2003.10.20

線形代数学 II (2121404)

担当：原　隆（多元数理科学研究科）：理 1 号館 508 号室，内線 (hara@math.nagoya-u.ac.jp)

Office hours: 検討中（暫定案：この講義終了後，どこかの教室で；毎週金曜の午後４時〜５時に僕のオフィスで）

概要：線形代数学 I に引き続いて，線形代数学を学びます．春学期には単なる練習問題であったものが，この学期のテーマを扱うには不可欠になってきます．キーになる概念：線形空間，部分空間，基底と次元，**線形写像とその行列表示，固有値と固有ベクトル，行列の対角化**.

内容予定：（以下は大体の目安です．何回目に何をやるか，は段々とずれてくるでしょう.）

大体，教科書の第８章〜第１０章をやります．補講を入れなければ１０回しかないから，日程的にキツイ！

I. 線形写像と行列：線形写像と行列の関係について学ぶ.（４回：10 月 20 日〜11 月 17 日）
（キーワード）線型写像と表現行列、部分空間，核空間と像空間, (射影)，基底と次元

1. 線形写像の定義，特に「線形性」とは何か？
2. 線形写像の像空間と核空間（部分空間，基底と次元の復習も）
3. 線形写像の行列表示；行列の階数の持つ意味

挿入. I か II の後で中間試験！(ただし，中間試験を「小テスト２回」にするかも）

II. 固有ベクトルと固有値：これらの概念を理解し、計算できるようにする.（２回：〜12 月 15 日）
（キーワード）固有値，固有ベクトル，固有空間

1. （線形写像と行列の）固有値，固有ベクトルの定義，固有空間の定義.
2. 固有値と固有ベクトルの求め方

III. （実対称）行列の対角化と標準形：基底の取り方を変えて，写像を簡単にする.（２回：12 月 22 日＋補講）
（キーワード）実対称行列の対角化

1. （実対称）行列の対角化：対称行列を対角化できるようになろう.
2. （少しオプション）一般の行列はどこまで「対角」にできるのか？

IV. 内積空間（オプションぎみ；1 月の２回）　（キーワード）内積，ノルム，正規直交基底

1. 内積，ノルムの定義
2. 正規直交基底

> 中間試験の具体的な日取りは後日，進度と相談しながら決め，講義やプリントで連絡する．その日取りは，上の「内容予定」からずれることも十分にあり得るので，知らないうちに試験が終わっていたなどと言うことのないように，十分，注意されたい.

教科書：「線形代数概説」(内田伏一・浦川肇　著，裳華房）

参考書：「線形代数入門」(斉藤正彦　著，東大出版会）

評価方法：

前期の初めに,「線形代数は鬼門だ！」と宣言しましたが，前期の間はそれほど大したことはなかったのではないでしょうか（部分空間を除く）．本当の苦しみはこれからですから，気を抜かないでくださいね.

具体的な評価方法は前期と基本的に同じです．つまり，何回かの小レポートや中間テストなどと期末試験の成績を総合して，以下のように評価します．中間テストの具体的な実施日時は追って講義中に通知します.

- 最終成績は一旦，１００点満点に換算してから，この大学の様式に従って（４段階で）つける.
- その１００点満点（「最終点」と呼ぶ）は，以下のように計算する.
  - まず,「レポートの点」「中間試験の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す.

– 次にこの３つを以下の式で「平均」し，一応の総合点を出す：

$$
\begin{aligned}
(\text{総合点 } A) &= 0.25 \times (\text{レポート点}) + 0.35 \times (\text{中間の点}) + 0.40 \times (\text{期末の点}) \\
(\text{総合点 } B) &= 0.40 \times (\text{中間の点}) + 0.60 \times (\text{期末の点})
\end{aligned}
$$

ただし，上の計算式の重みを若干変更する可能性はあることを承知されたい（例えば，総合点 B で，中間と期末の比を $5:5$ にするなど）.

– 最終成績は

$$(\text{最終点}) = \max\{\,(\text{総合点 } A), (\text{総合点 } B), (\text{期末の点})\,\}$$

とする事にする．つまり,（総合点 A）,（総合点 B）と（期末の点）を比べて，一番良いものをとるのだ.

- このように「期末で一発逆転」も可能なようにした．だから，理論的には，講義にも全く出ず，レポートも出さず,...，とやっていても期末で１００点とればよいことになる．しかし,（失礼だが），最近の学生さんでこれができる人はほとんどいないだろう — 言うまでもなく，期末試験は中間試験やレポートよりは難しいぞ．だから，あくまで自己責任でやってくれ．期末の一発勝負に出て成績が悪くても，苦情は一切受け付けないからね！(できる人が少ないだろうと思いつつもこの形式をとるのは，僕の美学にこだわっているからである.）

合格（最低）基準：

合格のための条件（A, B がとれる条件ではない！）は，前期と同じく，毎回，または隔回に出題するレポート問題と同レベルの問題が解けることである.（ただし「時間がなくてレポートは出せないけど試験には出すぞ」などの指示を講義中に与えることもあり得る.）具体的に書くと，大体，以下のようになる（進度の都合で若干の変更はあり）.

- 線形空間，部分空間，基底と次元がわかること.
- 線形写像の定義を理解し，その行列表示も求められること.
- 固有値，固有ベクトルの定義がわかり，それらを求められること
- 与えられた行列を対角化できること.

レポートについて：

前期と同じく，毎回ないし隔回の割合で簡単なレポートを出し，次の週に返却する．レポート出題の意図は「この程度できれば講義についていけるし，合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること，である．成績評価に占めるレポートの比重は低いが，この講義をこなす上では重要な意味があるので，面倒でもやってみることを強く奨める.

特に一言：

この講義は前期の続きですが，特に「部分空間，基底と次元」がわかっていないと最初からつまずくことになります．ここは前期にも触れましたが，かなりの人が苦戦しているので配慮はしますが，かなりの人にとって大変になることが予想されます．一方で，良くわかっている人にはつまらない講義になる可能性もあります．良くわかっている人には一層の自主学習を奨めます（個別の質問などでは納得するまでつきあいますので，ご容赦を）.

この科目に関するルール：

前期と同じく．以下のルールを定めておきます.

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する.
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように)．これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです.
- 時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける.（追加しました）
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う.
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う.
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.nagoya-u.ac.jp)．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい.

1 線形写像

ある意味，この節の内容が線形代数の最大の山場だ．ここで重要かつ新しい概念のほとんどが出てくる．部分空間や基底，もでてくるが，これらを単独で復習する代わりに，線形写像を学びつつ，補っていくことにする．

（お約束）前期と同じく，m, n と言うのは正の整数である．

1.1 写像とは？

線形写像に入る前に，一般の写像についてまとめておく．定義の羅列なので，さらっと行こう．

写像：集合 X のそれぞれの元 x に対して集合 Y の元 y を対応させる対応規則のことを，X から Y への写像と言う．通常，写像は f, g などの記号で表し，f が X から Y への写像であることを

$$f : X \longrightarrow Y, \tag{1.1.1}$$

また，f によって x が y に対応させられていることを

$$f : x \mapsto y \qquad \text{または} \qquad y = f(x) \tag{1.1.2}$$

と書く．上の x と y の関係は「f によって x が y に写像される」とも言う．

像，全射，単射：X の総ての元を f で写したとき，行き先は Y の全部になるとは限らない．そこで，

$$\{f(x) \,|\, x \in X\} = (X \text{ を } f \text{ で写した行き先の全体}) \tag{1.1.3}$$

を f の像と言う．また，上の集合を，$f(X)$ と書くことが多い（記号の乱用）．

$Y = f(X)$ の時，f は全射であるという．

また，$x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ であるとき，f は単射であるという．

全射かつ単射の場合，全単射という．

逆写像： $f : X \to Y$ が全単射の時，$y = f(x)$ の写し方を逆向きにして，$x = g(y)$ となるような写像 $g : Y \to X$ を定義できる．この g を f の逆写像と呼び，$g = f^{-1}$ と書く．

合成写像： 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ に対して，写像 $h : X \to Z$ を，$h(x) = g(f(x))$ によって定義する．この h を f と g の合成写像と呼び，$h = g \circ f$ と書く（順序に注意：右にあるやつから先にやる）．

1.2 線形写像とは？線形性とは？

（注）以下で「ベクトル空間」という場合は単に列ベクトルの空間 $\mathbb{R}^n$ などを思い浮かべていれば十分である．本来，以下の定義は「一般のベクトル空間」についても有効であるが，この講義では「一般のベクトル空間」を全面に押し出すことはしない．良くわかっている人のみ,「V や W は一般のベクトル空間で良いのだな」と適宜補って読んでほしい．

> **定義 1.2.1 (写像が線形とは?)** ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$ から ベクトル空間 $W = \mathbb{R}^m$ への写像 f が線形であるとは，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と任意のスカラー k に対して，
>
> $$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \qquad f(k\boldsymbol{x}) = k\, f(\boldsymbol{x}) \tag{1.2.1}$$
>
> が成り立つことである．

上の性質から直ちに，任意のベクトル $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(p)}$ とスカラー $k_1, k_2, \ldots, k_p$ について，

$$f(k_1\,\boldsymbol{x}^{(1)} + k_2\,\boldsymbol{x}^{(2)} + \cdots + k_p\,\boldsymbol{x}^{(p)}) = k_1\, f(\boldsymbol{x}^{(1)}) + k_2\, f(\boldsymbol{x}^{(2)}) + \cdots + k_p\, f(\boldsymbol{x}^{(p)}) \tag{1.2.2}$$

が成り立つことがわかる．(1.2.1) や (1.2.2) は「線形性」を特徴づける，非常に重要な関係である．

ベクトル空間からベクトル空間への線形な写像を線形写像と言う．また，$V = W$ の時に線形写像を線形変換とも言う．(注：$V = W$ と言っても，これは写像の元と行き先の集合が同じ，と言うだけで，元と行き先が等しい，と言っているのではないよ.)

例 1： $V = W = \mathbb{R}$，$f(x) = 2x$ としたら，この一次関数は立派な線形写像（線形変換）である．

例 1′： $V = W = \mathbb{R}$，$g(x) = 2x + 1$ は線形写像ではない！(why?)

例 2： $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$ とし，f を $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$ とすると，これも線形写像.

例 3： 一般に，$V = \mathbb{R}^n$，$W = \mathbb{R}^m$，A を $m \times n$ 行列とし，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定義すると，f は線形写像である．

問 1： 上のそれぞれの例は，全射か，単射か？

線形とは？を理解するための問題：これらの問題は，後で線形写像の表現行列を求めるときの伏線にもなっている．

問 2：

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が線形写像で，$f(3) = 1$ だと言う．このとき，$f(5)$ はいくらか？
- 上の f に対して，$f(x) = 10$ となる x を求めよ．

問 3：

- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が線形写像で，$g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ かつ，$g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ だと言う．このとき，$g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ と $g\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ．
- 上の g に対して，$g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ となるようなベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を求めよ．

問 4：

- $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が線形写像で，$h\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$，$h\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ かつ，$h\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ だと言う．このとき，$h\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ と $h\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ．
- 上の h に対して，$h(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ となるようなベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ はあるか？

今日はどこまで行けるか自信がないので，上の問題はレポート問題にはしない．しかし，各人でやってみることを強く奨める．

１０月２７日：先週からひどい風邪で，声が出ない上に熱があってフラフラする．ので，今日の講義は多分に元気がないことをお断りしておく．
Office hours はこの前の暫定案通り，(1) 毎週月曜の講義後にこの教室で，(2) 毎週金曜の午後４時〜５時に僕のオフィスで，の２本立てにします．

第１回レポート問題：線形写像の像と核を求める問題です．毎度のことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問１： 以下の線形写像 f, g, h の核空間と像空間，およびそれらの次元を求めよ．

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + 2y + 3z + w \\ x + 3y - z + 5w \\ y - 4z + 4w \\ x + 4y - 5z + 9w \end{bmatrix}$$

g は以下を満たす線形写像：

$$g : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g : \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad g : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

h は以下を満たす線形写像：

$$h : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad h : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad h : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

この h の与え方は他の問題とは異なっているので，ちょっととまどうだろう．しかし，これも線形性の定義に戻ってゆっくり考えればできるはずだ．この h は皆さんに考えて貰う材料を与える意味で出題した．

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

11 月７日（金）午後５時までに，原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前の封筒に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（最低限の礼儀だぞ）．また,「番外」の問題はもちろん，成績には一切関係ないので，自由に回答してくれると助かります．

————————————————-以下，レジュメの続き ————————————

1.3　核空間と像空間

先週は線形写像の定義を導入した．今日は線形写像を特徴づける２つの空間を導入する．実のところ，これより先に「線形写像の表現行列」をやった方が良いかもしれないが，教科書の順序に従うことにした．

与えられた線形写像 $f : X \to Y$ を特徴づける，一番特徴的なものは何だろうか？なんと言っても，f によって X がどこに移るか，ではないだろうか？もちろん，X の行き先は Y の中にあるが，Y 全体とは限らない．この点を明確にするために：

定義 1.3.1 (核空間と像空間) ベクトル空間 X から ベクトル空間 Y への線形写像 f に対して，

$$\mathrm{Im}f \equiv \{f(\boldsymbol{x}) \,\big|\, x \in X\} \qquad f \text{ の像空間} \tag{1.3.1}$$

$$\mathrm{Ker}f \equiv \{\boldsymbol{x} \in X \,\big|\, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} \qquad f \text{ の核空間} \tag{1.3.2}$$

を定義する.（「核空間」の意味はもうすぐ明らかになる.）

上で「空間」と言う言葉を使ったが，これらは実際に部分空間になっている．そこでまず，部分空間の定義の復習をしよう．

定義 1.3.2 (部分空間) ベクトル空間 X の部分集合 W は，以下の３つの条件を満たすとき，X の部分空間である，と言う：

(0) $\boldsymbol{0} \in W$
(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ ならば $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$
(2) $\boldsymbol{x} \in W$ ならば，任意のスカラー k に対して $k\boldsymbol{x} \in W$

では，上の像空間，核空間が本当に部分空間かどうか，確かめよう．

（像空間について）

(0) 線形写像の定義から $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ である（なぜなら，$f(\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0}) + f(\boldsymbol{0})$）．つまり，$\boldsymbol{0} \in \mathrm{Im}\, f$.

(1) $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Im}\, f$ とする．これはつまり，$\boldsymbol{y}_1 = f(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{y}_2 = f(\boldsymbol{x}_2)$ なる $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が存在するということ．そこで，線形性から，$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$ がなりたつ．ところが，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in X$ であるから，これを f で送った先の $f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$ は $\mathrm{Im}\, f$ の元である．つまり，$\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Im}\, f$.

(2) 上と同じようにすすむ．$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\, f$ とすると，これは $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ なる $\boldsymbol{x} \in X$ があるということ．そこで，$k\,\boldsymbol{y} = k\,f(\boldsymbol{x}) = f(k\,\boldsymbol{x})$ である．しかし，$k\boldsymbol{x} \in X$ なので，$f(k\,\boldsymbol{x})$ は $\mathrm{Im}\, f$ の元である．よって，$k\,\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\, f$. □

（核空間について）

(0) 像空間のところで $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ を示した．つまり，$\boldsymbol{0} \in \mathrm{Ker}f$.

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ とする．つまり，$f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$ ということ．すると線形性から，$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ がなりたつ．つまり，$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ker}\, f$.

(2) 上と同じようにすすむ．$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, f$ とすると，これは $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ということ．そこで，$f(k\,\boldsymbol{x}) = k\,f(\boldsymbol{x}) = k\,\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ より，$k\,\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\, f$. □

これから，核空間，像空間を求める．求めるのだが，そのためには部分空間の効率的な表し方を知る必要がある.（今相手にしているのは一般に無限個の要素を含んだ集合であるから，その要素を総て書き下すことなどできないぞ！）その答えが（春学期から出てきた）「基底と次元」になるのだ．春学期から使っている概念ではあるが重要なので，以下の定義から入る．

定義 1.3.3 (ベクトルの張る空間) ベクトル空間 X のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の一次結合 $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{v}_r$ の全体を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ の張るベクトル空間 と言い，$S[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r]$ で表す.

数式で書けば，$S[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r] = \{k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{v}_r \,\big|\, k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{R}\}$ である．

前期の期末テストで出したように，$S[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r]$ は X の部分空間になっている（各自確かめよう）．

この定義によると，部分空間を規定するのに，その部分空間を張るようなベクトルの組を用いよう，と言う発想が湧いてくる．湧いてくるのだが，それでは少し不十分だ．と言うのは，上の定義の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ のなかに,「余

分な」ベクトルが入っているかもしれないからだ.（例えば，$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ となっていたら，この $\boldsymbol{v}_3$ はあってもなくても，張る部分空間に変わりはない.）そこで,「余分」なベクトルを排除する目的で，いかの定義に到達する．

定義 1.3.4 (部分空間の基底と次元) ベクトル空間 X の部分空間 W がある．W のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が以下の２条件を満たすとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を W の基底という．また，r を W の次元という．

(0) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in W$

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は W を張る，つまり，$S[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r] = W$

つまり，部分空間はその基底と次元で規定しよう，と言うわけだ．

少し例をやってみよう．教科書の問 8.1(p.75)．$f : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x-y-z \\ 2x+3y+8z \\ 3x-2y-z \end{bmatrix}$ の核空間と像空間を求める．

核空間から求める．$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ が核空間に属すると言うことは，これの行き先がゼロベクトル，つまり，

$$\begin{bmatrix} x-y-z \\ 2x+3y+8z \\ 3x-2y-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.3.3}$$

と言うこと．これを解くと，$x = -z, y = -2z$ （z は任意）．よって核空間は $\left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ で，その次元は 1.

像空間を求めるには，まず，像空間がどのようなベクトルで張られうるのか，を考える（この段階では「余分」なベクトルがあってもよい）．そのためには，以下の性質を用いる

補題 1.3.5 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ をベクトル空間 X の基底とする．線形写像 $f : X \to Y$ の像空間は，ベクトル $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ で張られる．

（証明）$f(\boldsymbol{v}_j)$ のそれぞれが像空間の元であることは，定義から明らか．写像の線形性から，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ で張られる空間が像空間の部分集合であることもすぐに出る（各自，確かめよ．何を証明する必要があるかな？）

問題は，これで取りこぼしがないのか，つまり，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ の線形結合で書けないような像空間の元はないのか，ということである．しかし，これはないことが以下のようにしてわかる．

像空間の任意の元 $\boldsymbol{y}$ にたいしては，適当な $\boldsymbol{x} \in X$ があって，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ と書けているはずである．この $\boldsymbol{x}$ は X の元であるから，その基底の線形結合として $\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{v}_m$ と書けるはず．この両辺に f を施すと，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = f(k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_m\boldsymbol{v}_m) = k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + k_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \ldots + k_m f(\boldsymbol{v}_m)$ となる．つまり，像空間の任意の元 $\boldsymbol{y}$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ の線形結合で書けた． □

上の補題を用いて像空間を求めよう．X の基底としてはその標準基底を用いる．f の定義から，

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{1.3.4}$$

なので，像空間は上の右辺の３つのベクトルで張られるはずだ．この中から基底を選ぶには，一次独立なものを探し出せば良い．３つのベクトルの内，どの２つをとっても一次独立ではあるが，３つあわせると独立でないかもしれない．実際にやってみると，

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1.3.5}$$

であるとわかる．従って，

$$\text{像空間の基底（の一つ）は}\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix}\right\rangle, \qquad \text{像空間は}\left\{ s\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\3\\-2\end{bmatrix} \,\middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\} \tag{1.3.6}$$

で，その次元は 2.

（問 8.1 の解答終わり）

ここで，像空間と核空間の意味に戻って考えよう.「像空間」の意味は最初に説明したとおりだ．f によって X 全体を一生懸命，写像していった先が，どのくらい広い空間か（特に Y 全体になっているのか）ということの目安になる．

「核空間」の意味付けは，以下の定理によって与えられる．

定理 1.3.6 $f : X \to Y$ を線形写像とするとき，以下がなりたつ：

$$\dim(\,\mathrm{Im}\, f\,) + \dim(\,\mathrm{Ker}\, f\,) = \dim(\,X\,) \tag{1.3.7}$$

ここで $\dim(W)$ は W の次元を表す.

この定理は割合自然に理解できる．f で送る前の空間が X でその次元が $\dim(X)$ であったのだが，送られた先の次元は $\dim(\,\mathrm{Im}\, f\,)$ なのだ．足りない部分はどこに消えたのかというと，$\dim(\,\mathrm{Ker}\, f\,)$，つまり，$f$ によってゼロに写されてしまった部分である．つまり，$\mathrm{Im}\, f$ として現れている部分と $\mathrm{Ker}\, f$ としてゼロにされてしまった部分をあわせるともともとの X 全体になる，と言うわけだ.

（定理の証明の要点）

教科書にもあるので，簡単に．いろいろな方法があるが，やはり $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を特定してかかるのが簡単だろう．$\mathrm{Ker}\, f$ の基底を $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r\rangle$ とすると，これに適当にベクトルを付け加えて X の基底にできる．それを $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ とする．言いたいことは，$\mathrm{Im}\, f$ の基底が $\langle f(\boldsymbol{v}_{r+1}), f(\boldsymbol{v}_{r+2}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)\rangle$ である事だ．そのためには（１）これらが一次独立,（２）これらが $\mathrm{Im}\, f$ を張る，の２つを言えばよい.

（１）の一次独立性を確かめるには，いつも通り，$k_{r+1}f(\boldsymbol{v}_{r+1})+k_{r+2}f(\boldsymbol{v}_{r+2})+\ldots+k_m f(\boldsymbol{v}_m) = \boldsymbol{0}$ を解けばよい．線形性から，これは $f(k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\ldots+k_m\boldsymbol{v}_m) = \boldsymbol{0}$ と同じ事で，$k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\ldots+k_m\boldsymbol{v}_m \in \mathrm{Ker} f$ を意味する．ところが，$\mathrm{Ker} f$ の基底は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ であって，これらのベクトルは $\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ とは一次独立だ（なぜなら，両者併せて X の基底だから）．と言うことは，$k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\ldots+k_m\boldsymbol{v}_m$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の線形結合で表そうとして $k_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\ldots+k_m\boldsymbol{v}_m = k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\ldots+k_r\boldsymbol{v}_r$ を解いてみても，その解は総ての $k_j = 0$ しかない．つまり，特に $k_{r+1} = k_{r+2} = \ldots = k_m = 0$ が得られた．これで $f(\boldsymbol{v}_{r+1}), f(\boldsymbol{v}_{r+2}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ の一次独立性が証明された.

（２）の「張る」方は簡単である．先の補題 1.3.5 により，$\mathrm{Im} f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ で張られることがわかっている．ところが，$\boldsymbol{v}_1$ は $\mathrm{Ker} f$ の基底なんだから，$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{0}$ である．同様に，$f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0}$（$j = 1, 2, \ldots, r$）である．従って，$\mathrm{Im} f$ は $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ からこれらのゼロになるベクトルを除いた，$f(\boldsymbol{v}_{r+1}), f(\boldsymbol{v}_{r+2}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ で張られる. □

１１月１０日：風邪は大分治ってきたが，まだ少し残っている．ので，前回に引き続いて根性のない講義になることをお断りする．また，プリントからミスを排除するようにかなりの努力を払ったが，分量が多いために完全には排除できていないと思う．おかしいと思うところは遠慮なく質問して欲しい．

線形空間の次元についての重要な補足：ゼロベクトルだけなる集合 $\{\mathbf{0}\}$ も線形空間の定義を満たすが，その次元はゼロと定義する．こうしておかないといろいろな定理が成り立たないので，これはお約束．

第２回レポート問題：線形写像の像と核を求め，また表現行列を求める問題です．毎度のことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問２： 線形写像 $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ が以下を満たすという．

$$f:\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad f:\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad f:\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \qquad f:\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}2\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．(1), (2) のどちらから答えても良い．
(1) 以下の線形写像 f の核空間と像空間，およびそれらの次元を求めよ．
(2) f の（標準基底に関する）表現行列を求めよ．

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

11 月 14 日（金）午後５時半までに，原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前の封筒に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（最低限の礼儀だぞ）．また,「番外」の問題はもちろん，成績には一切関係ないので，自由に回答してくれると助かります．

1.4　補足：レポートの解答と線形写像のイメージ

レポート第一回は人によって，かなりの出来の差がありました．出さなかった人もある程度いて，これをどちらに解釈したらよいのか（簡単すぎてやらなかった，または，難しくて手が出なかった），難しいところです．

ここのところは前半の山場なので，しつこいくらいに詳しく説明します．

1.4.1　f の場合

（核空間）からやります．

核空間の定義は何だったかというと，$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ となるような $\boldsymbol{x}$ の全体だった．だから，この式を解けばよい．具体的には，連立方程式

$$\begin{aligned} x+2y+3z+w&=0\\ x+3y-z+5w&=0\\ y-4z+4w&=0\\ x+4y-5z+9w&=0 \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

を満たすような x,y,z,w を求めればよいのだ．ともかく掃きだし法などで解くと（詳細は略；わからない人は後で質問に来ること）

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.4.2}$$

となることがわかる（s,t は任意の実数）．これからわかることは,（１）(1.4.2) の左辺のベクトル全体を (1.4.2) 右辺のベクトル２本の線形結合で書ける．更に（２）右辺に出ている２つのベクトルは明らかに一次独立だ（成分が比例していないから）．このように，(1.4.2) の右辺の２つのベクトルは基底の条件を満たしている．従って

$$\text{核空間の基底は} \left\langle \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \text{核空間は} \left\{ s \begin{bmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{核空間の次元は } 2 \tag{1.4.3}$$

とわかる．

（像空間）

今度は像空間だ．f の行き先（像空間の元）は

$$\begin{bmatrix} x+2y+3z+w \\ x+3y-z+5w \\ y-4z+4w \\ x+4y-5z+9w \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{1.4.4}$$

と書けている．つまり，像空間は (1.4.4) の右辺に出ている４つのベクトルで張られている．(以下，スペース節約のために，右辺に出ているベクトルを左から $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ と書く.）問題はこの４つのベクトルが一次独立か，なので，それを調べる[1]．一次独立かどうかは，連立方程式

$$x\boldsymbol{b}_1 + y\boldsymbol{b}_2 + z\boldsymbol{b}_3 + w\boldsymbol{b}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.4.5}$$

を解けば宜しい．

アレレ？この方程式はどこかで見たことがあるぞ！そうです！核空間を求めたときの方程式 (1.4.1) とまったく同じだね．そこでの結論は $x=-11s+7t, y=4s-4t, z=s, w=t$ （s,t は任意）だった．つまり $x=y=z=w=0$ 以外の解があったので，４つのベクトルは一次独立ではないわけだ．

更に，この結果を書き直すと，

$$\mathbf{0} = (-11s+7t)\boldsymbol{b}_1 + (4s-4t)\boldsymbol{b}_2 + s\boldsymbol{b}_3 + t\boldsymbol{b}_4 = s(-11\boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3) + t(7\boldsymbol{b}_1 - 4\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_4) \tag{1.4.6}$$

が任意の s,t について成り立つ，となるので，s,t の係数がそれぞれゼロ，つまり

$$-11\boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 = \mathbf{0}, \qquad 7\boldsymbol{b}_1 - 4\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_4 = \mathbf{0} \tag{1.4.7}$$

がわかった．これは書き換えると，

$$\boldsymbol{b}_3 = 11\boldsymbol{b}_1 - 4\boldsymbol{b}_2, \qquad \boldsymbol{b}_4 = -7\boldsymbol{b}_1 + 4\boldsymbol{b}_2 \tag{1.4.8}$$

を意味する．従って,（１）像空間の任意の元は

$$x\boldsymbol{b}_1 + y\boldsymbol{b}_2 + z\boldsymbol{b}_3 + w\boldsymbol{b}_4 = (x+11z-7w)\boldsymbol{b}_1 + (y-4z+4w)\boldsymbol{b}_2 \tag{1.4.9}$$

[1]ここではわざと泥臭くやっている．下の注でもう少しましな方法を示す

と，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の線形結合で書ける，ことがわかった．更に,（２）$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は明らかに一次独立（成分が比例してない）．

以上の（１）（２）より，

$$\text{像空間の基底は } \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle, \qquad \text{像空間は } \{ s\boldsymbol{b}_1 + t\boldsymbol{b}_2 \mid s, t \in \mathbb{R} \}, \qquad \text{像空間の次元は } 2 \tag{1.4.10}$$

とわかった．

（注）

先週やった定理 1.3.6 を用いると，像空間の方は実は簡単にわかるのだ．核空間の方で $\dim(\mathrm{Ker} f) = 2$ がわかっているし，$\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ だから，定理から

$$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Ker} f) = 4 - 2 = 2 \tag{1.4.11}$$

のはずなのだ．つまり，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ と４本あるが，像空間は２次元なんだから，この４本の中から独立な２本を取ってくればよい.（計算間違いでなければ，他の２本はこの独立な２本の線形結合で書けるはずだ.）$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ はどの２本をとっても一次独立だね．だから，像空間の基底としては，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4$ のなかから勝手な２本をとってくれれば，それで良いのよ．つまり，$\langle \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j \rangle$ （$1 \le i < j \le 4$）はどれでも基底になっているのだった．

（さらに注）

先週の定理 1.3.6 は非常に重宝するぞ．上の（注）のように「ズルイ」ことができる場合もあるし，そうでなくても，自分の出した答えがあっているのかどうかの検算に使える．かなりたくさんの人が「核空間は２次元，像空間は３次元」，などと，この定理に反することを平気で書いていた．この点は是非，ちゃんとチェックして欲しい！

1.4.2　g の場合

（お約束）スペース節約のため，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{1.4.12}$$

と書く．こうすると，g は $g(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{c}_i$ （$i = 1, 2, 3, 4$）をみたすことになるね．

あることに気がつけば，g と f はほとんど同じような問題だ．そのあることとは，g も f の様な表示で書ける，と言うこと．実際,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 + w\boldsymbol{e}_4 \tag{1.4.13}$$

であることと g の線形性から,

$$g(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 + w\boldsymbol{e}_4) = xg(\boldsymbol{e}_1) + yg(\boldsymbol{e}_2) + zg(\boldsymbol{e}_3) + wg(\boldsymbol{e}_4) = x\boldsymbol{c}_1 + y\boldsymbol{c}_2 + z\boldsymbol{c}_3 + w\boldsymbol{c}_4 \tag{1.4.14}$$

となることを使うと,

$$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \right) = x\boldsymbol{c}_1 + y\boldsymbol{c}_2 + z\boldsymbol{c}_3 + w\boldsymbol{c}_4 = \begin{bmatrix} x + y + z - w \\ x + z - w \\ 3x + y + 3z - 3w \\ x - y + z - w \end{bmatrix} \tag{1.4.15}$$

となって，f と同じ形になりましたね．後は f と同じように解くとできます.

（核空間）(1.4.15) の右辺をゼロと置いて解いてみると，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.4.16}$$

となる．この右辺の２つのベクトルは独立，かつ核空間を張るから，基底になっている．従って

$$\text{核空間の基底は} \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \text{核空間は} \left\{ s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{核空間の次元は } 2 \tag{1.4.17}$$

である．

（像空間）(1.4.15) の真ん中の式から，像空間は $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4$ で張られているわけなので，この中から一次独立な物をとってくればよい．f の場合と同じようにしてできるが，よく見ると，$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}_3 = -\boldsymbol{c}_4$ になっているので，$\boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4$ はなくても，$\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ で線形結合を作れる．また，$\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ は明らかに一次独立．従って，この２つが像空間の基底であり，

$$\text{像空間の基底は } \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle, \qquad \text{像空間は } \{ s\boldsymbol{c}_1 + t\boldsymbol{c}_2 \,|\, s, t \in \mathbb{R} \}, \qquad \text{像空間の次元は } 2 \tag{1.4.18}$$

と結論できる．

（注）

ここでも，先週やった定理 1.3.6 を思い出すと，$2+2=4$ で，計算はあっている．メデタシメデタシ．このような検算をいつも心がけよう．

1.4.3　h の場合：その１．f の形に直す方法

h についてはいろいろな解法がある．まず，f と同じ形に持っていくやり方を考えてみよう．(先走ると，この方法は h の「標準基底に関する表現行列」を求めることになっている.)

g を f の形に直すのは簡単だった．なぜなら，$g(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{c}_1$ のように，g のカッコの中身（引数）が $\mathbb{R}^4$ の標準基底だったからだ．h の引数は標準基底にはなってないので困る．だから,「$\boldsymbol{e}_i$ を h で写せばどうなるのか？」の答えがわかれば，g でやった場合と同じようにしてできるはず．じゃあ，それをやってみよう．以下，スペース節約のため，h の定義の左辺に出ているベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$，また右辺に出ているベクトルを $\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3, \boldsymbol{d}_4$ とする．こう書くと，h は，

$$h(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{d}_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1.4.19}$$

と書けることになる．

さてさて，我々は $h(\boldsymbol{e}_i)$ を求めたい（$i = 1, 2, 3, 4$）．このためには，$\boldsymbol{e}_i$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の線形結合で書いてみると良い．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ を良く睨むと，

$$\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{e}_4, \quad \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4, \tag{1.4.20}$$

である．従って，

$$h(\boldsymbol{e}_1) = h(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4) = h(\boldsymbol{a}_1) - h(\boldsymbol{a}_3) + h(\boldsymbol{a}_4) = \boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_3 + \boldsymbol{d}_4 \tag{1.4.21}$$

と計算できる．$\boldsymbol{e}_2$ 以下も同様に計算すると，

$$h(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3 - \boldsymbol{d}_4, \quad h(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{d}_3 - \boldsymbol{d}_1, \quad h(\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{d}_3 - \boldsymbol{d}_4 \tag{1.4.22}$$

となった．これで g と同じ形になったので，これから直ちに

$$h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = x(\boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_3 + \boldsymbol{d}_4) + y(-\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3 - \boldsymbol{d}_4) + z(\boldsymbol{d}_3 - \boldsymbol{d}_1) + w(\boldsymbol{d}_3 - \boldsymbol{d}_4) = \begin{bmatrix} x - z + w \\ y - z \\ -x + y - w \end{bmatrix} \tag{1.4.23}$$

が得られる．

これから，核空間は (1.4.23) の右辺をゼロと置いて解くと出る．答えは

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.4.24}$$

（s, t は任意）．この右辺の 2 つのベクトルは一次独立だから，核空間の基底になっている．つまり

$$\text{核空間の基底は} \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \text{核空間は} \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{核空間の次元は } 2 \tag{1.4.25}$$

である．

像空間の方は，(1.4.23) の右辺が

$$\begin{bmatrix} x - z + w \\ y - z \\ -x + y - w \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1.4.26}$$

と書けることに注意する．像空間の基底は右辺の 4 つのベクトルの中から独立なものを引っこ抜けば良い．このうち，最初と最後の物はまったく同じであるし，最初の 2 つを足すと，3 つ目の物（の符号を変えたもの）になる．従って，独立なベクトルは最初と 2 番目のものであり，これが像空間の基底になる．結局，

$$\text{像空間の基底は} \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \text{像空間は} \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \text{像空間の次元は } 2 \tag{1.4.27}$$

と結論できる．

（注）

ここでも，f の解答の後の（注）のように考えれば，像空間の次元は 2 であるはずだから，かなり労力を省くことができる．

1.4.4 h の場合：その 2．直接やる方法（もっとも一般的）

上のやり方は正しいし，h の線形性も存分に使ってはいるが，回りくどい．実はもっと良いやり方があるので，以下で説明する．少しわかりにくいと思うかもしれないが，できるだけ頑張って理解して欲しい．

h と言う写像は，要するに

$$h(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{d}_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1.4.28}$$

という作用をしていた．ここでまず，$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ が $\mathbb{R}^4$ の基底になっていることに注意しておく．(基底になっていることを確かめるには，この 4 つのベクトルが一次独立であることを確かめないといけない．まあ，頑張ってやってください.)

これから像空間と核空間を，ベクトル $\boldsymbol{d}_i$ や $\boldsymbol{a}_i$ を用いて求める事にする.（つまり，f の形に書き直したりはしない.）

（核空間）

$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ が $\mathbb{R}^4$ の基底であるから，核空間のベクトルの任意のベクトルは $x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 + w\boldsymbol{a}_4$ と書けるはずである．そこで，係数 x, y, z, w の関係を求めれば，核空間の任意の元がどのように書けるかがわかり，核空間そのものもわかるはずだ.

さて，$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 + w\boldsymbol{a}_4$ に h を施した結果は，線形性から

$$h(x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 + w\boldsymbol{a}_4) = xh(\boldsymbol{a}_1) + yh(\boldsymbol{a}_2) + zh(\boldsymbol{a}_3) + wh(\boldsymbol{a}_4) = x\boldsymbol{d}_1 + y\boldsymbol{d}_2 + z\boldsymbol{d}_3 + w\boldsymbol{d}_4 \tag{1.4.29}$$

と計算できるので，核空間を求めるには上の右辺がゼロ，つまり

$$\mathbf{0} = x\boldsymbol{d}_1 + y\boldsymbol{d}_2 + z\boldsymbol{d}_3 + w\boldsymbol{d}_4 = \begin{bmatrix} 2x + y + z \\ y - z - w \\ -2x - 2z - w \end{bmatrix} \tag{1.4.30}$$

を解けばよい．掃きだし法で解くと，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1.4.31}$$

（s, t は任意）となる．つまり，核空間の元は

$$x\boldsymbol{a}_1+y\boldsymbol{a}_2+z\boldsymbol{a}_3+w\boldsymbol{a}_4 = (-s-t)\boldsymbol{a}_1+(s+2t)\boldsymbol{a}_2+s\boldsymbol{a}_3+2t\boldsymbol{a}_4 = s(-\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)+t(-\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_4) = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1.4.32}$$

と書けるわけだ．右辺の 2 つのベクトルは独立で，核空間を張っているので，核空間の基底である．つまり，

$$\text{核空間の基底は} \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \text{核空間は} \left\{ s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{核空間の次元は } 2 \tag{1.4.33}$$

となる．これを (1.4.25) と比べると異なっているように見えるが，実は同じ（基底の取り方が違うだけ）だ．と言うのは，

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1.4.34}$$

となるからである．

（像空間）

$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ が $\mathbb{R}^4$ の基底であるから，補題 1.3.5 から，$\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_4$ が像空間を張っているはずであり（$\boldsymbol{d}_i = h(\boldsymbol{a}_i)$ であったことを思い出せ），問題はここから基底をとりだすことだ．そのためにはいつも通り，

$$\mathbf{0} = x\boldsymbol{d}_1 + y\boldsymbol{d}_2 + z\boldsymbol{d}_3 + w\boldsymbol{d}_4 \tag{1.4.35}$$

を解けばよい．でも，この方程式は (1.4.30) で解いてあって，答えは (1.4.31) である．よって，

$$\mathbf{0} = (-s-t)\boldsymbol{d}_1 + (s+2t)\boldsymbol{d}_2 + s\boldsymbol{d}_3 + 2t\boldsymbol{d}_4 = s(-\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{d}_3) + t(-\boldsymbol{d}_1 + 2\boldsymbol{d}_2 + 2\boldsymbol{d}_4) \tag{1.4.36}$$

が任意の s, t について成り立つわけだ．と言うことはそれぞれの係数がゼロ，ということで，すなわち

$$\boldsymbol{d}_3 = \boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_2, \qquad \boldsymbol{d}_4 = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_2 \tag{1.4.37}$$

となっている．従って，像空間を張るには $\boldsymbol{d}_3, \boldsymbol{d}_4$ は不要で，$\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2$ で十分．更に，$\boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2$ は一次独立だ．従って，この 2 つが像空間の基底になっていて，

$$\text{像空間の基底は } \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle, \qquad \text{像空間は } \left\{ s\boldsymbol{b}_1 + t\boldsymbol{b}_2 \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \text{像空間の次元は } 2 \tag{1.4.38}$$

と結論できる．この結果は (1.4.27) と異なるように見えるが，やはり基底の取り方が違うだけで，同じ結果である（各自確かめよ）.

（しつこい注）

ここでも，f の解答の後の（注）のように考えれば，像空間の次元は 2 であるはずだから，かなり労力を省くことができる．

1.4.5 線形写像のイメージ

レポートの「番外問題」に「解き方はわかったけど，何をやっているのかわからない」との感想がいくつか見受けられたので，少しだけ努力してみる．問題は高次元の絵が書けないことなのだが，まあ，2 次元から始めよう．(以下の f, g などはレポート問題とは関係ない.)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が,

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - y \end{bmatrix} \tag{1.4.39}$$

の場合．この場合,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{1.4.40}$$

であって，右辺の 2 つのベクトルの線形結合をとりまくると平面全体を覆うことは明らかだろう．この場合，像空間は $\mathbb{R}^2$，核空間は $\{\boldsymbol{0}\}$.

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が,

$$g : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - y \\ x - y \end{bmatrix} = (x - y) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.4.41}$$

の場合．この場合，どんな (x, y) から出発しても，行き先のベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に比例してしまう．つまり行き先は直線 $y = x$ 上の点だけになってしまうので，像空間は 1 次元.

このとき核空間の元は，$x = y$ ならなんでも良い．つまり，直線 $x = y$ 上の点が核空間になるわけ.

1.5 線形写像の表現行列

> 注意：この節の内容は教科書では p.76 に相当する．しかし，教科書に書いてあるものはあまりに限定されすぎていて，後々で役に立たないと思われる．従って，少しだけ拡げて取り扱う．

前節までで線形写像の「線形性」について，またベクトルを基底を用いて表すことについて，ある程度の練習を積んできた．この節ではこれらを踏まえて，総ての線形写像は，適当に基底をとることにより，行列で書けることを実感していく．

まずは復習から．$m \times n$ 行列 A が与えられたとき，$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 f を，

$$n\text{ 項列ベクトル }\boldsymbol{x}\text{ を }m\text{ 項列ベクトル }A\boldsymbol{x}\text{ に写すもの} \tag{1.5.1}$$

として定義すると，これは線形写像になっていた（各自，確かめよ）．この節でやりたいのはこの逆であり，

$$\text{総ての線形写像は上のような，行列とベクトルのかけ算で書ける} \tag{1.5.2}$$

である．

まず，教科書の定理 8.2 に書いてあることをやろう．

定理 1.5.1 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ がある．このとき，$m \times n$ 行列 A で，

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad (\text{すべての } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ に対して}) \tag{1.5.3}$$

と書けるものがただ一つ存在する（右辺の $A\boldsymbol{x}$ は行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積を表す）．特にその形は

$$A = [f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)] \tag{1.5.4}$$

で与えられる（上の行列は m 項列ベクトル $f(\boldsymbol{e}_i)$ を並べたもの）．

この行列 A を，線形写像 f の（標準基底に関する）表現行列という．

証明：

定理の性質を満たすような行列はどうあるべきかを考え（必要条件），後からこれが確かに定理の性質を満たすことを言おう（十分条件）．$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$，$\mathbb{R}^m$ の標準基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ と書く．

（行列 A の作り方：必要条件から）

A があったとして，その形を絞り込んでみる．総てのベクトルに対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が成り立っていなければならないので，特に，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ （$i = 1, 2, \ldots, n$）に対しても成り立つ必要がある．つまり，

$$A\,\boldsymbol{e}_i = f(\boldsymbol{e}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.5.5}$$

が必要．ところがこの左辺は，行列 A の第 i 列であるので，上の式は A の第 i 列が $f(\boldsymbol{e}_i)$ であることを主張する．つまり，行列 A とは，m 項列ベクトル $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)$ を並べて作った

$$A = [f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)] \tag{1.5.6}$$

である必要がある．

（上の行列 A が線形写像 f を表していること：十分条件）

任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ であることを示せばよい．このために，$\boldsymbol{x}$ を標準基底で展開して

$$\boldsymbol{x} = x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\,\boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.5.7}$$

と書く．すると，f の線形性から

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\,\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) \tag{1.5.8}$$

となる．ところが，この右辺は，(1.5.6) の形の行列に対して $A\boldsymbol{x}$ を計算したものに他ならない（単にベクトルと行列の計算規則の定義から出る）．つまり，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ が証明された．　□

さて，ここからが教科書には載っていないことだ．

上では標準基底に関する表現行列を考えた．しかし，今までにも,「基底の取り方はいっぱいある」ことを強調してきた．標準基底でなく，他の基底を使ったらどうなるのだろうか？

まず少しの記号を．線形空間 X とその基底 $E = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ が与えられたとき，X の任意の元 $\boldsymbol{x}$ をこの基底で展開できる：

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{v}_n \tag{1.5.9}$$

このとき，右辺に出てくる係数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を縦に並べて作った n 項列ベクトルを（この節では）$[\boldsymbol{x}]_E$ と書く．つまり，

$$[\boldsymbol{x}]_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.5.10}$$

ということだ．添え字 E は，係数 x_i が基底の取り方による事を強調するために導入した．この記号の下で，以下の定理が成り立つ：

定理 1.5.2 n 次元の線形空間 X と m 次元の線形空間 Y があり，それぞれの基底を $E = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$, $E' = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m \rangle$ とする．また，線形写像 $f : X \to Y$ が与えられている．このとき，$m \times n$ 行列 A で，

$$[f(\boldsymbol{x})]_{E'} = A[\boldsymbol{x}]_E \qquad \text{（すべての } \boldsymbol{x} \in X \text{ に対して）} \tag{1.5.11}$$

と書けるものがただ一つ存在する．ここで $A[\boldsymbol{x}]_E$ は行列 A とベクトル $[\boldsymbol{x}]_E$ の積を表す．特にその形は

$$A = \Big[[f(\boldsymbol{v}_1)]_{E'}, [f(\boldsymbol{v}_2)]_{E'}, \ldots, [f(\boldsymbol{v}_n)]_{E'} \Big] \tag{1.5.12}$$

で与えられる（上の行列は m 項列ベクトル $[f(\boldsymbol{v}_i)]$ を並べたもの）．

証明：

証明は定理 1.5.1 と同じように進む．まず，A の形を定めよう．すべての $\boldsymbol{x}$ に対して $[f(\boldsymbol{x})]_{E'} = A[\boldsymbol{x}]_E$ であるべきだから，特に，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_i$ （$i = 1, 2, \ldots, n$）に対しても成り立つべきだ．$[\boldsymbol{v}_i]_E$ は第 i 成分のみ 1，他は全部ゼロだから，$A[\boldsymbol{x}]_E$ は行列 A の第 i 列になっている．これが $[f(\boldsymbol{v}_i)]_{E'}$ に等しくなければならない．これで，A が (1.5.12) の形であるべし，とわかった．

つぎに，このようにとった A が実際に (1.5.11) を満たすことを示そう．任意の $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{v}_n \tag{1.5.13}$$

と展開すると，f の線形性から

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{v}_n) = x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) \tag{1.5.14}$$

となる．ここで両辺を Y の基底 $E' = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m \rangle$ で展開して m 項列ベクトルを作ると，

$$[f(\boldsymbol{x})]_{E'} = [x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \ldots + x_n f(\boldsymbol{v}_n)]_{E'} = x_1[f(\boldsymbol{v}_1)]_{E'} + x_2[f(\boldsymbol{v}_2)]_{E'} + \ldots + x_n[f(\boldsymbol{v}_n)]_{E'} \tag{1.5.15}$$

となる．ところが (1.5.12) の A の作り方を考えに入れると，この右辺は $A[\boldsymbol{x}]_E$ に他ならない（各自確かめよ）． □

例：

先週のレポート問題を例にとる．

f の定義を

$$\begin{bmatrix} x+2y+3z+w \\ x+3y-z+5w \\ y-4z+4w \\ x+4y-5z+9w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \tag{1.5.16}$$

と書いた場合，右辺の行列が，f の標準基底に関する表現行列に他ならない．

g の場合，f の形に直して (1.4.15) の右辺を得た．これを

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \tag{1.5.17}$$

と書いた場合，この 4×4 行列が，g の標準基底に関する表現行列である．

h の場合はどうだろう．(1.4.23) の右辺を上のように行列とベクトルの積に書いた場合に出る行列が，h の標準基底に関する表現行列である．では，(1.4.30) の右辺を同じように書いた場合の行列は何なのか？これは $X = \mathbb{R}^4$ の基底として $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ を，また $Y = \mathbb{R}^3$ の基底としては標準基底をとった場合の表現表列になっている．

１１月１７日：中間テストは１２月８日（月），この時間にこの教室で，行います．範囲は「線形写像」ですが，当然,「線形空間と部分空間，基底と次元」など，前期でやったことは使いまくります．
今週の小林先生の演習（11/19 の水曜日，B,C クラス）は休講となります．

第３回レポート問題：線形写像の像と核を求め，また表現行列を求める問題です．毎度のことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問３： 線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ が以下を満たすという．

$$f:\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-5\\0\\7\end{bmatrix},\qquad f:\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-1\\-3\\5\end{bmatrix},\qquad f:\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}5\\-1\\-5\end{bmatrix}$$

このとき，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ に対して f を３回施した結果［つまり，$f(f(f(\boldsymbol{x})))$］を求めたい．以下の２通りの方法でやってみよう．

（あ）f の標準基底に関する表現行列を求めてから表現行列を３回かけることで求める方法．

（い）以下のように，計算する方法．この方法は，後半にやる「固有値と固有ベクトル」への導入を意図している．同時に，線形空間や基底の復習も兼ねている．この方法なら，f を 10000 回施すことも可能だぞ．
まず，ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ を以下のように定義しておく：

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

この３つのベクトルは今は天下りに与えているが，この求め方を中間テスト後に学ぶ．

(1) $\boldsymbol{a}_i$ （$i=1,2,3$）に f を１回施した結果はどうなっているか？
(2) $\boldsymbol{a}_i$ （$i=1,2,3$）に f を３回施した結果はどうなっているか？
(3) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せ．
(4) 以上の２つを組み合わせて，$f(f(f(\boldsymbol{x})))$ を求めよ．(ヒント：線形性を用いると，$f(f(f(\boldsymbol{x})))$ は $f(f(f(\boldsymbol{a}_i)))$ の線形結合で書ける…)
(おまけ) 基底 $\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\rangle$ に関する f の表現行列をもとめよ．

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

11 月 28 日（金）午後５時半までに，原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前の封筒に

入れてください．(もう書かないけど，いつもの注意は守ってね.)

——————————————-先週のレポートの解答 ——————————————

問題に出ているベクトルを左から $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i$ （$i=1,2,3,4$）と書くと，$f(\boldsymbol{a}_i)=\boldsymbol{b}_i$ （$i=1,2,3,4$）となる．また，$\mathbb{R}^4$ の標準基底は $\boldsymbol{e}_i$（$i=1,2,3,4$）と書く．

表現行列を求めるには，$f(\boldsymbol{e}_i)$ （$i=1,2,3,4$）を求めればよい（$\boldsymbol{e}_i$ は標準基底）．そこで，問題にあるベクトルの線形結合で標準基底をつくると，

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3),\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_3),\quad \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_4),\quad \boldsymbol{e}_4=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_4) \tag{1.5.18}$$

となるので，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = f\Big(\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3)\Big) = \frac{1}{2}f(\boldsymbol{a}_1) + \frac{1}{2}f(\boldsymbol{a}_2) \tag{1.5.19}$$

と計算できる．他も同様に，計算して具体的に書くと，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{e}_4) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{表現行列は } \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.5.20}$$

となる．ここで $\frac{1}{2}$ を忘れた人がいたので注意！

この後は，先週に配ったプリントのようにやればよい．答えだけ書くと，

$$\text{核空間の基底は } \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \text{核空間は } \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \text{核空間の次元は } 1 \tag{1.5.21}$$

$$\text{像空間の基底は } \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle, \qquad \text{像空間は } \{ s\boldsymbol{b}_1 + t\boldsymbol{b}_2 + u\boldsymbol{b}_3 \mid s, t, u \in \mathbb{R} \}, \qquad \text{像空間の次元は } 3 \tag{1.5.22}$$

核空間，像空間の基底の取り方は幾通りもあることは（しつこいけど）注意しておこう．

——————————————————-以下，レジュメの続き ——————————————————

先週は線形写像が（適当に基底をとると）行列で書けることを見た．他の話題に進む前に，２つほどの補足．

（１）線形写像 $f : X \to Y$ と X, Y の基底 $\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle$，$\langle \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m \rangle$ が与えれたとき，これらの基底に関する f の表現行列 A は，

$$f(\boldsymbol{x}_j) = \sum_{i=1}^{m} (A)_{ij} \boldsymbol{y}_i, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.5.23}$$

を満たす.（これは先週の定義を書き換えただけだが，$(A)_{ij}$ を求めるには便利.）

（２）線形写像の表現行列は，基底を決めないと決まらない．では，異なる基底を用いた表現行列の間にはどんな関係があるのだろうか？答えは「基底の変換の行列」を用いて与えられるのだが，概念はともかく，式の上ではややこしいので，ここではあまり深入りしないことにする．後半に「行列の対角化」をするところでまた出てくるだろう.

（３）下の定理は，春学期にやった「行列の階数」に線形写像の観点からの見方を付け加えるものである.（行列の階数とは，その行列に含まれる一次独立な縦ベクトルの最大数，だったね.）

定理 1.5.3 (教科書の p.79 の下半分) n 次元の線形空間 X と m 次元の線形空間 Y があり，それぞれの基底を $E = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle$, $E' = \langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_m \rangle$ とする．線形写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき，上の基底に関する線形写像の表現行列を A と書く．このとき，f の像空間の次元は A の階数（rank）に等しい.

証明：

補題 1.3.5 から，f の像空間は $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_n)$ で張られることがわかる．像空間の次元とは，このベクトルの中で最大何個が独立か，を表す数である．以下の記述を簡単にするために，$M = \dim(\mathrm{Im} f)$ と書く．また $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_n)$ の中には丁度 M 個の独立なベクトルがあるはずだから，それらが丁度端から M 個，つまり $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_M)$ が一次独立であるとしよう.（もしそうでない場合は，$\boldsymbol{x}_j$ の添え字を付け替えれば以下の証明は成り立つ）.

表現行列の定義から，$f(\boldsymbol{x}_j)$ を Y の基底 E' で展開した係数が A の第 j 列である．すなわち，

$$f(\boldsymbol{x}_j) = \sum_{i=1}^{m} (A)_{ij} \boldsymbol{y}_i. \tag{1.5.24}$$

以下,「A の各列を並べてできる n 個の縦ベクトルからは $\dim(\mathrm{Im}f)$ 個の一次独立なベクトルが取れるが，それより多くは取れない」事を示そう.

基本になるのは以下の事実（タダの式変形）である： k_j を勝手なスカラー，ℓ を n 以下の正の整数として

$$\sum_{j=1}^{\ell} k_j\, f(\boldsymbol{x}_j) = \sum_{j=1}^{\ell} k_j \sum_{i=1}^{m} (A)_{ij} \boldsymbol{y}_i = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{y}_i \Bigl[\sum_{j=1}^{\ell} k_j\, (A)_{ij}\Bigr] \tag{1.5.25}$$

がなりたつ.

では証明に入る．まず，$f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_n)$ から勝手に ℓ 個（ただし $\ell > M$）のものをとってみよう：$f(\boldsymbol{x}_{p_1}), f(\boldsymbol{x}_{p_2}), \ldots, f(\boldsymbol{x}_{p_n})$．これらは一次従属のはず．なのですべてはゼロでない k_j があって

$$\sum_{j=1}^{\ell} k_j\, f(\boldsymbol{x}_{p_j}) = \mathbf{0} \tag{1.5.26}$$

を満たすはずだ．ここで (1.5.25) を思い出し，かつ $\boldsymbol{y}_i$ が Y の基底であることを使うと，$\boldsymbol{y}_i$ の係数はすべて 0 である：

$$\sum_{j=1}^{\ell} k_j\, (A)_{i\,p_j} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.5.27}$$

これはつまり，上の式を満たすような，すべてはゼロでない k_j が存在することを主張する．つまり，このようにとった縦ベクトル $A_{\cdot\, p_1}$，$A_{\cdot\, p_2}$，…，$A_{\cdot\, p_\ell}$ は一次従属である．すなわち，M より多くの行列 A の縦ベクトルは一次従属だ.

次に，$A_{\cdot\, 1}$，$A_{\cdot\, 2}$，…，$A_{\cdot\, M}$ は一次独立であることを示す．そのためには

$$\sum_{j=1}^{M} k_j\, (A)_{ij} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.5.28}$$

の解が $k_j = 0$ に限られることを示せばよい．これは，(1.5.25) から

$$\sum_{j=1}^{M} k_j\, f(\boldsymbol{x}_j) = \mathbf{0} \tag{1.5.29}$$

を意味する．でもこれは $f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_M)$ が一次独立ゆえ，$k_j = 0$ の解しか持たない．つまり，$A_{\cdot\, 1}$，$A_{\cdot\, 2}$，…，$A_{\cdot\, M}$ は一次独立である. □

1.6 線形写像の合成と逆

線形写像の合成と逆を考えよう.

定義 1.6.1 (線形写像の合成) 線形空間 X, Y, Z があり，線形写像 $f: X \to Y$ および $g: Y \to Z$ が与えられているとき，f と g の合成写像 $g \circ f$ （順序に注意！）を

$$g \circ f:\ x \mapsto g(f(x)) \tag{1.6.1}$$

として定義する．要するに，x を f で送ってから g で送る，この 2 段階をまとめて $g \circ f$ と書くのだ.

上のは単なる定義だが，これで漸く，行列のかけ算の定義が動機付けされる．すなわち：

定理 1.6.2 (合成写像の表現行列) 定義 1.6.1 の状況で，X, Y, Z の基底をそれぞれ E, E', E'' とし，f の基底 E, E' に関する表現行列を A，g の基底 E', E'' に関する表現行列を B とすると，基底 E, E'' に関する $g \circ f$ の表現行列は BA となる.

証明：

行列のかけ算の定義が，モロにこうなるように作ってあるのだ．各自チェックすること． □

次に線形写像の逆を考える．

定義 1.6.3 (線形写像の逆) 線形空間 X, Y と線形写像 $f : X \to Y$ が与えられていて，f は全単射であるとする．このとき，f の逆写像 f^{-1} を

$$f^{-1} : \ f(x) \mapsto x \tag{1.6.2}$$

として定義する．

f^{-1} は $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} =$ 恒等写像 となるような写像のことである（恒等写像とは $\boldsymbol{x}$ をそれ自身に写す写像のこと）．つまり，f で送ったものを逆に送り返してくるのが f^{-1}．

定理 1.6.4 (逆写像の表現行列) 定義 1.6.3 の状況で，
(1) f^{-1} は $Y \to X$ の線形写像になる．
(2) X, Y の基底をそれぞれ E, E' とし，f の基底 E, E' に関する表現行列を A とすると，基底 E', E に関する f^{-1} の表現行列は A^{-1} （A の逆行列）となる．

証明：
f^{-1} が線形写像になることは定義通り確かめるとわかる（教科書の p.78 の上半分）
f^{-1} の表現行列を B とすると，定理 1.6.2 により，$f^{-1} \circ f$ の表現行列は BA になる．これが恒等写像であるから，$BA = 1$ でないといけない．春学期にやったこと（証明は少し誤魔化した）ことから，これは行列 B と A が逆行列の関係にあることを示している． □

以上の定理は，いままで闇雲にやってきた行列演算に意味を与えるものとして，非常に重要である．

逆写像に関連して，以下の事実にも注意しておく．

定理 1.6.5 (写像が単射である条件) 線形写像 $f : X \to Y$ が単射である必要十分条件は $\mathrm{Ker}f = \{\mathbf{0}\}$ である．

証明の概要：
線形性から $f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$ であることに注意．
（必要条件）f が単射であれば，$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ を満たす $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ に限られる.（両辺を引き算して）$f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ なるベクトル $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ はゼロベクトルに限られるのだ． つまり， $\mathrm{Ker}f = \{\mathbf{0}\}$．
（十分条件）$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$ であれば，$\mathrm{Ker}f = \{\mathbf{0}\}$ から，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が保証される．つまり，単射． □

定理 1.6.6 (逆写像が存在するのは？) 線形写像 $f : X \to Y$ の逆写像が存在する条件，つまり f が全単射である条件は，$\dim(X) = \dim(Y)$ かつ，$\mathrm{Ker}f = \{\mathbf{0}\}$ であること．

証明の概要：
$\mathrm{Ker}f = \{\mathbf{0}\}$ が単射と同値であることは上で見た．
全射であれば $\mathrm{Im}f = Y$ であるから，$\dim(\mathrm{Im}f) = \dim(Y)$ である．$\dim(\mathrm{Ker}f) = 0$ であるので，定理 1.3.6 から $\dim(X) = \dim(\mathrm{Im}f) + \dim(\mathrm{Ker}f) = \dim(Y)$．
逆に，$\dim(X) = \dim(Y)$ かつ，$\mathrm{Ker}f = \{\mathbf{0}\}$ であれば，定理 1.3.6 から $\dim(\mathrm{Im}f) = \dim(Y)$ となって，全射である． □

１２月１日：また風邪になってしまったよ〜〜〜
１．中間テストは１２月８日（月），この時間にこの教室で，行います．範囲は「線形写像」ですが，当然，「線形空間と部分空間，基底と次元」など，前期でやったことは使いまくります．
２．今回も，以下の条件で持ち込みを認めます．
持ち込めるものは A4 の紙一枚の片側だけに自分で書いた物のみ（ただし，予想問題の解答を丸写ししたようなものは減点の対象になるかも）．ワープロの出力でも構わないが，友達の持ち込み用紙のコピーは厳禁．この持ち込み用紙はテストの答案と一緒に提出してもらう．(持ち込み用紙を使わない人は「持ち込み無し」と答案用紙に明記すること．) なお，持ち込みを認める主な目的は，「各自が持ち込み用紙をまとめることによって勉強する」ことにある．実際のところ，問題を解く上では持ち込んでも持ち込まなくても差はないだろう．
３．特別なセミナーに原が出席するために，今週金曜のオフィスアワーはお休みです．替わりに今週木曜の午後５時半頃なら，質問を受けることはできます（僕のオフィスにて）．

——————————————-先週のレポートの解答 ——————————————

記号を簡単にするため，問題に出ているベクトルを左から $\boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{d}_i$（$i = 1, 2, 3$）と書くと，問題の条件は $f(\boldsymbol{c}_i) = \boldsymbol{d}_i$（$i = 1, 2, 3$）となる．また，$\mathbb{R}^3$ の標準基底は $\boldsymbol{e}_i$（$i = 1, 2, 3$）と書く．

（あ）のやり方．$\mathbb{R}^3$ の標準基底が，f でどのように変換されるかを考える．

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_3 \qquad \Longrightarrow \qquad f(\boldsymbol{e}_1) = f(\boldsymbol{c}_1) + f(\boldsymbol{c}_3) = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_3. \tag{1.6.3}$$

同じように $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の行き先も計算すると，

$$\boldsymbol{e}_1 \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 \mapsto \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 \mapsto \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{1.6.4}$$

となる．従って，f の表現行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \equiv A \tag{1.6.5}$$

だ（以下の説明のために，この行列を A と書いた）．従って，

$$f(f(f(\boldsymbol{x}))) = A^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -89 \\ -13 \\ 105 \end{bmatrix} \tag{1.6.6}$$

（い）のやり方．

(1) $f(\boldsymbol{a}_i)$ は，上で求めた表現行列 A を $\boldsymbol{a}_i$ にかけて計算できる．また，$\boldsymbol{a}_i$ を $\boldsymbol{c}_i$ の線形結合として表して計算することも可能だ．例えば，

$$\boldsymbol{a}_1 = 2\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{c}_2 + 2\boldsymbol{c}_3 \quad \Longrightarrow \quad f(\boldsymbol{a}_1) = 2f(\boldsymbol{c}_1) - f(\boldsymbol{c}_2) + 2f(\boldsymbol{c}_3) = 2\boldsymbol{d}_1 - \boldsymbol{d}_2 + 2\boldsymbol{d}_3 \tag{1.6.7}$$

などと計算する．答えは

$$f(\boldsymbol{a}_i) = i\,\boldsymbol{a}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.6.8}$$

となっている．

(2) f の線形性から，$f(f(\boldsymbol{a}_i)) = f(i\boldsymbol{a}_i) = i\,f(\boldsymbol{a}_i) = i\,i\,\boldsymbol{a}_i = i^2\,\boldsymbol{a}_i$ だ．同様にして，

$$f(f(f(\boldsymbol{a}_i))) = i^3\,\boldsymbol{a}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.6.9}$$

がわかる．

(3) 単純に $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3$ を解けばよい．答えは

$$\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-4\boldsymbol{a}_3. \tag{1.6.10}$$

(4) f の線形性から，$f\circ f$ や $f\circ f\circ f$ も線形だ（各自，確かめよ）．従って，

$$f(f(f(\boldsymbol{x})))=f(f(f(3\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-4\boldsymbol{a}_3)))=3\,f(f(f(\boldsymbol{a}_1)))+2\,f(f(f(\boldsymbol{a}_2)))-4\,f(f(f(\boldsymbol{a}_3)))=3\,\boldsymbol{a}_1+2\times2^3\boldsymbol{a}_2-4\times3^3\boldsymbol{a}_3$$

となる．右辺の線形結合を計算すると,（あ）で求めた結果に一致する．

（おまけ）ここで要求したのは，$\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ の両方ともで基底 $\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\rangle$ を用いてくれ，ということだったが，これがわかりにくかったようだ．$f(\boldsymbol{a}_i)=i\,\boldsymbol{a}_i$ であるから，(1.5.23) を思い出すと，表現行列は

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix} \tag{1.6.11}$$

となる．基底 $\langle\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\rangle$ での表現行列は対角形になって非常に簡単だが，これはそうなるように，うまく $\boldsymbol{a}_i$ を選んだからなのだ．これからは，どのようにしたらそんな $\boldsymbol{a}_i$ を選べるのか，また，選んだらどんなに良いことがあるのか，を見ていく．

——————————以下，レジュメの続き ——————————

（おまけ：線形写像の使い道）線形写像がどのように使われるか，特に，線形写像を何回もやる必要が出るのはどんな場合か，の例を挙げておく．

ある島にネズミとトンビがいて，その数の推移を年ごとに追いたいとする．ある年のネズミの数を x，トンビの数を y とし，翌年の数をそれぞれ x',y' で書くと，第ゼロ近似としては

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax+by\\cx+dy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \tag{1.6.12}$$

のように書けるだろう．ここで

- $a>1$ はネズミしかいないときにネズミが増える様子,
- $0<d<1$ はトンビしかいないときにトンビが増える（実際は餌がないので減る）様子,
- $b<0$ はトンビに食われてネズミが減る様子,
- $c>0$ はネズミを食べてトンビが増える様子

を表している．

問題：このまま放っておいたら（ネズミの餌は無限にあるとして），何万年後にはどのくらいの数のネズミやトンビがいるだろうか？

これは上の線形写像を何万回もやれ，と言う問題なのだが，a,b,c,d の値によって，様々なふるまいをすることがわかる．そのような解析の武器になるのがこれからやる「固有値と固有ベクトル」なのだ．

以上は，非常に簡単化した，ウソの話しだ．特にウソなのは，ネズミの餌が無限にあるとしているところだ．島の植物の量は有限だから，ネズミはある数以上は増えられないので，実際には写像は非線形になる．しかし，その場合でも線形写像で近似した考察は，ある程度役に立つ — 実際には非線形写像の「固定点」のまわりで線形化するのだが，それはこの講義の程度を越えている．

2 固有値と固有ベクトル

前節までで，線形写像について見た．特に「線形性」について学び，また，線形写像は（基底を定めることで）行列でかけることも見た．更に，線形写像を何回もやることは行列を何回もかけること，線形写像の逆写像は逆行列で表されること，も見た．

ところが，レポート問題 [3]（あ）にあったように，ある線形写像を何回もやった結果を求めるのは，一般に大変だ（表現行列をそれだけの回数，かける必要がある）．実際，ある線形写像を「無限回」やった結果を知りたいことは多いが,（あ）のように表現行列をかけていく方法では，これはほとんど不可能だ．

ところが，レポート問題 [3]（い）では線形写像 f と特別な関係にあるベクトル a_i（$i = 1, 2, 3$）を天下りに与え，これを基にして計算をした．$f(\boldsymbol{a}_i) = i\,\boldsymbol{a}_i$ だったから，$\boldsymbol{a}_i$ に対しては，f を何回やった結果もすぐにわかる．また,（おまけ）のように，この $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ に関する表現行列は対角形になったが，対角行列なら何回でも簡単にかけられる．

このようにベクトル $\boldsymbol{a}_i$ の効果は絶大だったが，レポート問題 [3]（い）の不満は，このような $\boldsymbol{a}_i$ をどのようにして求めるかがわからないことである．

そこで，この節では，レポート問題 [3]（い）の $\boldsymbol{a}_i$ をどのように求めるか，そもそも $\boldsymbol{a}_i$ の様なベクトルは存在するのか，それを見ていこう．

> お断り：いままで，皆さんが複素数に慣れていないだろう事を考えて，スカラーは実数だとしてきた．また，ベクトルもその成分は実数だとしてきた．しかし，固有値や固有ベクトルを考える場合には，これらを複素数まで拡げておく方が見通しが良い．従って，以下で特に断らない限りは,「スカラーは複素数」「数ベクトルの成分も複素数」を許すものとする．

2.1 固有値と固有ベクトル

まず，前回のレポート問題（い）のベクトル $\boldsymbol{a}_i$ などに名前をつけておこう．まず行列から．

> **定義 2.1.1 (行列の固有値と固有ベクトル)** $n \times n$ 正方行列 A に対して，
>
> $$A\boldsymbol{v} = \alpha\,\boldsymbol{v} \tag{2.1.1}$$
>
> となるような複素数 α とゼロベクトルでない n 項列ベクトル $\boldsymbol{v}$ とがある場合（$A\boldsymbol{v}$ は行列とベクトルのかけ算を表す），α を A の固有値，$\boldsymbol{v}$ を A の（α に対する）固有ベクトルと言う．

（注意）

- $\boldsymbol{v}$ がゼロベクトルでないのは非常に重要である．と言うのは，任意のスカラー α に対して，$A\mathbf{0} = \alpha\mathbf{0}$ となってしまうが，これは全然面白くないからだ．
- $\boldsymbol{v}$ が固有ベクトルなら，$k\boldsymbol{v}$ も固有ベクトルだ（ただし $k \neq 0$）．この意味で，固有ベクトルは最低限，定数倍だけの無限個の自由度がある．ただし，この自由度はショウモナイものだから，普通は気にしない（「固有ベクトルを求めよ」と言われても，k の自由度まで答える必要はない．

上の定義を線形写像に拡大しておく．

> **定義 2.1.2 (行列の固有値と固有ベクトル)** 線形空間 X と線形写像 $f : X \to X$ が与えられているとき，
>
> $$f(\boldsymbol{v}) = \alpha\,\boldsymbol{v} \tag{2.1.2}$$
>
> となるような複素数 α とゼロベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v} \in X$ とがある場合，α を f の固有値，$\boldsymbol{v}$ を A の（α に対する）固有ベクトルと言う．

この定義に従うと，レポート問題 [3]（い）の $\boldsymbol{a}_i$ は，線形写像 f の固有値 i に対する固有ベクトル，と言える．

固有ベクトルの効用は後で集中的にやる（レポート問題 [3]（い）でも少し見た）．まずは，どのように固有値や固有ベクトルを求めたらよいかに集中しよう．

（まず注意）前節までで,「線形写像はその表現行列を用いて書ける」ことを見た．これによると，線形写像の固有ベクトルを求めるには，まず，その表現行列の固有ベクトルを求め，それを焼き直せば良い．

すなわち，$f : X \to X$ があるとき，X の基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ に関する f の表現行列を A とし，A の固有ベクトルの一つが $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ だとする（$A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$）．この場合，$\boldsymbol{w} = v_1\boldsymbol{x}_1 + v_2\boldsymbol{x}_2 + v_3\boldsymbol{x}_3 + \ldots + v_n\boldsymbol{x}_n$ が f の固有ベクトルになっている（各自，確かめてみよう）．

従って，以下では行列の固有ベクトルだけを扱うが，上の手順により線形写像の固有ベクトルも扱えることに注意．

そこで，定義 2.1.1 に戻る．固有ベクトルの定義の式は

$$(A - \alpha\, I_n)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{2.1.3}$$

と書ける（I_n は $n \times n$ 単位行列）．これは n 連立方程式だが，今はこの方程式のゼロでない解を求めたい（そうなるような α を見つけたい）わけだ．ゼロでない解が存在するための条件は春学期にやった．すなわち，

行列 $A - \alpha\, I_n$ が正則行列なら，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ しかない．
行列 $A - \alpha\, I_n$ が正則でないなら，$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ な解が存在する

訳だ．つまり，固有値 α の満たすべき必要十分条件は,「行列 $A - \alpha\, I_n$ が正則でないこと」なのである．

さらに，春学期には「行列 A が正則でないことと，$\det A = 0$ は同値である」ことも習った．そこで，上の固有値の条件は以下のように書き換えられる：

定理 2.1.3 (固有値の必要十分条件) 複素数 α が，$n \times n$ 行列 A の固有値になっているための必要十分条件は

$$\det(A - \alpha\, I_n) = 0 \tag{2.1.4}$$

であること．

これで固有値 α をすべて見つけることができる．α さえ求めれば，あとは (2.1.3) を解けば，$\boldsymbol{v}$ も見つけられる．これで固有値と固有ベクトルを求めるプログラムが完成した．しつこくまとめると：

(2.1.4) を解いて，固有値 α を求める（一つとは限らない）
それぞれの α に対して (2.1.3) を解いて，$\boldsymbol{v}$ を求める（これも一つとは限らない）

と言うわけだ．計算手順としては簡単でしょ？

（注意）固有値を一つ見つけたとき，それに対する固有ベクトルは何通りもあり得る（ここでは定数倍の自由度以外の「何通りも」を言っている）．例えば，$A = I_n$ （単位行列）の場合，固有値は 1 しかないが，固有ベクトルは $\boldsymbol{e}_i$ （$i = 1, 2, \ldots, n$，標準基底）の n 個ある．この自由度についてはすぐ後で「固有空間」としてもっと学習する．

（用語の定義）変数 t の多項式としてみた $\Delta_A(t) = \det(tI_n - A)$ を行列 A の固有多項式という．また，固有値を求めるときに解くべき方程式 $\Delta_A(t) = 0$ を行列 A の固有方程式という

１２月１５日：風邪はいよいよひどく，治る兆しすらない...
１．というわけで，中間テストはまだまだ採点中です．来週には返却したいと思ってはいますが，保証はできません．
２．中間テストでいままでに気がついたこと：問１や問２は予想通りでしたが，問３で一つの例しか与えていない人がたくさんいたのは意外です．このような問題では「考えられるすべての可能性」を答えるのは常識だと思っていたのだが（だから，念のために「答えは一意とは限らない」と注意もしたのだが）．
３．１月７日（水）の４限に補講を行います．この日を希望しない人もいることはわかっていましたが，これ以外に良い日が見つからないので，ご勘弁を．

第４回レポート問題：行列の固有値と固有空間を求める問題です．毎度のことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問４： 以下の行列の固有値と，対応する固有空間をすべて求めよ．固有空間を求める場合には，その固有空間の基底を一つ挙げれば良い．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 4 & -9 & 8 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

番外問題：
１．これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．
２．今学期の「数学展望」の受講者が前学期より大幅に減ったそうです．その理由が何か，思い当たることがあれば差し支えのない範囲で書いて頂けると有り難いです.（「差し支えのある」理由なら，もちろん，書かなくても結構です.）

レポート提出について：

上の問に解答し，

12 月 19 日（金）午後５時半までに，原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前の封筒に

入れてください.（もう書かないけど，いつもの注意は守ってね.）

——————————————-以下，レジュメの続き ——————————————

中間テスト前に「固有値と固有ベクトル」の定義，および，求め方を簡単に説明しました．きょうは簡単な例，および,「固有空間」について学びます．

（復習）$n \times n$ 行列 A の固有値と固有ベクトルの求め方：

1. $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ なる $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ があると言うことは，行列 $A - \alpha I_n$ が逆を持たないと言うこと．
2. これは $\det(A - \alpha I_n) = 0$ と同値．つまり，固有値 α は $\det(A - \alpha I_n) = 0$ の解．
3. α がもとまったら，それぞれの固有値 α に対して $(A - \alpha I_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解けば，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ が求まる．

（ここでいくつかの例）

2.2 固有空間

α が $n \times n$ 行列 A の固有値であるとき，α に対する A の固有ベクトルに 2 本以上，独立なものが存在する場合もある．このような場合をうまく扱うため，

α に対する A の固有ベクトルの全体とゼロベクトル，つまり $A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$ なるベクトル $\boldsymbol{v}$ の全体

を W_α と書くことにする．

定理 2.2.1 (固有空間) うえで定義した W_α は，$\mathbb{R}^n$ の部分空間である．さらに，W_α の元に行列 A をかけた結果も W_α の元になっている．

上の定理の前半の性質から，W_α を「A の，固有値 α に対する<u>固有空間</u>」と言う．また，定理の後半の性質（A をかけても部分空間に入ったまま）を「W_α は A の<u>不変部分空間</u>である」と言う．

固有空間が不変部分空間になっていること，が以下で見る「行列の対角化」に本質的な役割を果たす．

１２月２２日：今度は発熱する胃腸風邪になってしまった,,,
１．というわけで，中間テストはまだまだ採点中です．年明けには返却したいですが....
２．1月7日（水）の４限に補講を行います．この日を希望しない人もいることはわかっていましたが，これ以外に良い日が見つからないので，ご勘弁を．

第５回レポート問題：行列の対角化の問題です.

問５： 以下の行列 A_1, A_2 のうち，対角化できるものは対角化せよ（$P^{-1}AP = B$ なる対角行列 B と行列 P を求めよ）．対角化できないものは固有値と固有空間を求めよ.（A_3, A_4 は各自でやるためのおまけ問題.）

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 12 & -13 & -1 \\ 2 & 17 & -17 & -1 \\ 2 & 20 & -20 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ -7 & -12 & -1 & 3 \\ 5 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 3 & 7 & -12 \\ 3 & 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 3 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

番外問題：
これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ.

レポート提出について：

上の問に解答し，

2004 年月 1 月 7 日（水）の補講時に

提出してください.（もう書かないけど，いつもの注意は守ってね.）

———————————先週のレポートの解答 ———————————

ともかく手順に従って計算するのみ，です.

A の場合. 固有値を α とすると，α は $\det(\alpha I_3 - A) = 0$ の解. 行列式を計算すると，これは $(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2) = 0$ となる．つまり，$\alpha = 1, 3, -2$ であるので，以下，このそれぞれについて固有空間（固有ベクトル）を求めていく.

- 固有値 1 に対する固有空間

$$(A - \alpha I_3)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 4 & -10 & 8 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{を解くと，答えは} \quad W_1 = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{C} \right\} \tag{2.2.1}$$

とわかる.

- 固有値 $-2, 3$ に対する固有空間：同様に，他の固有値の場合も計算すると

$$W_{-1} = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{C} \right\}, \qquad W_3 = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{C} \right\} \tag{2.2.2}$$

B の場合，固有値は 1, 5 であり，固有空間は

$$W_1 = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{C} \right\}, \qquad W_5 = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{C} \right\} \tag{2.2.3}$$

C の場合，固有値は 1 のみで，固有空間は

$$W_1 = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{C} \right\} \tag{2.2.4}$$

———————————以下，レジュメの続き ———————————

2.3 行列の対角化（まずは計算操作として）

前回までで，行列の固有値と固有ベクトルに関する基本的な事柄を学び，それらを計算できるようになった（はずである）．ここではその続きとして，行列の対角化を取り扱う．大して難しい概念ではないが，取っつきやすさを考えて２段階で行う．まずは，以下の単純な計算問題を考えよう．

> **質問１：** $n \times n$ 行列 A が与えられたとき，正則な $n \times n$ 行列 P を探してきて，
>
> $$B = P^{-1}AP \quad \text{が対角行列に} \tag{2.3.1}$$
>
> なるようにせよ.（A に対してこのような P, B を求めることを「A を対角化する」と言う.）

すぐ後で見るように，このような行列 P が存在しない場合もあるので，上の問いはあくまで「可能ならばそのような P を求めよ」と解釈すべきものだ．この問いの背後には「線形写像の表現行列が，基底の変換に際してどう振る舞うか」が隠れているが，それは後で考える事にし，まずは計算問題として上の問いを扱おう．

上の問いの動機付け：

計算問題としてこのような問いが出るのは，A^{100} などを計算したい場合である．もし，A が 10×10 の行列で，成分にゼロのものがないとすると，A^2 を計算するだけで大変だ．ましてや，A^{100} などはほとんど不可能.

ところが，上のような P, B があれば，A^{100} も簡単に計算できる．つまり，$A = PBP^{-1}$ であるから，

$$A^2 = (PBP^{-1})\,(PBP^{-1}) = PB^2P^{-1}, \quad A^3 = (PB^2P^{-1})\,(PBP^{-1}) = PB^3P^{-1}, \quad A^\ell = PB^\ell P^{-1} \tag{2.3.2}$$

が成り立つ（ℓ は正の整数）．ここで B が対角行列なら，B^ℓ も対角行列で，すぐに計算できる．つまり

$$(B)_{ij} = b_i\,\delta_{ij} \quad \text{なら，} \quad (B^\ell)_{ij} = (b_i)^\ell\,\delta_{ij} \tag{2.3.3}$$

なのだ（対角成分がそれぞれ ℓ 乗されるだけ）．だから，(2.3.2) の計算も，対角行列である B^ℓ の両側から P と P^{-1} をかければよいので，何乗であっても計算できる.

と言うわけで，A^{100} を計算したいような場合，問い１の P, B が見つかるか否かでは大変な違いになるわけだ.

P, B の見つけ方

さて，与えられた A に対して，どのようにして P, B を見つけたらよいか，考えよう．天下りだが答えを言ってしまうと，以下のようになる.

> **定理 2.3.1（対角化その１）** 与えられた $n \times n$ 行列 A が対角化できる必要十分条件は，A が 丁度 n 本 の一次独立な固有ベクトルを持つことである．このとき，A の独立な固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とすると（対応する固有値は $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$），(2.3.1) の行列 P, B は以下のようになる：
>
> $$P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n), \qquad B \text{ は対角成分が } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ である対角行列} \tag{2.3.4}$$

（各自チェック）先週のレポート問題にこの定理を当てはめ，A, B は対角化可能だが，C はダメなことを納得せよ.（A, B については P を具体的に作って，$P^{-1}AP$ などを計算してみること.）

証明：

十分条件（n 本の独立な固有ベクトルを持つならば対角化可能）は単なる計算だから，ここから始める.

$$A\,\boldsymbol{v}_j = \alpha_j\,\boldsymbol{v}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.3.5}$$

である．定理通りに P を作って,（１）P は正則であること,（２）$PB = AP$ が成り立つこと，を示せばよい.

（１）P の各列は n 個の独立な縦ベクトルからできている．このような行列が正則であるのは，春学期に見た（n 本独立 $\Longleftrightarrow$ 階数が n $\Longleftrightarrow$ 正則）.

（２）$PB = AP$ について：単なる計算だ．P, B の定義 (2.3.4) から，

$$AP = (A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, \ldots, A\boldsymbol{v}_n) = (\alpha_1\boldsymbol{v}_1, \alpha_2\boldsymbol{v}_2, \ldots, \alpha_n\boldsymbol{v}_n) = PB \tag{2.3.6}$$

が成り立って，両者は等しい．

では必要条件（対角化可能なら n 本の独立な固有ベクトル）の証明．

正則行列 P と対角行列 B があって，$PB = AP$ だったとしよう．この両辺の j 列目は，行列のかけ算の定義（および，B が対角行列であること）を用いて

$$A\,\boldsymbol{v}_j = \alpha_j\,\boldsymbol{v}_j \tag{2.3.7}$$

になっている．これは $\boldsymbol{v}_j \neq \boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{v}_j$ が A の固有ベクトルであることを主張している．ところで，P は正則行列だから，各列は独立であり，特に，ゼロベクトルではあり得ない．従って，$j = 1, 2, \ldots, n$ に関して，$\boldsymbol{v}_j$ は A の固有ベクトルであり，かつこれらは独立だ．つまり，A は独立な固有ベクトルを n 本もつのである． □

上の定理ははなはだ不完全である．定理の証明を見ればわかるように，定理の主張自身がほとんど「アタリマエ」な感じである．その上，どんな行列に対して「n 本の独立な固有ベクトルを持つ」のか，その判定条件が与えられていない．従って現時点では各行列について固有ベクトルをすべて求める以外，判定手段がない．これについてはもっと良い判定条件（ただし，十分条件）を，今学期の最後の方で与えるであろう．

2.4 行列の対角化（基底の変換との関連で）

ベクトル $\boldsymbol{x}$ に行列 A を何回もかける場合，２通りのやり方がある．

- 上で見たように — (2.3.2) — 行列の対角化を利用して A^ℓ を計算し，それを $\boldsymbol{x}$ にかける．つまり，

$$A^\ell\,\boldsymbol{x} = P\,B^\ell\,P^{-1}\,\boldsymbol{x} \tag{2.4.1}$$

  と計算する．

- 中間テストの前のレポート問題でやったように，$\boldsymbol{x}$ を A の固有ベクトルの線形結合として書き表して計算する．少し思い出しておこう．A の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$，固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ とする．このとき，$\boldsymbol{x} = \tilde{x}_1\boldsymbol{v}_1 + \tilde{x}_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \tilde{x}_n\boldsymbol{v}_n$ と展開しておいて，

$$A^\ell\boldsymbol{x} = A^\ell(\tilde{x}_1\boldsymbol{v}_1 + \tilde{x}_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \tilde{x}_n\boldsymbol{v}_n) = \tilde{x}_1\,\alpha_1^\ell\,\boldsymbol{v}_1 + \tilde{x}_2\,\alpha_2^\ell\,\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \tilde{x}_n\,\alpha_n^\ell\,\boldsymbol{v}_n \tag{2.4.2}$$

  と計算する．

この２つは同じ事をやっているはずで，勿論，結果も同じはずだ．それをこの節で見ていく．そのためには,「異なった基底での表現行列はどうなるか」に戻らないといけない.（教科書 pp.87–88）

少し一般に考える．線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ がある．$\mathbb{R}^n$ の基底を２通り用意して，それぞれを $\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\rangle$, $\langle\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n\rangle$ としよう．

一般の基底に関する表現行列　まず，f の，基底 $\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\rangle$ に関する表現行列 A を考える．これは定義によると，以下のようなものだった.（以下，わかっている人には退屈だろうが，かなりの人が困っているようなのでくり返す.）

- 基底 $\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\rangle$ に関するベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分とは，

$$\boldsymbol{x} = v_1\boldsymbol{v}_1 + v_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + v_n\boldsymbol{v}_n \tag{2.4.3}$$

  と展開したときの係数 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ の事である（太字のベクトルと，細字の係数を区別すること）.

- 同様に，$\boldsymbol{x}$ を f で送った行き先 $f(\boldsymbol{x})$ も，基底 $\langle\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\rangle$ で展開する（良い記号がないので，大文字を展開係数にした）：

$$f(\boldsymbol{x}) = V_1\boldsymbol{v}_1 + V_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + V_n\boldsymbol{v}_n \tag{2.4.4}$$

- 線形写像 f の，基底 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ に関する表現行列 A とは，

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} \tag{2.4.5}$$

を満たす $n \times n$ 行列である．

- なお，上の行列 A の成分をもっと直接的に書き下すことができる．たとえば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$ の場合を考えてみると良い．この場合，$v_1 = 1, v_2 = v_3 = \ldots = v_n = 0$ であるから，(2.4.5) は

$$V_1 = a_{11}, \quad V_2 = a_{21}, \quad V_3 = a_{31}, \quad \ldots \tag{2.4.6}$$

となる．つまり，

$$f(\boldsymbol{v}_1) = V_1 \boldsymbol{v}_1 + V_2 \boldsymbol{v}_2 + \ldots + V_n \boldsymbol{v}_n = a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n \tag{2.4.7}$$

が成り立っているわけだ．同様に，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_j$ の場合を考えると，

$$f(\boldsymbol{v}_j) = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + a_{2j}\boldsymbol{v}_2 + \ldots + a_{nj}\boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \tag{2.4.8}$$

が成り立つことがわかる．

異なる基底に関する表現行列の関係　さてさて，以上を基にして，異なる基底に関する表現行列を比べよう．今まで通り，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ に関する表現行列は A とする．一方，基底 $\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n \rangle$ に関する表現行列は B と書いて，この両者の関係を調べたい．a_{ij} は (2.4.8)，一方 b_{ij} は相当する

$$f(\boldsymbol{w}_j) = b_{1j}\boldsymbol{w}_1 + b_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \ldots + b_{nj}\boldsymbol{w}_n = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{w}_i \tag{2.4.9}$$

を満たしている．

ベクトル $\boldsymbol{w}_j$（$j = 1, 2, \ldots, n$）を基底 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ で展開することはできるので，その展開係数 p_{ij} を

$$\boldsymbol{w}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{v}_i \tag{2.4.10}$$

によって定義しておこう．我々の目的は，(2.4.8), (2.4.9) および (2.4.10) を満たすような係数 a_{ij} と b_{ij} の関係をつけることだ．

そのためには，(2.4.10) を (2.4.9) へ代入し，出てきた式が (2.4.8) と同値になるように，係数の関係を決めてやればよい．やってみると，(2.4.9) の右辺は

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \sum_{k=1}^{n} p_{ki}\boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \Bigl[\sum_{i=1}^{n} b_{ij} p_{ki} \Bigr] \boldsymbol{v}_k \tag{2.4.11}$$

また，(2.4.9) の左辺は

$$f\Bigl(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{v}_i \Bigr) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} f(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \Bigl[\sum_{i=1}^{n} p_{ij} a_{ki} \Bigr] \boldsymbol{v}_k \tag{2.4.12}$$

この両者が等しく，かつ $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ は基底だから，$\boldsymbol{v}_k$ の係数が等しくなければならない．つまり，

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} p_{ki} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} a_{ki} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} p_{ki} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} p_{ij} \tag{2.4.13}$$

でもこれは行列の関係式 $PB = AP$ の (k, j)-成分そのものである．ということで結論：2つの表現行列は

$$PB = AP \qquad \text{つまり} \qquad B = P^{-1} A P \tag{2.4.14}$$

の関係にある．これが計算問題としての行列の対角化の背後にあった事情だ．

（注）なお，上の行列 P は各列が独立なので，正則行列であり，P^{-1} は存在する．

１月７日：明けましておめでとうございます．後もう少しのおつき合いですが，どうかよろしく．僕の風邪は治りきっていませんが，少しマシになりました．
１．というわけで，中間テストを返します．詳しくは別紙を．
２．今日のところで,「必要最低限」の内容は大体終わります．この後でやる「内積空間」はオプション気味（全くできなくても単位はあるよ）と理解してください．

————————————————-以下，レジュメの続き ————————————————

2.5 対角化と固有ベクトルなどについての補足

旧年中に,「行列の対角化」を強引にやり，レポート問題も出した．今日はまず，計算問題としての対角化をまとめるところから始めよう．

今までに見たように，$n \times n$ 行列 A の独立な固有ベクトルが n 個存在する場合，その固有ベクトルを横に並べて行列 P を作ると，$P^{-1}AP$ が対角行列になるのだった．また A が対角化可能であるためには，A が n 個の独立な固有ベクトルを持つことが必要十分である，ことも見た.（僕は風邪で死にかけていたから説明はイマイチだったかもしれないけど.）これで話は終わっているが，今日はもう少し，$\det(\alpha I_n - A) = 0$ の解の重複度との関係を見ておきたい.

$\det(\alpha I_n - A) = 0$ は α の n 次式であるので，複素数の範囲では重複度も含めて n 個の解を持つ．これは

$$\det(\alpha I_n - A) = (\alpha - \alpha_1)^{n_1} (\alpha - \alpha_2)^{n_2} \ldots (\alpha - \alpha_k)^{n_k} \tag{2.5.1}$$

と因数分解されることを意味している（k は 1 以上 n 以下の整数，$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$）.

定理 2.5.1 (固有ベクトルについての補足) $n \times n$ 行列 A の固有値と固有ベクトルについては，以下の性質がなりたつ.

1. $\det(\alpha I_n - A) = 0$ の解のそれぞれに対して，少なくとも一つの固有ベクトルが存在する．すなわち，$\det(\alpha I_n - A) = 0$ の解は定義通りの意味で固有値である.
2. 異なる固有値に属する固有ベクトルは一次独立である.
3. ある固有値 α_i の重複度を n_i とするとき，α_i の固有空間の次元は n_i 以下である.

証明：

1. $\det(\alpha I_n - A) = 0$ の解の一つを α_1 とすると，行列 $\alpha_1 I_n - A$ は正則ではない．よって，$(\alpha_1 I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のゼロベクトルでない解 $\boldsymbol{x}$ が存在する.

2. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$ を異なる固有値，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_\ell$ としよう.

$$k_1 \boldsymbol{x}_1 + k_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + k_\ell \boldsymbol{x}_\ell = \boldsymbol{0} \tag{2.5.2}$$

を解いたら $k_i \equiv 0$ となることを言えばよい．そのためには (2.5.2) の両辺に A を何回もかけるのだ．$A\boldsymbol{x}_i = \alpha \boldsymbol{x}_i$ を使うと，A を一回かけて

$$k_1 \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + k_2 \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + k_\ell \alpha_\ell \boldsymbol{x}_\ell = \boldsymbol{0} \tag{2.5.3}$$

となる．２回，３回，とかけていくと，結局

$$k_1 \alpha_1^m \boldsymbol{x}_1 + k_2 \alpha_2^m \boldsymbol{x}_2 + \ldots + k_\ell \alpha_\ell^m \boldsymbol{x}_\ell = \boldsymbol{0} \tag{2.5.4}$$

が任意の非負の整数 m について成り立つことになる．これらの連立方程式の解は $k_1 = k_2 = \ldots = 0$ しかないことは，やってみればわかる.（正直,「やってみる」のはちと大変で，ℓ についての数学的帰納法を使うのが一番簡単だろう.）

3. この証明は「行列の三角化」を使うと簡単なので，後回しにする. □

上の定理の 3 を考えに入れると，行列が対角化できる必要十分条件は固有値を α_i，その重複度を n_i，対応する固有空間を W_i と書くときに，

$$\dim(W_i) = n_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{2.5.5}$$

が成り立つこと，と言える．

これ以降の内容は原則として「オプション」であり，まったくわからなくても単位くらいは取れるだろう．

2.6 行列の三角化

今まで行列が対角化できる必要十分条件を見てきたが，世の中には対角化できない行列も多数，存在する．例えば $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$．このような行列が対角化できないことは今までの必要十分条件に照らせばわかる（十分な数の独立な固有ベクトルがない！）．では，対角化できない行列はどのくらいまで対角に近くできるのだろうか？より正確には

対角化できない $n \times n$ 行列 A に対して正則行列 P を探し，$P^{-1}AP$ をできるだけ対角形に近くせよ

という問題を考えたい．勿論「できるだけ近く」と言うのは主観的な言葉であるが，解答を見れば納得してもらえると思う．この問いに対する完全な解答（Jordan 標準型）は次小節で与えるが，それはなかなか大変で，すべてを説明することはできないだろう．この小節ではそれより簡単，しかし不完全な解答を与える．

定理 2.6.1 (行列の三角化) 任意の $n \times n$ 行列 A は,「三角化」できる．つまり適当に正則行列 P を選んで $P^{-1}AP$ が上半三角行列にできる．

言うまでもないが，対角行列は上半三角行列の一種であるから，上の定理は対角化可能な場合を（ショウモナイ形で）カバーしている．

この定理の証明は n についての帰納法で行うのが普通だが，なかなかややこしいので，講義では省略する．ここではむしろ，この定理を認めて何が言えるか，その副産物に注目したい．

まず，$P^{-1}AP = B$ が上半三角の場合，その対角線上には A の固有値がその重複度の回数だけ出ていることに注意しよう．なぜなら：$\det(\alpha I_n - A) = \det(\alpha I_n - B)$ だから，$\det(\alpha I_n - A) = 0$ と $\det(\alpha I_n - B) = 0$ は同値であるから.（上半三角行列の行列式はその対角成分の積だったことを思い出そう）.

これを使って，定理 2.5.1 の 3 の証明ができる．α_i を重複度 n_i の固有値だとし，固有空間を求めるために

$$\bigl(\alpha_i I_n - A\bigr)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{2.6.1}$$

を解いてみる．このまま解くのは難しいから，A を上半三角にする行列 P を使って，$\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ と変数変換してやると，上のは

$$\bigl(\alpha_i I_n - B\bigr)\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \tag{2.6.2}$$

と同値になる．このような $\boldsymbol{y}$ の作る空間の次元を知りたいわけだ．

前期にやったことから，この次元は $n - \mathrm{rank}(\alpha_i I_n - B)$ であるとわかるので，行列 $\alpha_i I_n - B$ の階数を求めたい．さて，$\alpha_i I_n - B$ の対角線上には丁度 n_i 個だけのゼロが並んでおり，かつこの行列が上半三角であるから，この行列の階数は少なくとも $(n - n_i)$ だけはある.（基本変形してゼロにしていこうと思っても対角線上にある $(n - n_i)$ 個のゼロでない数を消すことはできないから.）従って，

$$\dim(W_i) = n - \mathrm{rank}(\alpha_i I_n - B) \le n_i \tag{2.6.3}$$

となる． □

1月19日：残りの2回，どうやっても中途半端なのですが，ともかく大急ぎで「Jordan の標準型」「内積空間」をやります．ただし，これらは全く時間不足なので，正規のテスト範囲には入れません．オプション気味（全くできなくても単位はあるよ）と理解してください．

第6回レポート問題：最後なので，行列の対角化や固有関数を用いる「応用問題」を出しておきましょう．ただし，これはかなり「物理」なので,「オプション」問題です．出したい人だけ出して下さい．

問6： 壁の間に3つの質点（質量は1）が並んでいて，バネ（バネ定数は k_0, k_1, k_2, k_3）でつながれている．その運動方程式は質点の（平衡位置からのズレを $x_i(t)$ と書くと，以下のようになるだろう（$x''(t)$ は $x(t)$ の t に関する2階微分を表す）．

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= -k_0 x_1 + k_1(x_2 - x_1) \\ x_2''(t) &= -k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\ x_3''(t) &= -k_2(x_3 - x_2) - k_3 x_3 \end{aligned}$$

これを解きたいが，x_1 から x_3 が複雑に入り組んでいて大変である．そこで，行列の対角化を用いよう.（物理の講義では別のやり方を教わったかもしれないが，折角，対角化をやったのだから.）まず，x_1, x_2, x_3 を縦ベクトルの形に並べると，上の微分方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(k_0+k_1) & k_1 & 0 \\ k_1 & -(k_1+k_2) & k_2 \\ 0 & k_2 & -(k_2+k_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

となる．ここで真ん中の行列が対角行列なら，各成分毎に分解して解けば良く，単振動の解が出る．しかし，現実には行列は対角形ではない．そこで，今までにやってきた知識を用いよう．うまく行列 P を見つけて，$P^{-1}AP$ を対角形にするわけだ．そして，新しい未知関数 $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ を

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

で定義する． $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ の満たす微分方程式は簡単になっている事が理解できるはずだ．

（問題）具体的な場合について，上の P を求め，この3つの質点の運動を論ぜよ．初期条件としては，$x_1(0) = 1, x_2(0) = x_3(0) = 0$ とする．ただし，一般の k_1, k_2, k_3 でやると大変だから，解きやすいように k_i の大きさ（比）を設定して良い．例えば，$k_0 = k_3 = 1, k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$ くらいがお奨めかな？

番外問題：

これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

2004年月1月24日（金）の午後5時半までに

提出してください.（このレポートは「オプション」なので，やりたい人だけで良い.）

——————————————————-前回のレポートの解答 ——————————————

ともかく手順に従って計算するのみ，です.

A_1 の場合.

行列式を計算すると $\det(\alpha I_4 - A_1) = (\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+3)$ となる．固有値は $\alpha = 1, 2, -3$ で 1 は 2 重根．このそれぞれについて固有ベクトルを求める．

$(1I_4 - A_1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解くと，解空間は

$$\left\{ s\begin{bmatrix}1\\2\\2\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{となるので，独立な固有ベクトルは} \quad \begin{bmatrix}1\\2\\2\\0\end{bmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix} \quad \text{の 2 つ}$$

とわかる（もちろん，この 2 つの線形結合なら何でも良い）．同様に

$$\text{固有値 2 に対する固有ベクトルは} \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \text{固有値} \ -3 \ \text{に対する固有ベクトルは} \begin{bmatrix}3\\4\\5\\1\end{bmatrix}$$

である．このように独立な 4 つの固有ベクトルがとれるので，A_1 は対角化できる．年末にやったことより，この 4 つを並べて

$$P \equiv \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 3\\2 & 1 & 1 & 4\\2 & 1 & 1 & 5\\0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{とすると，} P^{-1}A_1P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix} \quad \text{となる}$$

はずである．実際これは P^{-1} を計算して確かめることも可能.

> 重要な注意：
> 1.「異なる固有値が 3 つしかないから対角化できない」とした人が多く見られたが，これは大きな勘違いであるから，是非，正しておくように！
> 2．固有ベクトルの並べ方でできる $P^{-1}AP$ の対角成分の並び方も変わってくる．上の解答では固有値 $1, 1, 2, -3$ の順で固有ベクトルを並べたから，$P^{-1}AP$ の対角成分も $1, 1, 2, -3$ での順で並んだ.

A_2 の場合.

行列式を計算すると $\det(\alpha I_4 - A_2) = (\alpha-1)^2(\alpha-3)^2$ となる．固有値は $\alpha = 1, 3$ で共に 2 重根.

このそれぞれについて固有ベクトルを求めると，

$$\text{固有値 1 に対する固有空間は} \left\{ s\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-2\\1\\1\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{C} \right\}, \text{固有値 3 に対する固有空間は} \left\{ s\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{C} \right\}$$

となることがわかる．独立な固有ベクトルが 3 本しかないので，対角化できない.

> しつこいが,「対角化できない」のは，上のようにすべての固有ベクトルを求めた後に,「これは数が足りないなあ」とわかるのである．固有値の数だけを見てわかるのではない！

A_3 の場合.

行列式を計算すると $\det(\alpha I_3 - A_3) = (\alpha - 1)(\alpha - 4)(\alpha + 2)$ となる．固有値は $\alpha = 1, 4, -2$．異なる固有値が 3 つあるので，独立な固有ベクトルは 3 つあることがわかり，対角化可能である．

固有ベクトルを求めて P を作っていく．答えは,

$$P \equiv \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{とすると，} P^{-1} A_3 P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．

A_4 の場合.

行列式を計算すると $\det(\alpha I_3 - A_4) = (\alpha - 2)^3$ となる．固有値は 2 （3 重根）であるが，これだけでは対角化不可能とは言い切れないので，固有空間を求めると，

$$\left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{C} \right\}$$

となることがわかる．独立な固有ベクトルが 2 本しかないので，対角化できない．

（注）実のところ，A_4 に関しては，3 重根と解った時点で「対角化できない」と言い切れるのだ．その訳は各自，考えてみよう．

——————————————————-以下，レジュメの続き ——————————————

さて，x の多項式 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ と $n \times n$ 正方行列 A が与えられたとき，x のところに A を代入して

$$f(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_m A^m$$

を定義することができる（I_n は $n \times n$ の単位行列）．上の三角化の定理を使って，以下のような性質を証明できる．これらは主に「理論的」な興味のものだが，将来役に立つかもしれない．

定理 2.6.2 (フロベニウスの定理) $n \times n$ 行列 A の固有値の一つが λ，対応する固有ベクトルが $\boldsymbol{p}$ のとき，$f(A)$ の固有値の一つは $f(\lambda)$，対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{p}$ となる．

定理 2.6.3 (Cayley-Hamilton の定理) $n \times n$ 行列 A の固有多項式を $\phi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ と書くと，$\phi_A(A) = 0$ である（右辺は $n \times n$ ゼロ行列）．

2.7 Jordan の標準型

$P^{-1}AP$ についての最後の小節である．前節での問いに対する完全な答えを与えるが，まず言葉の準備をする．

定義 2.7.1 (Jordan 細胞と Jordan 行列) 以下の形の $n \times n$ 行列を $J_n(\lambda)$ と書いて，(固有値 λ を持つ) n-次 Jordan 細胞とよぶ．見てのとおり，対角線上には λ，その一つ上には 1，残りはすべてゼロ，という形である．

$$J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{2.7.1}$$

対角線上にいろいろな次元と固有値をもつ Jordan 細胞が並んだ形の行列，つまり，

$$\begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & & & \\ & & J_{n_3}(\lambda_3) & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} \tag{2.7.2}$$

の形の行列を Jordan 行列という（行列中，何も書いていないところは全部ゼロ）．

この定義の下で以下が成り立つ：

> **定理 2.7.2 (行列の三角化)** 任意の $n \times n$ 行列 A は適当に正則行列 P を選ぶことにより，$P^{-1}AP$ を Jordan 行列の形にできる．結果として出てくる Jordan 行列は Jordan 細胞の並べ方を除いて一意に決まる．

つまり，すべての行列は Jordan 行列の形にまでは持っていけるわけだ．

3 内積空間

3.1 内積の定義

天下りであるが，定義を与える．

> **定義 3.1.1 (内積 I)** $\mathbb{C}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の<u>内積</u> $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を
>
> $$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j} \tag{3.1.1}$$
>
> で定義する．ここで $\boldsymbol{x}$ の第 j 成分を x_j と書いた．また $\overline{y_j}$ は y_j の複素共役を表す．

上では具体的な内積の定義を与えたが，実は内積はもっと一般に与えることもできる．すなわち，与えられたベクトル空間に対して，異なる内積をいろいろ定義できるのである．(これらは目的に応じて使い分ければよいが，大抵は考えている問題によって，自然な内積の定義が決まってくる.）ともかく，その「一般の内積」の定義を書いておくと：

> **定義 3.1.2 (内積 II)** 複素ベクトル空間 X が与えられたとき，その<u>内積</u>とは，以下を満たすような関数（2つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して複素数 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が決まるもの）である．
>
> 1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$
> 2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$
> 3. $(k\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
> 4. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ かつ，$= 0$ は $\boldsymbol{x} = 0$ の時に限る

定義 3.1.1 の内積が定義 3.1.2 の性質をすべて満たしていることはすぐに確かめられるだろう．定義 3.1.1 とは異なる内積の簡単な例として，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 \overline{y_1} + 2 \sum_{j=2}^{n} x_j \overline{y_j} \tag{3.1.2}$$

を挙げておく．もう少し定義を：

定義 3.1.3 (ノルム，直交) 複素ベクトル空間 X とその上の内積が与えられたとき，

$$\|\boldsymbol{x}\| \equiv \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} \tag{3.1.3}$$

をベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さ（ノルム）という．また，２つのベクトルの内積がゼロ，つまり

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \tag{3.1.4}$$

の時，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交する という．

ベクトルの内積やノルムは以下の性質を満たす

定理 3.1.4 (内積，ノルムの性質) ベクトルの内積とノルムは以下を満たす（$k \in \mathbb{C}$，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$）．

- $\|k\,\boldsymbol{x}\| = |k|\,\|\boldsymbol{x}\|$
- $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = 2\bigl(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\bigr)$
- $\bigl|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\bigr| \le \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|$ （Cauchy-Schwarz の不等式）
- $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ （三角不等式）

（角度としての内積）Schwartz の不等式から，$-1 \le \dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} \le 1$ が得られるので，

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} \tag{3.1.5}$$

なる θ を一つ決めることができる（$0 \le \theta \le \pi$）．この θ をベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ のなす角度と解釈すると，内積はベクトルの間の角度を与えるものと言える．ここで唐突に角度が出てきたと思う人は，定義 3.1.1 の内積の定義を２次元のベクトルに対して書いてみて，それが丁度 $\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta$ と同じであることを確かめてみると，違和感が少なくなるであろう.（すぐ後で見るように，内積には実際的な効用もある.）

3.2 正規直交基底（内積の効用 I）

ここでは正規直交基底とその効用について，簡単に触れる．ここでは複素ベクトル空間とその上の内積が与えられたものとしてすすむ.

定義 3.2.1 (正規直交基底) n 次元複素ベクトル空間 X の基底 $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ が,「互いに直交して，かつ長さが１」つまり

$$(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \ne j) \end{cases} \tag{3.2.1}$$

を満たすとき，正規直交基底 であるという.

正規直交基底の良いところは，勝手なベクトル $\boldsymbol{x}$ をこの正規直交基底で展開した係数が簡単に計算できることである．少し思い出してみると，基底 $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ で $\boldsymbol{x}$ を展開するとは

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n \tag{3.2.2}$$

と書けるように係数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を決めることだった．そして，今までこの問題に答えるには，上の方程式を連立方程式の形に書いて，一生懸命解くしかなかったのだ.（これは一般に非常に大変．試験の時など，４次元，かつ僕が係数を計算し易いようにしたものでも間違ったでしょう？）

ところが，$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ が正規直交基底の場合に限り 大変簡単な計算法があるのだ：

定理 3.2.2 (正規直交基底での展開) 正規直交基底による展開 (3.2.2) の係数は以下で与えられる：

$$x_j = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.2.3}$$

これがどれほど簡単かは実際に 10 次元くらいの空間でやってみればわかる．従来の方法なら 10 連立方程式を解く．正規直交基底ならちょこちょこと内積を計算するだけ．内積を導入する，一つの大きな理由はここにある．

ただし，この方法は正規直交基底の場合にのみ使える，ことはしつこく注意しておこう．

このように便利な正規直交基底であるが，現実に得られる基底は正規直交基底になっていないことも多い．そのような場合，今持っている基底から正規直交基底を作る方法が存在し，Gramm-Schmidt の直交化法とよばれている（教科書の１０９ページ）．

3.3 エルミート行列（内積の効用 II）

この節は物理（特に量子力学）との関係でも重要である．内積のもう一つの効用を述べる．まず，以下の定義と定理を見て欲しい．

定義 3.3.1 (エルミート共役とエルミート行列) $n \times n$ 行列 A に対して，

$$\left(A^\dagger\right)_{ij} = \overline{A_{ji}}, \quad \text{つまり，} A^\dagger = \overline{{}^t A} \tag{3.3.1}$$

として定義した行列 $A^\dagger$ を A のエルミート共役と言う．また，

$$A^\dagger = A \tag{3.3.2}$$

なる行列をエルミート行列という．

定理 3.3.2 (エルミート行列の固有値) $n \times n$ のエルミート行列 A の固有値はすべて実数である．また，A の異なる固有値に対する固有ベクトル同士は直交する．

上の定義も定理も，単に行列の言葉で書かれているので，今までやってきた内積との関係は一見ないように見える．ところが…

以下では $\mathbb{C}^n$ のベクトルを $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ などと書き，定義 3.1.1 の内積を考える．

まず，A に対する $A^\dagger$ の意味は，内積を考えると自然に付けられる．すなわち，A と $A^\dagger$ については

$$(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (A^\dagger \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n) \tag{3.3.3}$$

が成り立つ（内積の定義に従って計算してみよ）．従って，エルミート行列とは，

$$(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n) \tag{3.3.4}$$

が成り立つ行列ということになる．

1月26日：とうとう最終回です．駆け足で「エルミート行列」などのお話しをします．ただし，これらは全く時間不足なので，正規のテスト範囲には入れません．

期末テストは以下の要領で行います：

1. 日時・場所は教務課の掲示に従う.（多分，２月２日（月）の４限にこの教室，だと思うが，確認すること．万が一，これが間違っていたら教務課の掲示を優先する.）
2. 範囲は後期にやったことのうち，前々回の補講分まで．具体的には「線形写像」「固有値と固有ベクトル」「対角化」などです．ただし「線形空間と部分空間，基底と次元」など，前期でやったことは使いまくります.
3. 今回も，以下の条件で持ち込みを認めます.
   持ち込めるものは A4 の紙一枚の片側だけに自分で書いた物のみ（ただし，予想問題の解答を丸写ししたようなものは減点の対象になるかも）．ワープロの出力でも構わないが，友達の持ち込み用紙のコピーは厳禁．この持ち込み用紙はテストの答案と一緒に提出してもらう.（持ち込み用紙を使わない人は「持ち込み無し」と答案用紙に明記すること.）なお，持ち込みを認める主な目的は,「各自が持ち込み用紙をまとめることによって勉強する」ことにある．実際のところ，問題を解く上では持ち込んでも持ち込まなくても差はないだろう.

（中間テストの採点ミスの可能性について）中間テストで一カ所，ごく一部の人に採点ミスをした可能性があります．ミスをしたとしても最大で８点の差ですから，最終成績には４点以下しか効きませんが，気持ち悪いので公表します．以下に事情を説明するので，該当する人は，今度の期末テストの際にでも答案を僕のところに持ってきて下さい（他の時間に僕のオフィスに来るのも可）.

- 採点ミスの可能性があるのは，問い２の小問３,「$f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$ なる $\boldsymbol{y}$ を求めよ」の部分である.
- この小問にはその直前の小問２を使って解答する別解があるが，その別解の方法を使っていることを見落として「あっているのに×」にした採点ミスの可能性がある.（別解そのものは認識していたが，風邪で朦朧としていた．申し訳なし.）
- 該当する可能性のあるのは,「小問２の結果（$f^4(\boldsymbol{x}) = 4\boldsymbol{x}$）を用いて小問３を解いて，正しい答えを出している人」である．当然，小問２は完璧に解けている必要がある.

以上の採点ミスに該当する人はいないかもしれない．ただ,「この人はここまで出来ているのに，なぜ小問３だけできてないの？」と思った記憶があるので，念のために皆さんにお尋ねした次第.

いま気がついた．前回のレポート，提出期限が間違っていました！申し訳なし！

―――――――――――――――― 前回のレポートの解答 ――――――――――――――――

少しだけ一般的に書く．考えている微分方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$$

の形をしている．ここで A を対角化して，$B = P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めたとし，$\boldsymbol{y}(t) = P^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ に対する微分方程式を求めよう．上の関係は $\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t)$ と等価なので，これを与えられた微分方程式に代入する．このとき，P が時間 t によらないので,

$$\frac{d^2}{dt^2}\bigl[P\boldsymbol{y}(t)\bigr] = P\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t) + \bigl[\frac{d^2}{dt^2}P\bigr]\,\boldsymbol{y}(t) = P\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t)$$

となることに注意しよう．結果は

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\bigl[P\boldsymbol{y}(t)\bigr] = AP\boldsymbol{y}(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t) = P^{-1}AP\,\boldsymbol{y}(t) = B\boldsymbol{y}(t)$$

となる．B が対角行列であるから，その対角成分（A の固有値）を順に $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ と書くと，この微分方程式の各成分は

$$y_1'' = \alpha_1\,y_1, \qquad y_2'' = \alpha_2, y_2, \qquad y_3'' = \alpha_3\,y_3, \ldots$$

ということになる．これを見ると，一つの未知関数 y_i に対する微分方程式に分解したことがわかる．これなら解けるぞ！

以下，この方程式の解を問題にするが，レポート問題に特化して，$\alpha_i < 0$ の場合のみを考える．さて，この y_i の微分方程式は単振動の方程式であり，その解は（a_i, b_i を定数として）

$$y_i(t) = a_i \cos(\sqrt{-\alpha_i}t) + b_i \sin(\sqrt{-\alpha_i}t)$$

と書ける.（単振動自身は物理でやっただろうと思う.）後は定数 a_i, b_i を初期条件から決めるだけだ.

ここでレポート問題に戻る．あまり一般的にやっても大変なので,

$$k_0 = k_3 = 2c^2,\ k_1 = k_2 = c^2 \qquad (c\text{ は正の定数})$$

の場合を考えよう．今までにやった対角化の知識を使うと，この場合,

$$A = c\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = c^2\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

となる．従って,

$$y_1 = a_1 \cos(2ct) + b_1 \sin(2ct), \quad y_2 = a_2 \cos(\sqrt{3}ct) + b_2 \sin(\sqrt{3}ct), \quad y_3 = a_3 \cos(ct) + b_3 \sin(ct)$$

となる．後は初期条件から定数を決める．初期条件を y_i で書くには，$\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ から計算すればよい．$x_1(0) = 1$ で他全部ゼロだから，y で見ると

$$y_1(0) = \frac{1}{3}, \quad y_2(0) = \frac{1}{2}, \quad y_3(0) = \frac{1}{6}$$

および,

$$y_i'(0) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

となる．これにあうように定数を決めて，結局

$$y_1 = \frac{1}{3}\cos(2ct), \quad y_2 = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}ct), \quad y_3 = \frac{1}{6}\cos(ct)$$

が得られる．$\boldsymbol{x}(t)$ はこれから $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ として計算すればよい.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{3}\cos(2ct) + \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}ct) + \frac{1}{6}\cos(ct) \\ x_2(t) &= -\frac{1}{3}\cos(2ct) + \frac{1}{3}\cos(ct) \\ x_3(t) &= \frac{1}{3}\cos(2ct) - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}ct) + \frac{1}{6}\cos(ct) \end{aligned}$$

となるわけ.

ここで少し，$y_i(t)$ の意味について考えておこう．それぞれの y_i は単振動をしている．つまり，ある y_i のみゼロでなく，他の y_j がゼロ，という運動を考えると，これは x_1, x_2, x_3 が同じ振動数で同期して動いていることを示す（固有モードという）．そのように動く y_i の時，もとの $\boldsymbol{x}$ ではどのように動くかを考えるのは興味深い.

例えば，y_1 の運動がある場合，対応する $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ は P の第１列に比例して運動している．これは x_1, x_3 と x_2 が完全に反対向きに動いているわけで，４つあるバネを出来るだけ伸び縮みさせようとする運動である．従って振動数は一番大きく，早く振動する.

逆に，y_3 では $\boldsymbol{x}$ は P の第３列に比例して運動する．この場合は x_1, x_2, x_3 が協力して，出来るだけバネを伸び縮みさせないようにしている．そのため，振動数も小さい（ゆっくり振動する）.

中間の y_2 では x_2 が静止して x_1, x_3 が逆向きに動いている．これは４本のバネを程々に伸び縮みさせるので，振動数は上の２つの場合に中間になる.

もちろん，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の関係（P の成分）はバネ定数 k_0, k_1, k_2, k_3 の相対的な大きさによって変わってくるけども，どのような固有一モードの運動が出るかは，ある程度納得できることが多い．

——————————————————以下，レジュメの続き ——————————————————

（エルミート行列の固有値が実数である，ことをやっていた）．

次に定理の証明であるが，内積を使うと簡単だ．$\boldsymbol{a}$ が A の，固有値 α に対する固有ベクトルとしよう：$A\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}$. この両辺を，それぞれ $\boldsymbol{a}$ と内積をとると，

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \alpha \|\boldsymbol{a}\|^2 \tag{3.3.5}$$

となる．ところが左辺は，A がエルミート行列なので，

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{a}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \overline{\alpha} \|\boldsymbol{a}\|^2 \tag{3.3.6}$$

に等しい．両辺を引き算して

$$(\alpha - \overline{\alpha}) \|\boldsymbol{a}\|^2 = 0 \tag{3.3.7}$$

を得るが，$\boldsymbol{a}$ が固有ベクトルなので，$\|\boldsymbol{a}\| > 0$ である．よって，$\alpha - \overline{\alpha} = 0$ であり，α は実数．

次に，$\alpha \neq \beta$ なる 2 つの固有値を持ってきて，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とする：

$$A\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a}, \qquad A\boldsymbol{b} = \beta\boldsymbol{b} \tag{3.3.8}$$

一つ目の式と $\boldsymbol{b}$ の内積をとると

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{3.3.9}$$

であるが，やはりエルミート行列の定義から，

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \beta\boldsymbol{b}) = \beta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{3.3.10}$$

が成り立つ（最後のところでは固有値 β が実数であることを用いた）．2 つの式を引き算して，

$$(\alpha - \beta)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0 \tag{3.3.11}$$

が得られ，$\alpha \neq \beta$ なら $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$，つまり $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交する． □

さてさて，エルミート行列には，更に次のような非常に良い性質がある．

> **定理 3.3.3 (エルミート行列は対角化可能)** $n \times n$ のエルミート行列はいつでも対角化できる．更に，対角化に使う行列 P を「ユニタリー行列」にとることができる．

ここで $n \times n$ 行列 U がユニタリー行列である，とは

$$U U^\dagger = U^\dagger U = I_n, \qquad \text{つまり} \quad U^{-1} = U^\dagger \tag{3.3.12}$$

が成り立つことをいう.（ユニタリー行列の逆行列は $U^\dagger$ なので，非常に便利！）ユニタリー行列には内積を保存する，つまり，

$$\text{すべての } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n \text{ に対して} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) \tag{3.3.13}$$

という性質があるが，深くは立ち入らない．

最後に,「行列が対角化可能か」の十分条件として，以下を挙げておこう：

> **定理 3.3.4 (対角化可能の十分条件)** $n \times n$ の行列 A について，以下の 2 条件は同値である．
>
> a. A は正規行列である．つまり，$A A^\dagger = A^\dagger A$ がなりたつ．
>
> b. A はユニタリー行列 U を使って対角化できる．つまり，$U^{-1}AU$ が対角行列になるようなユニタリー行列 U が存在する．

定理で見るとおり，条件 a はユニタリー行列で対角化できるための必要十分条件である．ただし，世の中には,「ユニタリー行列では対角化できないが，もっと一般の行列 P を用いれば対角化できる」行列も存在する．従って，条件 a は対角化可能の必要条件とは言えないので，定理は「対角化可能の十分条件」とした．