INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus
Mathématique

Jean-Pierre Serre

La vie et l'oeuvre de Jean-Marc Fontaine

Volume 358, issue 9-10 (2020), p. 1045-1046

Published online: 5 January 2021

https://doi.org/10.5802/crmath.126

Les Comptes Rendus. Mathématique *sont membres du*
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 1778-3569

Comptes Rendus
Mathématique
2020, 358, nº 9-10, p. 1045-1046
https://doi.org/10.5802/crmath.126

Biographie, Théorie des nombres / *Biography, Number Theory*

La vie et l'oeuvre de Jean-Marc Fontaine

Jean-Pierre Serre [a]

[a] Collège de France

Manuscrit reçu le 5 mars 2020, accepté le 29 septembre 2020.

Jean-Marc Fontaine, né en 1944, était membre de la section *Mathématique* de l'Académie des Sciences depuis 2002, après avoir été élu correspondant en 1986. Il est mort le 29 janvier 2019.

Il avait été élève à l'Ecole Polytechnique (1962), et était entré ensuite au C.N.R.S. jusqu'à son doctorat en 1972. Il avait été professeur à l'université de Grenoble (1972-1988), et ensuite à l'université Paris-Sud.

Ses travaux ont une remarquable homogénéité : ils sont tous relatifs aux corps locaux, et plus précisément à leur représentations galoisiennes. On trouvera dans [1] une analyse détaillée de ceux postérieurs à 1980. Je vais me borner à en indiquer quelques aspects.

Sa thèse [3] résout affirmativement un problème que j'avais posé sur les corps où l'on peut réaliser les représentations d'Artin.

Fontaine s'attaque ensuite à une question de Grothendieck, celle du *foncteur mystérieux* qui relie le module de Dieudonné d'un groupe p-divisible (par exemple une variété abélienne) à son module de Tate (cf. [4–6]). Il obtient, dans le cas peu ramifié, une classification complète des groupes p-divisibles au moyen de leurs groupes de Dieudonné filtrés. Il introduit toute une série d'anneaux : B_{cris}, B_{st}, B_{dR}, ... (la lettre B étant l'initiale du nom du mathématicien italien Iacopo Barsotti), cf. [6, 8]. Ces anneaux servent à détecter, et à étudier, certains types de représentations galoisiennes (sur un corps p-adique) qui interviennent en géométrie algébrique : représentations cristallines, semi-stables, de de Rham. Pour des conjectures précises, voir [6, 8] ; pour une démonstration (avec une hypothèse restrictive sur p), voir son article avec W. Messing [9]. Ces anneaux permettent aussi de donner un sens raisonnable à des « périodes » p-adiques, que les définitions standard ne permettaient pas de définir, ne serait-ce que $2i\pi$ (qui apparaît dans B_{dR}).

Les résultats obtenus ont des énoncés quelque peu techniques[1], pour lesquels je renvoie à l'exposé de Pierre Colmez cité au début ([1]). Ces résultats ont pourtant une grande utilité en géométrie algébrique arithmétique. Voici ce qu'en dit le rédacteur anonyme de Wikipedia :

[1] Sauf un, celui de [7], qui dit qu'il n'existe pas de schéma en variétés abéliennes sur $\mathbb{Z}$ de dimension $\geqslant 1$. Autrement dit, toute variété abélienne $\neq 0$ sur $\mathbb{Q}$ a mauvaise réduction en au moins un nombre premier : son conducteur est > 1. Un bel énoncé !

ISSN (electronic) : 1778-3569

« La théorie de Fontaine est l'outil le plus puissant dont on dispose pour étudier les propriétés fines des représentations des groupes de Galois des corps globaux ; elle intervient de manière cruciale dans tous les progrès en direction de la correspondance de Langlands (dans le sens Galois vers automorphe, le plus difficile) depuis les travaux d'Andrew Wiles sur le théorème de Fermat. Tout récemment, en collaboration avec Laurent Fargues, il a donné un point de vue plus géométrique sur son programme, en en décrivant tous les objets en termes de fibrés sur une courbe aux propriétés surprenantes (la courbe de Fargues–Fontaine). »

En janvier 2019, Fontaine avait eu le grand plaisir de recevoir le premier exemplaire de *La Courbe* : un volume de plus de 380 pages, [2]. Il est mort quelques jours après.

Références

[1] P. Colmez, « Le programme de Fontaine », à paraître dans L'Enseignement Mathématique, https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.colmez/FW.pdf.

[2] L. Fargues, J.-M. Fontaine, *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique*, Astérisque, vol. 406, Société Mathématique de France, 2018.

[3] J.-M. Fontaine, « Groupes de ramification et représentations d'Artin », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **4** (1971), p. 337-392.

[4] ———, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque, vol. 47-48, Société Mathématique de France, 1977.

[5] ———, « Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti–Tate », in *Groupes formels, représentations galoisiennes et cohomologie des variétés de caractéristique positive. III.*, Astérisque, vol. 65, Société Mathématique de France, 1978, p. 3-80.

[6] ———, « Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti–Tate », *Ann. Math.* **115** (1982), p. 529-577.

[7] ———, « Il n'y a pas de variété abélienne sur $\mathbb{Z}$ », *Invent. Math.* **81** (1985), nº 3, p. 515-538.

[8] ——— (éd.), *Périodes p-adiques*, Astérisque, vol. 223, Société Mathématique de France, 1993.

[9] J.-M. Fontaine, W. Messing, « p-adic periods and p-adic etale cohomology », in *Current trends in arithmetical algebraic geometry*, Contemporary Mathematics, vol. 67, American Mathematical Society, 1987, p. 179-207.