生する．

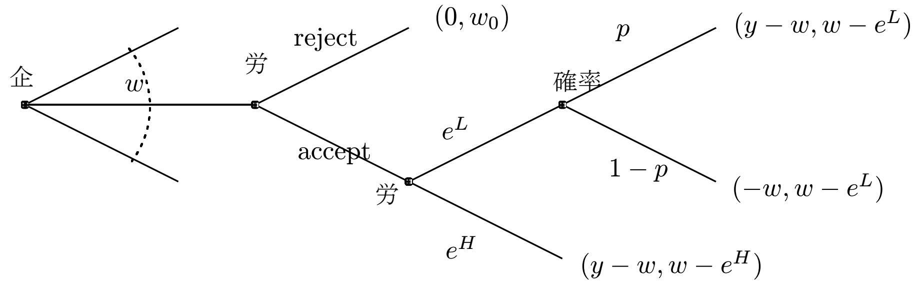
14.3 効率賃金

問題の背景

マクロ経済データでは失業が発生することが知られている．このことは，通常，労働市場において市場にて決まる均衡賃金よりも，高い賃金が支払われる事から説明されることが多い．高賃金になる理由を繰り返しゲームによって探る．

0. 段階ゲーム

企業と労働者の賃金契約モデル



- $w \geq 0$：賃金
- w_0：留保賃金
- $e^L = 0$，e^H：努力水準で e^L よりも e^H は努力している状況を示す．
- $\{0, y\}$：売上高

  努力水準が e^L の時，確率 p にて売上高 y が発生し $1-p$ にて売上高が 0 になる．努力水準が e^H の時は，確率 1 で売上高 y が発生するとする．
- $w_b > py$ を仮定する．つまり，企業に雇用されて e^L にて y が実現されるよりも w_b を給料として得たほうがよいとする．

1. 段階ゲームの部分ゲーム完全均衡

$w - e^H < w = p(w - e^L) + (1-p)w$ より，労働者は e^L を選ぶ．$w \geq w_0$ ならば労働者は受入を選ぶ．$w \leq w_0$ ならば労働者は拒否 を選ぶ．受入の時の利得は，$p(y-w) + (1-p)(-w) = py - w$．拒否の時の利得は，0．$py < w_0$ より，企業は，$w \leq w_0$ を提示すれば労働者は拒否を選び，企業の利得は 0 になる．$w > w_0$ を提示すれば労働者は受入を選び，企業の利得は $py - w < 0$ になる．

よって，企業は $0 \leq w \leq w_0$ を満たす w を提示する．

- 企業が $\{w | 0 \leq w \leq w_0\}$ の中から一つ
- 労働者は (拒否, e^L) となる．

注意 11 段階ゲームにおいて，労働者は労働を提供しない．

2. 無限回繰り返しゲームの戦略

企業の戦略

- 第一期，直前の行動が (受入,e^H) ならば，$w^* > w_0$ という賃金を提示 ($w = w^*$)
- (受入, e^H) 以外ならば時期以降 $w = 0$

労働者の戦略

- t 期に w^* が提案されれば (受入, e^H)
- t 期に $w^* < w_0$ が提案されれば (受入, e^L)

3. 2 の戦略が部分ゲーム完全均衡であることを確認する．

労働者，企業とも逸脱が生じないことを調べればよい．

労働者が (受入, e^H) を実行した場合の利得は，

$$V_{e^H} = (w^* - e^H) + \delta V_{e^H}$$

となる．つまり，w^* の賃金を得て，e^H の努力水準を提供し，その後も同様という利得である．これより，

$$V_{e^H} = \frac{w^* - e^H}{1-\delta}$$

と求まる．

e^L による逸脱を考慮した利得は,

$$V_s = w^* + \delta \left\{ pV_s + (1-p)\frac{w_0}{1-\delta} \right\}$$

となる．ここで，V_s の添え字 s は shirk を表す．逸脱を考慮した利得は，e^L による逸脱時の利得にその後発生する利得を加えたものである．これより，

$$V_s = \frac{(1-\delta)w^* + \delta(1-p)w_0}{(1-\delta p)(1-\delta)}$$

と求まる．

戦略がナッシュ均衡であるためには，$V_{e^H} \geq V_s$ でなくてはいけない．すなわち，

$$w^* - e^H \geq (1-\delta) \left\{ \frac{w^*}{(1-\delta p)} \frac{\delta(1-p)w_0}{(1-\delta p)(1-\delta)} \right\}$$

となる．これより，

$$\begin{aligned} w^* &\geq w_0 + \frac{1-\delta p}{\delta(1-p)} e^H \\ &= w_0 + \left(1 + \frac{1-\delta}{\delta(1-p)} \right) e^H \\ &> w_0 + e^H \end{aligned}$$

注意 12

1. $w^* > w_0 + e^H$
2. $p \to 1$ に従って賃金プレミアムの $\frac{1-\delta}{\delta(1-p)}$ が無限大になる．
3. $p \to 0$ に従って $w^* \geq w_0 + \frac{e^H}{\delta}$
4. 最適反応の δ は

$$\delta \geq \frac{e^H}{(1-p)(w^* - w_0) + pe^H}$$

企業の戦略が労働者の戦略を所与の下で最適反応になるか否かを確認する．w^* をとるケース

$$\frac{y - w^*}{1-\delta} .$$

$w = 0$ をとるケース

$$0\ .$$

よって,

$$\frac{y - w^*}{1 - \delta} \geq 0$$

すなわち, $y - w^* \geq 0$ ならば逸脱しない.

注意 13 δ が十分に大きく, $y \geq w^*$ を満たせば 2 で定義した戦略が部分ゲーム完全均衡になる. つまり, $w^* > w_0$ の提案, (受入, e^H) の組が繰り返される.

15 進化ゲーム (Evolutionary Games)

進化ゲームと呼ばれるゲーム理論の分野を考察する. 静学的な内容と動学的な内容の 2 つに分類されるが比較的研究の盛んな動学的分野について代表的な

- 意思決定主体が戦略を選択するのではなく, 種族が戦略を選択する.
- 戦略分布 (混合戦略) がどのように変わるのかを分析する.
- ナッシュ均衡は到達される概念, 安定的状態のひとつとして議論される.

定義 12 $n \times n$ 対称の戦略形ゲーム (X_1, X_2, u_1, u_2) とは,

1. $X_1 = X_2 = \{x_1, ..., X_n\} =: X$ を戦略集合とし,
2. $u_1(a, b) = u_2(b, a) =: u(a, b)$ を利得関数とする

戦略形ゲームである.

定義 13 $n \times n$ 対称戦略形ゲームにおいて, $\sigma^* \in \Delta(X)$ が進化的に安定的な戦略 (ESS) であるとは,

$$\forall \sigma \in \Delta(X),\ \exists \bar{\varepsilon} \in (0,1) : \forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}), Eu(\sigma^*, (1-\varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma) > Eu(\sigma, (1-\varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma)$$

ESS の基本的な考え方は, ε の確率で突然変異が起こっても, その突然変異に対して頑健であるということである. ESS はナッシュ均衡の集合に含まれることが知られている.

15.1 再生動学 (Replicator Dynamics)

基本的には $n \times n$ 対称な戦略形ゲームの動学化のモデル.

- $N = \{1, ..., n\}$: 種族の集合
- $X = \{x_1, ..., x_n\}$: 戦略集合

- $i \in N$ を戦略 x_i をとる種族とみなす．
  戦略集合と種族の集合を同一視している．
  純粋戦略の数は n 種類となる．
- $p = (p_1, ..., p_n)$: 戦略の分布 $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$
- $u_{ij} = u_{ji}$: 利得を行列で表記する．種族 i(戦略 x_i) と種族 j(戦略 x_j) が出会う時の利得 (人数，子孫数) が u_{ij}．
- $u_i(p) := \sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij}$: 戦略 x_i をとった種族の期待利得
- $\bar{u}(p) := \sum_{i=1}^{n} p_i u_i(p)$: ゲームの平均利得，平均人数

定義 14 再生動学(Replicator Dynamics) とは，

$$\dot{p}_i(t) = p_i(t)\{u_i(p(t)) - \bar{u}(p(t))\}$$

によって記述される微分方程式のことである．

微分方程式の簡単な説明を試みる．微小な変化に対し戦略分布がどのように変化するのか考える．戦略 x_i をとる種族は，

$$p_i(t + dt) = \frac{p_i(t)u_i(p(t))dt + p_i(t)(1 - dt)}{\sum_{j=1}^{n} p_j(t)u_j(p(t))dt + \sum_{j=1}^{n} p_j(t)(1 - dt)}$$

と変わるであろう．後は，$p_i(t + dt)$ から $p_i(t)$ を引き算すると，

$$p_i(t + dt) - p_i(t) = \frac{p_i(t)u_i(p(t))dt - \sum_j^n p_j(t)u_j(p(t))}{\sum_{j=1}^{n} p_j(t)u_j(p(t))dt + \sum_{j=1}^{n} p_j(t)(1 - dt)}$$

を得る．dt で割り 0 に近づけていくと

$$\begin{aligned}
\dot{p}_i(t) &= \lim_{dt \to 0} \frac{p_i(t)u_i(p(t))dt - \sum_j^n p_j(t)u_j(p(t))}{\sum_{j=1}^{n} p_j(t)u_j(p(t))dt + \sum_{j=1}^{n} p_j(t)(1 - dt)} \\
&= p_i(t)\{u_i(p(t)) - \sum_{j=1}^{n} p_j(t)u_j(p(t))\} \\
&= p_i(t)\{u_i(p(t)) - \bar{u}(p(t))\}
\end{aligned}$$

命題 4 $p : [0, \infty) \to \Delta(X)$ が再生動学に従うとする．この時，

1. $\sigma^* \in \Delta(X)$ が進化的安定集合ならば σ^* は漸近安定になる．
2. すべての t について $p(t) > 0$，$\lim_{t\to\infty} p(t) = p^*$ ならば p^* はナッシュ均衡になる．
3. p^* が漸近安定ならば p^* はナッシュ均衡になる．

参考

定義 15 $p^* \in \Delta(X)$ がナッシュ均衡であるとは，すべての $p \in \Delta(X)$ について

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^* u_i(p^*) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i u_i(p^*)$$

が成立することである．

証明 (2)

p^* がナッシュ均衡でないとする．

$$\exists p \in \Delta(X) : \bar{u}(p^*) = \sum_{i=1}^{n} p_i^* u_i(p^*) < \sum_{i=1}^{n} p_i u_i(p^*)$$

となる．すべての i について $\bar{u}(p^*) \geq u_i(p^*)$ とすると，

$$\bar{u}(p^*) = \sum_{i=1}^{n} p_i^* \bar{u}(p^*) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i u_i(p^*)$$

となり矛盾．よって，$\bar{u}(p^*) < u_i(p^*)$ となる i が存在する．そこで，$\varepsilon := u_i(p^*) - \bar{u}(p^*)$ とおく．$\lim p(t) = p^*$ より，

$$\exists t_0 : \forall t \geq t_0, u_i(p(t)) - \bar{u}(p(t)) > \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる．よって，$p_i(t) > 0$ に注意して

$$\frac{\dot{t}_i(t)}{p_i(t)} > \frac{\varepsilon}{2}$$

がすべての $t \geq t_0$ について成立する．これは，$p_i(t) \to p_i^*$ に矛盾する．

15.2 社会ゲームと社会学習 (Social Games and Social Learning)

- 戦略分布の変化と安定性を議論
- 進化ゲームでは「戦略」と「個体」が同一視され，対称なゲームが考察の対象となっていた．主体は意思決定をしないというのが原則．
- 社会ゲームでは，主体が意思決定をすることが最大の違い．戦略集合，利得が対象でなくてもよい．

$G = (N, X_i, u_i)$ を戦略形ゲームとする．この時，

- $N = \{1, ..., n\}$: 集団の集合と解釈する．
- $\Delta(X_i)$: 集団 i の戦略分布の集合と解釈する．
- 各集団から一個体ずつ出会ってゲーム G をプレーすると考える．

意思決定の方法で動学の形が変わる．例えば，最適反応，完全予見，メモリー＋最適反応など．

0．準備

(N, X_i, u_i) に対して，

- $\mathrm{br}^i : \prod_{j \neq i} \Delta(X_j) \twoheadrightarrow X_i$
  $\mathrm{br}^i(\sigma_{-i}) = \arg\max_{h \in X_i} u_i(h, \sigma_{-i})$
- $\mathrm{BR}^i : \prod_{j \neq i} \Delta(X_j) \twoheadrightarrow X_i$
  $\mathrm{BR}^i(\sigma_{-i}) = \arg\max_{\eta \in \Delta(X_i)} u_i(\eta, \sigma_{-i})$

命題 5 1 から 3 は同値になる．

1. $\sigma^* \in \prod_{i \in N} \Delta(X_i)$ はナッシュ均衡
2. $\forall i,\ \forall h \in X_i,\ \sigma_i^*(h) > 0 \Rightarrow h \in \mathrm{br}^i(\sigma_{-i})$
3. $\forall i,\ \forall h \in X_i,\ \exists \sigma_{-i}^e$:
   $\sigma_i^*(h) > 0 \Rightarrow h \in \mathrm{br}^i(\sigma_{-i}^e)$
   $\sigma_{-i}^e = \sigma_{-i}^*$

1．動学のフレームワーク

$G = (N, X_i, u_i)$ というゲームをランダムマッチする状況を考察する．$N = \{1, ..., n\}$ を集団の集合と解釈する．各々の集団は連続無限人のプレーヤーからなるとする．各々の集団から一人ずつが抽出され n 人でゲーム G をプレーする．同様の作業を繰り返し全員がゲーム G をプレーすることとする．

- $t \in [0, \infty)$：時刻，時点 t
- $u_i : \prod_{j \in N} \Delta(X_i) \to \mathbb{R}$：瞬間的な期待効用
- $X_i = \{0, 1, 2, ..., n_i\}$：戦略集合

社会ゲームにおける基本的な考え方 (仮定)

1. 各主体が行動を変えられるのはパラメータ $\lambda = 1$ の Poisson 過程に従うとする．つまり，行動が変えられない期間は $\lambda e^{\lambda t}$ に従う．
2. 各主体は独立に行動するとする．
   期間 $[t, t + dt)$ に行動を変える人の割合は λdt となる．

集団 i の t 時点における行動分布を

$$\phi_i(t) = (\phi_{i0}(t), \phi_{i1}(t), ..., \phi_{in_i}(t)) \in \Delta(X_i)$$

とおく．この時,

$$\begin{aligned}
& \phi_i(t+dt) = \alpha_i(t)\cdot 1\cdot dt + \phi_i(t)(1-1\cdot dt) \\
\Longleftrightarrow\ & \phi_i(t+dt) - \phi_i(t) = (\alpha_i(t) - \phi_i(t))dt \\
\Longleftrightarrow\ & \dot{\phi}_i(t) = \alpha_i(t) - \phi_i(t)
\end{aligned}$$

ここで，$\alpha_i(t) \in \Delta(X_i)$ は時点 t における行動を変える人の行動分布を表す.

定義 16 $\phi_i : [0,\infty) \to \Delta(X_i)$ が実行可能経路 (feasible path) とは,

1. ϕ_i がリプシッツ連続関数
2. $\dot{\phi}_i(t) + \phi_i(t) \in \Delta(X_i)$

を満たすことである.

Φ^i によって，実行可能経路の集合を表すとする.

15.2.1 最適反応動学

毎期最適な行動を順次とっていくという学習ルールを考察する.

定義 17 $\phi \in \prod_{i\in N} \Phi^i$ が**最適反応動学**(Best Response Path，BRP) であるとは,

$$\forall i,\ \forall t,\ \dot{\phi}_{ih}(t) + \phi_{ih}(t) > 0 \Rightarrow h \in \mathrm{br}^i(\phi_{-i}(t))$$

- 将来の予想をしないという意味で限定合理的である.
- 毎期最適化をするという意味で合理的だが近視眼的行動をとる.

例.

	0	1
0	$4,4$	$0,3$
1	$3,0$	$2,2$

$\dot{\phi_{i1}}(t) = 1 - \phi_{i1}$，$\phi_{i1}(0) = \frac{1}{2}$ という経路を考える．確率 $\frac{1}{2}$ で戦略 0，確率 $\frac{1}{2}$ で戦略 1 をとるという状態から徐々に，戦略 1 をとる方向へ移動していくという経路である．この経路が最適反応経路であることを確認する.

$\dot{\phi_{i1}}(t) = 1 - \phi_{i1}$，$\phi_{i1}(0) = \frac{1}{2}$ を解くと,

$$\phi_{i1}(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t},\ \phi_{i0} = \frac{1}{2}e^{-t}$$

となる．最適反応になっているか否かを調べればよい.

$$
\begin{aligned}
u_1(1,\phi_2) - u_1(0,\phi_2) &= 3 \times \frac{1}{2}e^{-t} + 2 \times (1 - \frac{1}{2}e^{-t}) - 4 \times \frac{1}{2}e^{-t} \\
&= 2 - \frac{3}{2}e^{-t} \\
&> 0 \qquad (\text{for all } t)
\end{aligned}
$$

よって，(ϕ_1, ϕ_2) は最適反応経路になる．

命題 6 $\phi^* \in \prod_{i \in N} \Phi^i$ が最適反応経路であり，すべての i について，$\phi_i^* \to \sigma_i^*$ ならば，σ^* はナッシュ均衡になる．

収束する最適反応経路の収束先はナッシュ均衡になっているという命題である．

証明

$\sigma_i^*(h) > 0$ とする．$\phi_i^*(t) \to \sigma_i$ また，u_i が連続なので，

$$
\forall \frac{1}{n},\ \exists t_0; \forall t \geq t_0,\ h \in \mathrm{br}^i(\phi_i^*(t)) \text{ かつ } |u_i(h, \sigma_{-i}^*) - u_i(h, \phi_{-i}^*)| < \frac{1}{n}.
$$

よって，$h \in \mathrm{br}^i(\phi_{-i}^*(t))$ であるので，

$$
\begin{aligned}
u_i(h, \sigma_{-i}^*) &> u_i(h, \phi_{-i}^*) - \frac{1}{n} \\
&\geq u_i(x, \phi_{-i}^*) - \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

をえる．$t \to \infty$ とすると，すべての $x \in X_i$ について，

$$
u_i(h, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(x, \sigma_{-i}^*) - \frac{1}{n}
$$

となる．$n \to \infty$ とすると，

$$
u_i(h, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(x, \sigma_{-i}^*).
$$

よって，$h \in \mathrm{br}^i(\sigma_{-i}^*)$ を得る．これより，σ^* はナッシュ均衡になる．

15.2.2 完全予見動学

将来の行動分布を予想し，なおかつ，最適に意思決定するという動学モデルを考察する．完全予見動学とは，将来の行動分布の予想に対して最適な反応をとり，将来の行動分布に関する予想が常に正しい予想であるという動学のことである．

定義 18 時点 t，集団 i の主体が戦略 $h \in X_i$ をとった時の，次の行動を変える時点までの期待効用を

$$
V_{ih}(\phi_{-i}^e)(t) = (1+\theta) \int_0^\infty \int_t^{t+z} e^{-\theta(s-t)} u_i(h, \phi_{-i}^e(s)) ds e^{-z} dz
$$

とする．ここで，ϕ_{-i}^e は集団 i の予想する行動分布のパスとする．

この期待効用を計算すると，

$$\begin{aligned}\frac{V_{ih}(\phi^e_{-i})(t)}{1+\theta} &= \left[-e^{-z}\int_t^{t+z} e^{-\theta(s-t)}u_i(h,\phi^e_{-i}(s))ds\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-(1+\theta)z}u_i(h,\phi^e_{-i}(t+z))ds \\ &= \int_0^\infty e^{-(1+\theta)z}u_i(h,\phi^e_{-i}(t+z))ds\end{aligned}$$

となるので，

$$V_{ih}(\phi^e_{-i})(t) = (1+\theta)\int_0^\infty e^{-(1+\theta)z}u_i(h,\phi^e_{-i}(t+z))ds$$

を得る．

定義 19 時点 t における，予想 ϕ^e_{-i} に対する最適反応を与える対応を

$$\mathrm{br}^i(\phi^e_{-i})(t) := \operatorname*{arg\,max}_{h\in X_i} V_{ih}(\phi^e_{-i})(t)$$

と定義する．

定義 20 $\phi \in \prod_{i\in N}\Phi^i$ が完全予見経路 (Perfect Foresight Path，PFP) であるとは，すべての i，t について

1. $\dot{\phi}_{ih}(t) + \phi_{ih}(t) > 0$ ならば $h \in \mathrm{br}^i(\phi^e_{-i})(t)$
2. $\phi^e_i(t) = \phi_i(t)$

予想は常に正確で，行動を変えるならば，それは V_i に基づく最適反応であることの 2 つを条件とする．

定理 3 任意の初期条件に対して完全予見経路が存在する．

定義 21 $\sigma,\sigma' \in \prod_{i\in N}\Delta(X_i)$ について，σ' から σ への線形経路 (linear path from σ' to σ) とは，

$$\phi(t) = \sigma - (\sigma-\sigma')e^{-t}$$

という $\phi \in \prod_{i\in N}\Phi^i$ である．

定義 22 $\sigma^* \in \prod_{i\in N}\Delta(X_i)$ が線形安定 (linearly stable) であるとは，

$$\forall\sigma' \in \prod_{i\in N}\Delta(X_i),\ \sigma^* - (\sigma^*-\sigma')e^{-t}\ \text{が}\ \sigma'\ \text{から}\ \sigma^*\ \text{への完全予見経路}$$

を満たすことである．

線形経路が完全予見経路になっている時が線形安定であると解釈できる．
例．

	0	1
0	$4, 4$	$0, 3$
1	$3, 0$	$2, 2$

$\dot{\phi}_{i1}(t) = 1 - \phi_{i1}$，$\phi_{i1}(0) = 0$ という経路を考える．戦略 0 をとるという状態から徐々に，戦略 1 をとる方向へ移動していくという経路である．この経路が完全予見経路であることを確認する．

効用の差を計算する．

$$
\begin{aligned}
&V_{i1}(\phi_j)(0) - V_{i0}(\phi_j)(0)\\
&= (1+\theta)\left[\int_0^\infty e^{-(1+\theta)s} u_i(1, \phi_j(s)ds - \int_0^\infty e^{-(1+\theta)s} u_i(0, \phi_j(s)ds\right]\\
&= (1+\theta)\int_0^\infty e^{-(1+\theta)s} u_i(1, \phi_j(s) - u_i(0, \phi_j(s)\\
&= (1+\theta)\int_0^\infty e^{-(1+\theta)s}\{2 - 3e^{-s}\}ds\\
&= (1+\theta)\int_0^\infty 2e^{-(1+\theta)s}ds - \int_0^\infty 3e^{-(2+\theta)s}ds\\
&= \left[-2e^{-(1+\theta)s}\right]_0^\infty + (1+\theta)\left[\frac{-3}{2+\theta}e^{-(2+\theta)s}\right]_0^\infty\\
&= 2 - 3 \times \frac{1+\theta}{2+\theta}\\
&\to \frac{1}{2} \text{ as } \theta \to 0 \text{ (action 1)}\\
&\quad -1 \text{ as } \theta \to \infty \text{ (action 0)}
\end{aligned}
$$

これより，ϕ は θ が小さいと完全予見経路になる．

上記の式変形の中で，

$$
\begin{aligned}
u_i(1, \phi_j(s)) &= 3(1 - \phi_{j1}(s) + 2\phi_{j1}(s)) = 3 - \phi_{j1}(s)\\
u_i(0, \phi_j(s)) &= 4 - 4\phi_{j1}(s).
\end{aligned}
$$

これより，

$$
\begin{aligned}
u_i(1, \phi_j(s)) - u_i(0, \phi_j(s)) &= -1 + 3\phi_{j1}(s)\\
&= -1 + 3(1 - e^{-t})\\
&= 2 - 3e^{-t}
\end{aligned}
$$

を得る．この式を代入していることに注意．

p-支配

均衡選択のリスク支配の概念を拡張する．通常リスク支配の概念は 2×2 の対称ゲームで定義される．この概念を $n \times n$ へと拡張したひとつの概念を紹介し，完全予見経路との関連を調べる．

定義 23 2 人対称ゲームとは，

1. $N = \{1, 2\}$: プレーヤーの集合
2. $X_i = X_j = \{x_1, ..., x_m\} =: X$: 戦略集合
3. $u_i(x_k, x_l) =: u(x_k, x_l)$: 利得関数

を満たす戦略形ゲームの $\{X, u\}$ のことである．

‘

定義 24 (x_i, x_i) が p-支配均衡とは，

$$\forall \sigma \in \Delta(X),\ \forall x_j \in X,\ \sigma(x_i) \geq p \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \sigma(x_k) u(x_i, x_k) \geq \sum_{k=1}^{m} (\sigma(x_k)) u(x_j, x_k)$$

を満たすことである．

つまり，p 以上の確率をつける σ に対して最適反応をするというものである．
参考

		μ x_1	$1-\mu$ x_2
μ	x_1	a, a	c, b
$1-\mu$	x_2	b, c	d, d

$a > b,\ d > c$ とする．例えば，

	0	1
0	$2, 2$	$3, 0$
1	$0, 3$	$4, 4$

のような対称ゲームがその代表例である．
(x_1, x_1) が (x_2, x_2) をリスク支配するというのは，$a - b > d - c$ によって定義される．
ここで，

$$\mu = \frac{d - c}{a - b + d - c}$$

とおく．この時，

- (x_1, x_1) は，μ-支配均衡．

- (x_2, x_2) は，$(1-\mu)$-支配均衡.

注意 14 $\mu < \frac{1}{2}$ ということと，(x_1, x_1) が (x_2, x_2) をリスク支配することが同値になる.

$$
\begin{aligned}
\mu < \frac{1}{2} &\iff d - c < \frac{1}{2}(a - b + d - c) \\
&\iff d - c < a - b
\end{aligned}
$$

より上記の事柄が分かる.

定理 4 下記の１，２は同値になる.

1. $\exists \bar{\theta} > 0:\ \forall \theta < \bar{\theta}$，ナッシュ均衡 (x_i, x_i) がが線形安定になる.
2. (x_i, x_i) が $p < \frac{1}{2}$ について p-支配均衡になる.

証明

補題 1 (x_i, x_i) が p-支配均衡であるとする．この時，e_i が線形安定であることと，$p \le \frac{1}{2+\theta}$ は同値になる．ここで，e_i は Δ の元で，$e_i(x_i) = 1$，$j \neq i$ について $e_i(x_j) = 0$ を満たす.

補題を証明する．$p \le \frac{1}{2+\theta}$ を仮定する．$\sigma^0 \in \Delta(X) \times \Delta(X)$ を初期条件とする.

$$
\sigma(t) := e_i - (e_i - \sigma^0)e^{-t}
$$

を σ^0 から e_i への線形経路とする．この時,

$$
\begin{aligned}
V_j(t) &:= V_{ij}(\sigma_{-i})(t) \\
&= (1+\theta)\int_0^\infty e^{-(1+\theta)s} u(x_j, \sigma_{-i}) ds \\
&= (1+\theta)\int_0^\infty e^{-(1+\theta)s} [\{1 - (1 - \sigma^0(x_i))e^{-t-s}\} u(x_j, x_i) + \sum_{k \neq i} \sigma^0(x_k)^{-t-s} u(x_j, x_k)] ds \\
&= \left\{1 - \frac{1+\theta}{2+\theta}(1 - \sigma^0(x_i))e^{-t}\right\} u(x_j, x_i) + \sum_{k \neq i} \frac{1+\theta}{2+\theta}\sigma^0(x_k))e^{-t} u(x_j, x_k) \\
&=: \sum_{k \neq i} \pi(x_k) u(x_j, x_k)
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\pi(x_i) = 1 - \frac{1+\theta}{2+\theta}(1 - \sigma^0(x_i))e^{-t}
$$

などとする.

よって，

$$\pi(x_i) \geq \frac{1}{2+\theta} + \frac{1+\theta}{2+\theta}\sigma^0(x_i) \qquad e^{-t} \leq 1 \text{ より}$$
$$\geq \frac{1}{2+\theta} \geq p \qquad 0 \leq \sigma^0(x_i) \leq 1 \text{ より}$$

(x_i, x_i) が p-支配均衡なので，

$$V_i(t) \geq V_j(t) \forall j$$

よって，$\sigma(t)$ という線形経路は完全予見経路になる．よって，e_i は線形安定になる．

$p > \dfrac{1}{2+\theta}$ と仮定する．(x_i, x_i) は p-支配均衡なので，

$$\exists \pi \in \Delta(X),\ \exists x_j \in X_j:\ \pi(x_j) = \frac{1}{2+\theta} \wedge \sum_{k=1}^{m} \pi(x_k)u(x_i, x_k) < \sum_{k=1}^{m} \pi(x_k)u(x_j, x_k).$$

そこで，σ^0 として，

$$\sigma^0(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{if } k = i \\ \frac{\pi(x_k)(2+\theta)}{1+\theta} & \text{if } k \neq i \end{cases}$$

とおく．e_i への線形経路として

$$\sigma(t) = e_i - (e_i - \sigma^0)e^t$$

を考える．(x_i, x_i) が p-支配均衡であるので，

$$V_i(0) - V_j(0) = \sum_{k=1}^{m} \pi(x_k)u(x_i, x_k) - \sum_{k=1}^{m} \pi(x_k)u(x_j, x_k) < 0$$

を得る．この線形経路は完全予見経路ではない．これは e_i が線形安定に矛盾する．

参考

$V_i(0)$ の具体的な計算は下記のようになる．

$$V_i(0) = \left\{1 - \frac{1+\theta}{2+\theta}(1 - \sigma^0(x_i))e^{-0}\right\} u(x_i, x_k) + \sum_{k \neq i} \frac{1+\theta}{2+\theta}\sigma^0(x_k)e^{-0}u(x_j, x_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \pi(x_k)u(x_i, x_k).$$

これを用いて，$V_i(0) - V_j(0)$ を計算したものが証明中の式展開となる．

定理の証明

$(2 \Rightarrow 1)$

(x_i, x_i) が $p < \frac{1}{2}$ について p-支配均衡とする．補題より，(x_i, x_i) は線形安定になる．また，$\theta \leq \frac{1}{p} - 2$ より，$\bar{\theta} = \frac{1}{p} - 2$ とすればよい．

$(1 \Rightarrow 2)$

ある $\bar{\theta}$ について，$\theta \leq \bar{\theta}$ を満たすならば (x_i, x_i) がナッシュ均衡で，かつ，線形安定であるとする．(x_i, x_i) がナッシュ均衡であるので，ある p について (x_i, x_i) は，p-支配均衡になる．

補題より，

$$p \leq \frac{1}{2+\theta}$$

がすべての $\theta \leq \bar{\theta}$ で成立する．よって，

$$p < \frac{1}{2}$$

を得る．

16　制度設計

制度設計 (メカニズムデザイン，Mechanism Design) や実行理論 (Implimentation) と呼ばれるゲーム理論を応用したモデルについて簡単に紹介します.

公共財経済では，市場メカニズムゆだねると市場の失敗[*2]が発生することが知られています．どのような制度を設計すれば市場の失敗を回避し，最適な資源配分が実現できるのかを考察しましょう．公共財経済において「リンダール均衡ならばパレート効率的な資源配分が達成される」ことが示されています．この事実を利用すると，公共財経済においてリンダール均衡を実行できるような制度を設計すればパレート効率的な資源配分が達成され，市場の失敗を回避できることとなります.

16.1　ウォーカーメカニズム

定義 25 $(N, X, Y, \{u_i, \omega_i\}_{i \in N}, f)$ が**公共財経済**であるとは,

1. $N = \{1, \ldots, n\}$,
2. $X = \mathbb{R}_+$,　(私的財)
3. $Y = \mathbb{R}_+$,　(公共財)
4. $u_i : X \times Y \to \mathbb{R}$,　(効用関数)
5. $\omega_i \in X$,　(初期保有量)
6. $f : X \to Y$,　(生産関数)

定義 26 $(q^*, x^*, y^*) \in \mathbb{R} \times X^n \times Y$ が公共財経済の**リンダール均衡**であるとは,

[*2] 公共財経済において，市場メカニズムを用いるとパレート効率的な資源配分が達成できない可能性があるということ．

1. $\forall i \in N$,

$$u_i(x_i^*, y^*) = \max_{x_i, y_i} \quad u_i(x_i, y_i) \quad \text{subject to} \quad 1 \cdot x_i + q_i^* y_i \leq \omega_i.$$

2. $\forall i \in N$, $y^* = y_i$
   $\sum_{i=1}^n x_i^* + y^* \leq \sum_{i=1}^n \omega_i$.

定義 27 $(N, \{M_i\}_{i \in N}, Z, g)$ が**ゲーム型** *(***メカニズム***)* であるとは,

1. $N = \{1, \ldots, n\}$,
2. M_i は集合, (メッセージ集合)
3. Z は集合, (結果の集合)
4. $g : \prod_{i=1}^n M_i \to Z$. (結果関数)

注意

- 公共財 y を生産する関数は，$y = x$ という線形関数をここのモデルでは考えている.
- Z は，通常，達成させたいターゲットの利得関数 (効用関数) の定義域にあたる集合を適応する.
- メカニズムデザインとは，プレイヤーの戦略集合 M_j と g という結果関数を上手に設計し，達成させたいターゲットの結果を望ましいものにさせること.
- 達成させたいターゲットの利得関数 u_j をゲーム型に加えると戦略形ゲーム $(N, M_j, u_j \circ g)$ になることに注意．この事が，関数 g を特に，メカニズムと呼ぶ 1 つの理由.

定義 28 $(N, X, Y, \{u_i, \omega_i\}_{i \in N}, f)$ を公共財経済とする．$(N, \{M_i\}_{i \in N}, Z, g)$ が**ウォーカーメカニズム**であるとは,

1. $N = \{1, \ldots, n\}$,
2. $M_i = \mathbb{R}$,
3. $Z = X^n \times Y$,
4. $g : \prod_{i=1}^n M_i \to X^n \times Y$ ただし下記を満たす.

$$\begin{aligned}
q_i(m_1, \ldots, m_n) &= \frac{1}{n} + m_{i+2} - m_{i+1}, \\
x_i(m_1, \ldots, m_n) &= \omega_i - q_i(m_1, \ldots, m_n) y(m_1, \ldots, m_n), \\
y(m_1, \ldots, m_n) &= \sum_{i=1}^n m_i, \ \mathit{and} \\
g(m_1, \ldots, m_n) &= (x_1(m), \ldots, x_n(m), y(m)) \ .
\end{aligned}$$

定義 29 ウォーカーメカニズムから**誘導された戦略形ゲーム**$(N, \{M_i, u_i \circ g\}_{i \in N})$ とは，

$$u_i(g(m_1, \ldots, m_n)) = u_i(x_i(m_1, \ldots, m_n), y(m_1, \ldots, m_n)).$$

によって与えられるゲームである．

定理 5 $(m_1^*, \ldots, m_n^*)$ がナッシュ均衡であるならば，$g(m_1^*, \ldots, m_n^*)$ はリンダール均衡となる．

証明

m^* をナッシュ均衡とする．ウォーカーメカニズムの定義かあら，

$$\begin{aligned} q_i(m^*) &= \frac{1}{n} + m_{i+2}^* - m_{i+1}^*, \\ x_i(m^*) &= \omega_i - q_i(m^*)y(m^*) \end{aligned}$$

を得る．従って，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i(m^*) &= \sum_{i=1}^n (\omega_i - q_i(m^*)y(m^*)) \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i - y(m^*) \sum_{i=1}^n q_i(m^*) \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i - y(m^*) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} + m_{i+2}^* - m_{i+1}^* \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i - y(m^*). \end{aligned}$$

ゆえに，$(x_1(m^*), \ldots, x_n(m^*), y(m^*))$ はリンダール均衡の条件 2 を満たす．

更に， m^* は戦略形ゲーム $(N, \{M_i, u_i \circ g\}_{i \in N})$ のナッシュ均衡であるので，

$$\begin{aligned} &\forall i \in N, \quad u_i(g(m^*)) \geq u_i(g(m_i, m_{-i}^*)) \quad \text{for all} \quad m_i, \\ &\forall i \in N, \quad u_i(x_i(m^*), y(m^*)) \geq u_i(x_i(m_i, m_{-i}^*), y(m_i, m_{-i}^*)) \quad \text{for all} \quad m_i. \end{aligned}$$

$x_i(\cdot, m_{-i}^*)$ と $y(\cdot, m_{-i}^*)$ は，全単射であるので，$(q(m^*), x(m^*), y(m^*))$ はリンダール均衡の条件 1 を満たす．

ゆえに，$(q(m^*), x(m^*), y(m^*))$ はリンダール均衡になる．

16.2 計算例

3 人の公共財経済を考察する．効用関数を

$$\begin{aligned} u_1(x_1, y) &= x_1 + \log y, \quad && \omega_1, \\ u_2(x_2, y) &= x_2 + 2\log y, \quad && \omega_2, \\ u_3(x_3, y) &= x_3 + 2\log y, \quad && \omega_3. \end{aligned}$$

と特定化する．但し，$x_i\,(i=1,2,3)$ は私的財，y は公共財，$\omega_i\,(i=1,2,3)$ は初期保有量とする．

この公共財経済を基礎にリンダール均衡とウォーカーメカニズムから誘導された戦略形ゲームのナッシュ均衡を比較する．

リンダール均衡

$$\begin{array}{ll} \max & x_1+\log y \\ \text{subject to} & x_1+q_1 y\le \omega_1 \end{array}$$

従って，$x_1=\omega_1-1$. $y=1/q_1$. $\therefore q_1=1/y$.

$$\begin{array}{ll} \max & x_2+2\log y \\ \text{subject to} & x_2+q_2 y\le \omega_2 \end{array}$$

従って，$x_2=\omega_2-2$. $y=2/q_2$. $\therefore q_2=2/y$.

同様にして $x_3=\omega_3-2$. $y=2/q_3$. $\therefore q_3=2/y$.

- $x_1+x_2+x_3+y=\omega_1+\omega_2+\omega_3$.

$$\begin{aligned} y &= \omega_1+\omega_2+\omega_3-(x_1+x_2+x_3) \\ &= \omega_1+\omega_2+\omega_3-\omega_1+1-\omega_2+2-\omega_3+2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

これより，リンダール均衡は，

$$(\underbrace{\omega_1-1,\omega_2-2,\omega_3-2}_{\text{私的財}},\underbrace{5}_{\text{公共財}},\underbrace{1/5,2/5,2/5}_{\text{リンダール税}})$$

ウォーカーメカニズムによって誘導される戦略形ゲームの利得関数は

$$\begin{aligned} u_1(m_1,m_2,m_3) &= x_1(m_1,m_2,m_3)+\log y(m_1,m_2,m_3) \\ &= \omega_1-q_1(m)y(m)+\log y(m), \\ u_2(m_1,m_2,m_3) &= \omega_2-q_2(m)y(m)+2\log y(m), \\ u_3(m_1,m_2,m_3) &= \omega_3-q_3(m)y(m)+2\log y(m). \end{aligned}$$

となる．但し, メッセージ $m=(m_1,m_2,m_3)$ は欲しい公共財の量のような解釈.

$$
\begin{aligned}
y(m) &= m_1+m_2+m_3,\\
q_1(m) &= \frac{1}{3}+m_3-m_2,\\
q_2(m) &= \frac{1}{3}+m_1-m_3,\\
q_3(m) &= \frac{1}{3}+m_2-m_1.
\end{aligned}
$$

ナッシュ均衡

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial m_1} = 0 &\implies -q_1(m)+\frac{1}{m_1+m_2+m_3}=0,\\
\frac{\partial u_2}{\partial m_2} = 0 &\implies -q_2(m)+\frac{2}{m_1+m_2+m_3}=0,\\
\frac{\partial u_3}{\partial m_3} = 0 &\implies -q_3(m)+\frac{2}{m_1+m_2+m_3}=0.
\end{aligned}
$$

$\therefore m_1+m_2+m_3=5$. $m_1=5/3$, $m_2=26/15$, $m_3=8/5$.

ナッシュ均衡戦略を利用すると

$$
\begin{aligned}
&x_1(m)=\omega_1-1,\ x_2(m)=\omega_2-2\,x_3(m)=\omega_3-3,\\
&y(m)=5,\\
&q_1(m)=\frac{1}{5},\ q_2(m)=\frac{2}{5},\ q_3(m)=\frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

を得る．これは，公共財経済のリンダール均衡と一致する．

付録 A　経済実験の説明文章の一例

市場取引において現実に需要曲線と供給曲線との交点として取引価格が決定されることを教室で体験する実験の説明文章を以下に収録する．

市場取引実験

1．実験のルール

りんご売買の実験をします．実験のルールについてご説明します．以下の説明文を注意深く読んでください．

これから実験者が皆さんに「個人情報カード」を配布します．あなたは，りんごの「売り手」もしくは「買い手」になります．カードにはこの実験で利用する数値が書かれています．この

数値はあなた個人の情報で周囲の人たちに漏らしてはいけません．この実験では，14 人に参加してもらい，7 人に買い手，7 人に売り手の役割をしてもらいます．

2. 買い手の役割

あなたは「りんご」を 1 つ購入しようと考えています．カードに書かれている数字は，あなたがりんごを入手するのに支払ってもよいと考えている「最高価格」です．例えば，あなたが「買い手 1 」で，

個人情報カード

	買い手 1
最高価格	x
取引価格	
利得	

というカードを受け取ったとします．このカードは，りんごを購入するのに最高で x 円支払ってもよいという意味を持ちます．

もし，あなたが価格 P 円でりんごの購入に成功すると

$$\text{あなたの利得 (もうけ)} = \text{最高価格} (x) - P$$

です．例えば，りんごを購入する最高価格が 250 円だったとします．もし，200 円で購入したなら，50 円分得をしたと考えてよいわけです．もし，100 円で購入すれば [　　　] 円分のもうけです．もうけを大きくするため，できるだけ安い価格で購入してください．

また，損をしてまで購入する必要はなく，全く購入しなくてもかまいません．もし，購入価格が 300 円ならば，それが最高価格 250 円を超えてしまっているので，[　　　] 円分損をします．購入しなければもうけは 0 円ですので，この場合，300 円でりんごを購入しないほうがよいとなります．

買い手の役割は，もうけをできるだけ大きくするようにりんごを購入することです．

3. 売り手の役割

あなたはりんごを 1 つ持っています．りんごをできるだけ高く販売することが目標です．カードに書かれている数字は，あなたがりんごを仕入れた値段です．例えば，あなたが「売り手 1 」で，

個人情報カード

	売り手 1
仕入れ値	y
取引価格	
利得	

というカードを受け取ったとします．このカードは，りんごを仕入れるのに y 円かかったという意味を持ちます．

もし，あなたが価格 P 円でりんごの販売に成功すると

$$\text{あなたの利得 (もうけ)} = P - \text{仕入れ値} \ (y)$$

です．仕入れ値が 200 円だとします．250 円で販売できれば [　　] 円のもうけです．300 円で販売できれば [　　] 円のもうけです．もうけを大きくするために，できるだけ高い価格で販売してください．

もちろん損をしてまで販売する必要はありません．もし，180 円で売ると [　　] 円の損失になりますが，売らなければもうけは 0 円です．この場合は，りんごを売らない方がよいこととなります．

売り手の役割は，もうけをできるだけ大きくするようにりんごを販売することです．

4．売買の方法

実験参加者は，個人情報カードの数値を他人に知られないように黒板の前にカードを持ち集まります．いよいよ取引が始まります．損をしてまで相手を見つける必要はありません．つける価格は何円の単位までで，小数点を含む価格の取引は考慮しないでください．

売り手は「売値」を叫び，買い手を捜します．買い手も「買値」叫び，売り手を捜します．できるだけ多くの人と交渉するようにしてください．交渉の時間は 5 分までです．取引をしてもよいと思う相手が見つかったらその相手と一緒に実験者のところまで行き，取引が成立した価格を報告します．実験者は取引価格を黒板に書き，この価格を叫びます．

取引が成立するごとに，個人情報カードに，取引価格と自分が得た利得を記録してください．ただし，他の人に自分の最高価格や仕入れ値を見られないように注意してください．

索引