Scan A1469

Dumont

add to many

Sequences

extend & add ref to → * ~~N1133~~ ~~N608~~ ~~N2118~~

1469
2450
2451
5989
5440
5990
36968
36969
36970

f91

One new seq/ p 311/308: extend & include

INTERPRETATIONS COMBINATOIRES DES NOMBRES DE GENOCCHI

DOMINIQUE DUMONT

f99

DMJ 41 (1974)

1. Introduction et notations. L'objet de ce travail est de proposer des interprétations combinatoires pour les nombres de Genocchi, les premières à notre connaissance. Rappelons que l'intérêt porté à cette suite d'entiers vient de son étroite liaison avec les nombres de Bernoulli et avec les nombres d'Euler de deuxième espèce ou nombres tangents. En effet, les fonctions génératrices de ces trois suites de nombres sont respectivement (se référer à [7], [14], [16] ou [17]):

$$G(t) = \frac{2t}{e^t + 1} = t + \sum_{n \geq 1} (t^{2n}/(2n)!)G_{2n} \quad \text{(nombres de Genocchi)}$$

$$B(t) = \frac{t}{e^t - 1} = 1 - t/2 + \sum_{n \geq 1} (t^{2n}/(2n)!)B_{2n} \quad \text{(nombres de Bernoulli)}$$

$$A(t) = \frac{2}{e^{2t} + 1} = 1 + \sum_{n \geq 1} (t^{2n-1}/(2n-1)!)A_{2n-1} \quad \text{(nombres tangents).}$$

Les premières valeurs des nombres de Genocchi sont:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G_n	1	−1	0	1	0	−3	0	17	0	−155	0	2073

1469 & 36968

On a les identités:

$$G_{2n} = 2(1 - 2^{2n})B_{2n} \qquad (n \geq 1) \tag{1}$$

$$2^{2n-2}G_{2n} = nA_{2n-1} \qquad (n \geq 1). \tag{2}$$

En outre, la fonction génératrice des nombres $|A_{2n-1}|$ est la fonction tangente, d'où leur appellation:

$$\tan t = t\,gt = \sum_{n \geq 1} (t^{2n-1}/(2n-1)!)\ |A_{2n-1}|$$

De l'identité (2) on tire:

$$t \tan \frac{t}{2} = t\,tg\,\frac{t}{2} = \sum_{n \geq 1} (t^{2n}/(2n)!)\ |G_{2n}|.$$

Or c'est précisément sur ces valeurs absolues $|A_{2n-1}|$ et $|G_{2n}|$ que nous allons nous pencher plus particulièrement au cours de cette étude.

On connaît l'interprétation combinatoire que Désiré André ([1], [2]) a, en 1881, donnée des nombres tangents. Les entiers $|A_{2n-1}|$ dénombrent les permutations

Received August 28, 1973.

sur l'ensemble $\{1, 2, \cdots, 2n - 1\}$ qui sont *alternantes*, en ce sens que, si p est une telle permutation: *on a* $p(i) \leq p(i + 1)$ *pour* i *impair et* $p(i) \geq p(i + 1)$ *pour* i *pair* $(1 \leq i \leq 2n - 2)$.

Le résultat essentiel de cet article est le suivant: *l'entier* $|G_{2n}|$ *dénombre les permutations* p *de* $\{1, 2, \cdots, 2n - 1\}$ *telles que l'on a* $p(i) \leq p(i + 1)$ *pour* $p(i)$ *impair et* $p(i) \geq p(i + 1)$ *pour* $p(i)$ *pair* $(1 \leq i \leq 2n - 2)$ (cf. corollaire 2 du théorème 5). Ainsi, les nombres tangents (en valeur absolue) dénombrent les permutations qui montent ou descendent suivant la parité de *l'objet* i, les nombres de Genocchi les permutations qui montent ou descendent suivant la parité de *l'image* $p(i)$. Le plus curieux, c'est que ce nouveau rapprochement entre nombres de Genocchi et nombres tangents ne semble pas directement lié au précédent. Non seulement nous n'avons pas utilisé la relation (2) pour prouver cette interprétation combinatoire des nombres de Genocchi, mais cette relation (2) demeure encore inexpliquée par les méthodes géométriques.

En effet, nous n'obtenons ce résultat qu'au paragraphe 6, après un assez long cheminement, utilisant d'abord l'identité (3) ci-après, due à Carlitz, Riordan et Stein, puis l'interprétation des nombres de Genocchi que nous avons déjà proposée dans un article antérieur ([8]), ensuite un nouveau codage des permutations (§5), enfin la transformation fondamentale sur les permutations (cf [9] p. 13). En outre, le paragraphe 3 expose une interprétation combinatoire des nombres de Genocchi en termes de couples de permutations qui ne se rattache pas directement aux autres.

Le cardinal d'un ensemble E sera noté $|E|$. Si i et j sont deux entiers tels que $i \leq j$, on note $[i, j]$ l'ensemble des entiers compris entre i et j. A la place de $[1, n]$ on note en général $[n]$. Si E est une partie du produit cartésien $[n] \times [n]$, on note $\mathrm{pr}_x(E)$ et $\mathrm{pr}_y(E)$ les projections de E sur le premier intervalle $[n]$ et sur le second. Soit $f\colon [n] \to [n]$ une application de $[n]$ dans $[n]$. Si $i \in [n]$, l'image de i par f sera noté $f(i)$ ou f_i. On note par la majuscule correspondante, F, l'ensemble $F = \{(i, f_i); i \in [n]\}$. L'ensemble-image de f est noté $f([n])$ ou $\mathrm{pr}_y(F)$. Un *point excédant* ou 0-*excédance* de l'application f est un couple (i, f_i) tel que $i \leq f_i$. L'ensemble des 0-excédances est noté E_f^0. Une *application* excédante est une application dont tous les points sont excédants: $E_f^0 = F$. Une 1-*excédance* est un couple (i, f_i) tel que $i < f_i$. On dit que Q est une *quasi-permutation* de $[n]$ s'il existe une permutation p de $[n]$ telle que Q soit une partie de l'ensemble des 1-excédances de p.

2. Génération des nombres de Genocchi par des sommes alternées.

La source de toutes nos interprétations se situe dans l'identité suivante:

$$G_{2n+2} = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1}(k!)^2 T(n, k), \tag{3}$$

où les $T(n, k)$ désignent les nombres factoriels centraux ("central factorial numbers"), nombres proches des nombres de Stirling de deuxième espèce et dont nous donnons la définition ci-dessous. Pour une démonstration de cette identité, nous renvoyons à Riordan et Stein [18] ou à Carlitz [6]. Leurs preuves font appel aux méthodes du calcul différentiel. Les nombres factoriels centraux sont donnés par:

(4) $$\boxed{\begin{aligned} &T(1,\,1) = 1 \text{ et } T(n,\,k) = 0 \text{ pour } k \text{ extérieur au segment } [1,\,n] \\ &T(n,\,k) = k^2\,T(n-1,\,k) + T(n-1,\,k-1) \text{ pour } 1 \le k \le n. \end{aligned}}$$ ← *

Les premières valeurs des nombres $T(n,\,k)$ sont dans la table 1 ci-dessous. Les nombres de Genocchi qui y apparaissent sont donnés par l'identité (3).

Posons

$$T_k(X) = \sum_{n \ge k} T(n,\,k)X^n.$$

De (4) on déduit:

$$T_0(X) = 1$$

$$(1 - k^2X)T_k(X) = XT_{k-1}(X) \qquad (k \ge 1).$$

D'où

$$\begin{aligned} T_k(X) &= \frac{X^k}{(1-X)(1-2^2X)\cdots(1-k^2X)} \\ &= X^k(1 + X + X^2 + \cdots)(1 + 2X + 2^2X^2 + \cdots)\cdots \\ &\qquad\qquad (1 + kX + k^2X^2 + \cdots). \end{aligned}$$

Et l'identité sommatoire:

(5) $$T(n,\,k) = \sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n-k} (1^{a_1}2^{a_2}\cdots k^{a_k})^2.$$

Nous présentons, d'une nouvelle manière, la génération que J. M. Gandhi [11] a conjecturée pour les nombres de Genocchi. Rappelons que cette conjecture a été prouvée par Carlitz [6] et par Riordan et Stein [18].

Soit $k \ge 1$ et $n \ge 1$. On désigne par U_n^k l'ensemble des suites

$$u = (u_0\,,\,u_1\,,\,\cdots\,,\,u_n)$$

TABLE 1

$T(n,\,k)$	k 1	2	3	4	5	6	7	G_{2n+2}
n								
1	1							1
2	1	1						−3
3	1	5	1					17
4	1	21	14	1				−155
5	1	85	147	30	1			2073
6	1	341	1408	627	55	1		−38227
7	1	1365	13013	11440	2002	91	1	929569

Δ = 8957(←) & 36969(→)

N1608 N218 M dull N1233 = 1469

central factorial nos

extend

2450 2451

telles que

$$u_0 = k - 1$$

et

$$u_i = u_{i-1} \text{ ou } u_{i-1} + 1 \text{ pour } i \geq 1.$$

PROPOSITION 1. *On a* $G_{2n+2} = -\sum (-1)^{u_n}(u_1 \cdot u_2 \cdots u_n)^2$, *la suite* $u = (u_0, u_1, \cdots, u_n)$ *décrivant* $U_n^{\,1}$.

Preuve. En effet, on a:

$$\begin{aligned}
\sum (-1)^{u_n}(u_1 u_2 \cdots u_n)^2 &= \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k \sum_{u_n = k} (u_1 \cdot u_2 \cdots u_n)^2 \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k (k!)^2 \sum_{a_1 + \cdots + a_k = n-k} (1^{a_1} 2^{a_2} \cdots k^{a_k})^2 \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k (k!)^2 T(n, k) \text{ d'après (5)} \\
&= -G_{2n+2} \text{ d'après l'idendité (3).}
\end{aligned}$$

Exemple.

$$-(1.1.1)^2 + (1.1.2)^2 + (1.2.2)^2 - (1.2.3)^2 = -G_8 = -17.$$

Soit maintenant $A_n(k)$ la valeur prise par le n — *ième* polynôme de Gandhi [11] quand on pose $X = k$. Les nombres $A_n(k)$ sont donnés par la récurrence:

$$A_0(k) = 1 \text{ pour tout } k;$$

$$A_n(k) = k^2 A_{n-1}(k+1) - (k-1)^2 A_{n-1}(k) \text{ pour } n \geq 1.$$

Les premières valeurs des $A_n(k)$ sont données dans la table 2.

PROPOSITION 2. *On a, pour* $n \geq 1$ *et* $k \geq 1$,

$$(-1)^{n+k-1} A_n(k) = \sum (-1)^{u_n}(u_1 \cdot u_2 \cdots u_n)^2,$$

la suite $u = (u_0, u_1, \cdots, u_n)$ *décrivant* $U_n^{\,k}$.

DÉMONSTRATION. En effet, pour $n = 1$, on a bien:

TABLE 2

$A_n(k)$	k 1	2	3	4	5	6	7
n							
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	3	5	7	9	11	
2	3	17	43	81	131		
3	17	155	557	1367			
4	155	2073	10075				
5	2073	38227					
6	38227						

N1233 N1233 new 5989

||

1469 extend & add

$$(-1)^k A_1(k) = (-1)^k k^2 + (-1)^{k-1}(k-1)^2.$$

Supposons la proposition vraie pour $n - 1$. D'après la définition des nombres $A_n(k)$, on a:

$$(-1)^{n+k-1}A_n(k) = (-1)^{n+k-1}k^2 A_{n-1}(k+1) + (-1)^{n+k-2}(k-1)A_{n-1}(k).$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence, en faisant subir aux suites de U_{n-1}^{k+1} et de U_{n-1}^{k} une translation de $+1$ sur les indices:

$$(-1)^{n+k-1}A_n(k) = k^2 \sum_{u_1=k} (-1)^{u_n}(u_2 \cdots u_n)^2 + (k-1)^2 \sum_{u_1=k-1} (-1)^k(u_2 \cdots u_n)^2$$
$$= \sum (-1)^{u_n}(u_1 \cdot u_2 \cdots u_n)^2 \ u \text{ décrivant } U_n^k.$$

Exemple.

$$\begin{aligned} -A_3(3) &= +(2.2.2)^2 - (2.2.3)^2 - (2.3.3)^2 + (2.3.4)^2 \\ &\quad - (3.3.3)^2 + (3.3.4)^2 + (3.4.4)^2 - (3.3.5)^2 \\ &= -557 \text{ (cf. table 2).} \end{aligned}$$

Corollaire (conjecture de Gandhi). *On a l'identité:*

$$(-1)^n A_n(1) = -G_{2n+2} \qquad (n \geq 1).$$

Il suffit en effet d'appliquer la proposition 1 et la proposition 2 pour $k = 1$.

3. Une illustration combinatoire de l'identité (3). Nous en venons à présent à une première interprétation des nombres de Genocchi en termes de dénombrement. Nous proposons une interprétation combinatoire des nombres $T(n, k)$ qui s'inspire d'une interprétation des nombres de Stirling de deuxième espèce (cf. [9], p. 38).

Théorème 1. *L'entier $T(n, k)$ est égal au nombre de couples (Q_1, Q_2) de quasi-permutations de $[n]$ telles que:*

(i) $|Q_1| = |Q_2| = n - k$
(ii) $\mathrm{pr}_v(Q_1) = \mathrm{pr}_v(Q_2)$ (*égalité de deux ensembles*).

Démonstration. Pour $n = 1$, il y a un couple: $(\emptyset, \emptyset)$, et on a bien $T(1, 1) = 1$. Supposons le théorème vrai pour $n - 1$, et soit (Q_1, Q_2) un couple de quasi-permutations de $[n]$ vérifiant (i) et (ii). Soit $\mathrm{Tr}(Q_1)$ et $\mathrm{Tr}(Q_2)$ les traces respectives de Q_1 et Q_2 sur $[n-1] \times [n-1]$. Il est immédiat que ce sont aussi des quasi-permutations. En outre, comme (Q_2, Q_1) vérifie l'axiome (ii), $\mathrm{Tr}(Q_1)$ et $\mathrm{Tr}(Q_2)$ ont le même cardinal, qui est soit $n - k$, soit $n - k - 1$.

Réciproquement, soit (Q_1', Q_2') un couple de permutations sur $[n-1] \times [n-1]$ vérifiant (i) et (ii). Dénombrons les antécédents de cardinal $n - k$ qu'elles possèdent par l'application Tr. Si $|Q_1'| = |Q_2'| = n - k$, elles ont un antécédent (on adjoint $\emptyset$). Or il y a $T(n-1, k-1)$ couples dans ce cas (hypothèse de récurrence). Il y a $T(n-1, k)$ couples tels que $|Q_1'| = |Q_2'| = n - k - 1$.

On obtient un antécédent en choisissant un élément i_1 dans $[n]\backslash\mathrm{pr}_x(Q_1')$, un élément i_2 dans $[n]\backslash\mathrm{pr}_x(Q_2')$, et en posant:

$$Q_1 = Q_1' \cup \{(i_1, n)\} \text{ et } Q_2 = Q_2' \cup \{(i_2, n)\}.$$

Il y a $n - 1 - (n - k - 1) = k$ choix possibles pour i_1, de même pour i_2, donc k^2 choix possibles pour le couple (Q_1, Q_2).

En récapitulant les deux cas, on trouve $T(n-1, k-1) + T(n-1, k)\cdot k^2$, soit $T(n, k)$ couples de quasi-permutations sur $[n]$ de cardinal $n - k$, d'après l'identité (4).

L'identité (3) et le théorème 1 nous permettent de déduire le résultat suivant (rappelons que P est le graphe de la permutation p):

THÉORÈME 2. *L'entier $|G_{2n+2}|$ dénombre les couples de permutations (p_1, p_2) de $[n]$, tels que P_1 et P_2 n'aient en commun aucune image (ou "ordonnée" de 1-exédance.*

DÉMONSTRATION. Soit

$$S = \sum (-1)^{|\mathrm{pr}_y(Q_i)|} 1^{|P_1|} 1^{|P_2|},$$

où la sommation est étendue à l'ensemble des quadruplets (Q_1, Q_2, P_1, P_2) tels que Q_1 et Q_2 soient des quasi-permutations sur $[n]$, puis P_1 et P_2 des permutations de $[n]$, enfin $Q_i \subset P_i$ $(i = 1, 2)$ et $\mathrm{pr}_y(Q_1) = \mathrm{pr}_y(Q_2)$.

Fixons d'abond le couple (Q_1, Q_2). Si $|Q_i| = n - k$ (on a $T(n, k)$ couples dans ce cas, d'après le théorème 2.7), on complète chaque quasi-permutation Q_i par une bijection de $[n]\backslash\mathrm{pr}_x(Q_i)$ sur $[n]\backslash\mathrm{pr}_y(Q_i)$ pour obtenir une permutation p_i la contenant $(i = 1, 2)$. Il y a $k!$ possibilités pour chaque Q_i. D'où, en sommant sur k:

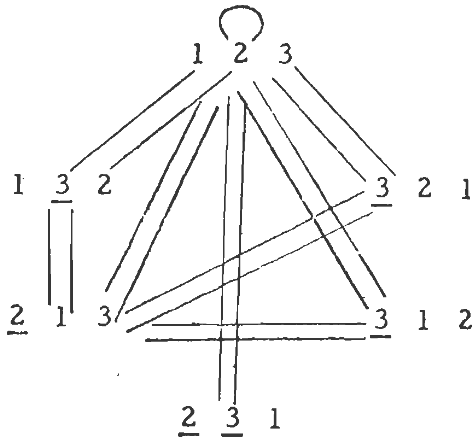
$$S = \sum_{1\le k\le n} (-1)^{n-k}(k!)^2T(n, k) = (-1)^{n+1}G_{2n+2} = |G_{2n+2}|.$$

Fixons maintenant le couple (P_1, P_2). Notons E_1 et E_2 les ensembles de 1-excédances de P_1 et P_2. Il est clair que chaque quasi-permutation Q_i contenue dans P_i est définie par sa projection $\mathrm{pr}_y(Q_i)$. Il y a donc autant de couples (Q_1, Q_2) tels que $Q_i \subset P_i$ $(i = 1, 2)$ qu'il y a de projection commune $\mathrm{pr}_y(Q_i)$. Or celles-ci sont exactement les parties de $\mathrm{pr}_y(E_1) \cap \mathrm{pr}_y(E_2)$. Finalement, on a:

$$\sum_{(Q_1, Q_2)} (-1)^{|\mathrm{pr}_y(Q_i)|} = \sum_{0\le k\le n} (-1)^k\binom{p}{k},$$

où $p = |\mathrm{pr}_y(E_1) \cap \mathrm{pr}_y(E_2)|$.
Si $p \neq 0$, cette somme est nulle.
Si $p = 0$, elle vaut 1.
D'où

$$S = |G_{2n+2}| = \sum 1^{|P_1|}1^{|P_2|},$$



la somme étant étendue à tous les couples (P_1, P_2) tels que $\mathrm{pr}_v(E_1) \cap \mathrm{pr}_v(E_2)$ soit vide.

Remarque.

1) On peut, dans les énoncés des théorèmes remplacer pr_v par pr_x .

2) Parmi les couples (p_1, p_2) du théorème 2., il n'y a qu'un couple "diagonal" (p, p), car il n'y a qu'une permutation n'ayant pas de 1-excédance, la permutation identique. Les autres couples se regroupent par paires, car si l'on a (p_1, p_2), on a aussi (p_2, p_1). (Si l'on veut, la relation introduite entre permutations est symétrique.) C'est une illustration de l'imparité de l'entier $|G_{2n+2}|$.

Voici par exemple le graphe de cette relation pour $n = 3$. On a $|G_8| = 17$, le graphe a donc 17 arêtes. On a souligné les 1-excédances:

4. Interprétation en termes d'applications excédantes. Dans un précédent article [8], nous avons introduit les entiers $B_{n,k}$ ainsi définis:

$$B_{1,2} = 1 \text{ et } B_{1,k} = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq 2;$$

$$B_{n,k} = \binom{k-1}{k-2}B_{n-1,k-1} + \binom{k}{k-2}B_{n-1,k} + \cdots + \binom{n}{k-2}B_{n-1,n} . \tag{6}$$

Voici les premières valeurs de ces entiers:

TABLE 3

Δ = 36970

$B_{n,k}$	k	2	3	4	5	6	7	G_{2n+2}
n								
1		1						1
2		1	2					3
3		3	8	6				17
4		17	54	60	24			155
5		155	556	762	480	120		2073
6		2073	8146	12840	10248	4200	720	38227

new

Genocchi

Genocchi

new
extend & add

5990

5440

Dans le même article, nous avons montré l'équivalence de la conjecture de Gandhi et du résultat suivant (qui est donc maintenant prouvé):

$$|G_{2n}| = B_{n,2} = \sum_{2 \le k \le n} B_{n-1,k} .$$

Nous donnons à présent une interprétation combinatoire des entiers $B_{s,i}$ qui diffère un peu de celle que nous avons publiée [8] et qui a l'avantage d'être plus commode pour la suite de l'exposé.

Théorème 3. *Soit $F_{2n,k}$ l'ensemble des applications f: $[2n] \to [2n]$ vérifiant les trois conditions suivantes:*

(i) *f est excédante: pour tout $i \in [2n]$, on a $i \le f(i)$.*

(ii) *L'image de f constitue l'ensemble des entiers pairs jusqu'a $2n$:*

$$f([2n]) = \{2, 4, 6, \cdots, 2n\}.$$

(iii) *L'élément $2n$ a k antécédents par f:*

$$|f^{-1}(2n)| = k.$$

Alors le cardinal de $F_{2n,k}$ est égal à $B_{n,k}$.

Démonstration. Nous posons $F_{2n} = \bigcup_k F_{2n,k}$, et considérons l'application T de F_{2n} dans F_{2n-2} où, pour f élément de F_{2n} , on définit $T(f)$ par:

$$T(f)_i = \min (2n - 2, f_i) \text{ si } 1 \le i \le 2n - 2.$$

L'application $T(f)$ est bien un élément de F_{2n-2} , car:

(i) $T(f)$ est excédante: $i \le 2n - 2$ et $i \le T(f)_i$.

(ii) $T(f)([2n - 2]) = \{2, 4, \cdots, 2n - 2\}$.

Quelle est l'image de $F_{2n,k}$ par l'application T? Il s'agit de connaître les limites dans lesquelles se trouve $|T(f)^{-1}(2n - 2)|$ quand on a $|f^{-1}(2n)| = k$.

Par construction, on a $T(f)^{-1}(2n - 2) = f^{-1}(2n - 2) \cup (f^{-1}(2n)\setminus\{2n - 1, 2n\})$. D'où $|T(f)^{-1}(2n - 2)| = |f^{-1}(2n - 2)| + k - 2$.
Or

$$|f^{-1}(2n - 2)| = 2n - |f^{-1}(2n)| - \sum_{1 \le i \le n-2} |f^{-1}(2i)|$$

et

$$1 \le |f^{-1}(2n - 2)| \le 2n - k - (n - 2) = n - k + 2 \qquad \text{(axiome (ii))}.$$

Donc

$$k - 1 \le |T(f)^{-1}(2n - 2)| \le n.$$

Ainsi T applique $F_{2n,k}$ dans la réunion des $F_{2n-2,i}$, l'entier i décrivant $[k - 1, n]$.

Réciproquement, soit g un élément de $F_{2n-2,i}$ $(k - 1 \le i \le n)$. Pour construire un antécédent f de g par T, il suffit de former $f^{-1}(2n)$. Or

$$f^{-1}(2n) = \{2n - 1, 2n\} \cup L, \text{ où } L \subset g^{-1}(2n - 2).$$

Pour que $f \in F_{2n,k}$ il faut et il suffit que $|L|$ soit égal à $k - 2$. Il y a donc autant d'antécédents f dans $F_{2n,k}$ que de parties L de cardinal $k - 2$ dans l'ensemble $g^{-1}(2n - 2)$ qui a i éléments, soit $\binom{i}{k-2}$.

En récapitulant avec la phrase soulignée plus haut,

$$|F_{2n,k}| = \sum_{k-1 \leq i \leq n} \binom{i}{k-2} |F_{2n-2,i}| \text{ et } |F_{2,2}| = 1$$

récurrence identique à l'identité (6) donnant les entiers $B_{n,k}$.

Corollaire. *Le cardinal de F_{2n} est égal à $|G_{2n+2}|$.*

En effet, F_{2n} est la réunion disjointe des $F_{2n,k}$, k décrivant le segment $[2, n + 1]$ (d'après l'axiome (ii), si k est extérieur à ce segment, $F_{2n,k}$ est vide). D'où

$$|F_{2n}| = \sum_{2 \leq k \leq n+1} |F_{2n,k}| = \sum_{2 \leq k \leq n+1} B_{n,k} = |G_{2n+2}|.$$

5. Un codage des permutations en termes d'applications excédantes. Nous en venons maintenant à la construction d'un codage des permutations par les applications excédantes, codage qui nous permettra d'une part de proposer une nouvelle interprétation des nombres eulériens, d'autre part de transposer l'interprétation des G_{2n} en termes d'applications excédantes en dénombrements de permutations.

Soit S_n l'ensemble des permutations de $[n]$, et $S_{n,k}$ le sous-ensemble de S_n formé des permutations ayant k 0-excédances. Si $p \in S_{n,k}$, on note E_p^0 l'ensemble de ses 0-excédances ($|E_p^0| = k$).

Soit E_n l'ensemble des applications excédantes de $[n]$ dans $[n]$, et $E_{n,k}$ le sous-ensemble formé des applications f de E_n ayant un ensemble-image de k éléments ($|f[n]| = k$).

Il est clair que $|E_n| = n!$, car un élément de E_n est un n-uplet $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ du produit cartésien $[1, n] \times [2, n] \times \cdots \times \{n\}$. De façon plus précise,

Théorème 4. *Il existe une bijection h de S_n sur E_n telle que*
(i) $h(S_{n,k}) = E_{n,k}$
(ii) *Si $f = h(p)$, on a $E_p^0 \subset F$ et $pr_v(E_p^0) = pr_v(F)$.*

Notons que (i) est une conséquence immédiate de (ii). Pour la construction de h, nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme. *Soit p une permutation de $[n]$, et j un entier de $[n]$. Posons*

$$U_j = ([j, n] \times [1, j - 1]) \cap P$$

et

$$V_j = ([1, j - 1] \times [j, n]) \cap P.$$

Alors on a $|U_j| = |V_j|$, et, conséquence évidente, $|\mathrm{pr}_v(U_j)| = |\mathrm{pr}_v(V_j)|$.

En effet, si on pose $W_j = ([1, j - 1] \times [1, j - 1]) \cap P$, on a

$|U_i| + |W_i| = j - 1$ (nombre de points de P sur les $(j - 1)$ premières lignes)
$|V_i| + |W_i| = j - 1$ (nombre de points de P sur les $(j - 1)$ premières colonnes).

A présent, on construit $f = h(p)$ comme suit. Soit $j \in [n]$. Si (j, p_i) est une 0-excédance, on pose $f_i = p_i$ (d'où $E_p^0 \subset F$). Sinon, $(j, p_i) \in U_i$ et $p_i \in \mathrm{pr}_v(U_i)$. D'après le lemme, les ensembles $\mathrm{pr}_v(U_i)$ et $\mathrm{pr}_v(V_i)$ sont deux sous-ensembles de $[n]$ de même cardinal. Nous pouvons induire sur chacun d'eux l'ordre de $[n]$ et, en tant qu'ensembles totalement ordonnés, ils sont alors isomorphes. Si $z: \mathrm{pr}_v(U_i) \to \mathrm{pr}_v(V_i)$ est l'isomorphisme en question, on pose $f_i = z(p_i)$.

Dans les deux cas de construction, on a $j \leq f_i$ et f excédante. Nous avons vu au passage que $E_p^0 \subset F$, donc que $\mathrm{pr}_v(E_p^0) \subset \mathrm{pr}_v(F)$. Montrons que $\mathrm{pr}_v(F) \subset \mathrm{pr}_v(E_p^0)$:
Si (j, p_i) est une 0-excédance, $f_i = p_i$ appartient bien à $\mathrm{pr}_v(E_p^0)$. Sinon, $f_i = z(p_i)$ appartient à $\mathrm{pr}_v(V_i)$. Or $V_i \subset E_p^0$ par définition. Il nous reste à prouver que h est bijective, et pour cela il suffit de prouver qu'elle est injective $(|S_n| = |E_n|)$.

Soit p et p' deux permutations distinctes, et j le plus petit entier tel que $p_i \neq p_i'$. D'abord, on a

$$p([1, j - 1]) = p'([1, j - 1]),$$

soit

$$V_i = V_i' \text{ et } W_i = W_i',$$

par suite

$$\mathrm{pr}_v(W_i) = \mathrm{pr}_v(W_i') \text{ et } \mathrm{pr}_v(U_i) = \mathrm{pr}_v(U_i').$$

Trois cas se présentent alors:
a) (j, p_i) et (j, p_i') sont deux 0-excédances. Alors $f_i = p_i \neq p_i' = f_i'$.
b) $p_i' < j \leq p_i$ et le cas symérique. On a $f_i = p_i$ et $f_i' \in \mathrm{pr}_v(V_i') = \mathrm{pr}_v(V_i)$. Donc il existe $i < j$ tel que $f_i' = p_i$, et on a

$$f_i = p_i \neq p_i = f_i'.$$

c) p_i et $p_i' < j$. Alors p_i et p_i' sont deux éléments de $\mathrm{pr}_v(U_i) = \mathrm{pr}_v(U_i')$, et $\mathrm{pr}_v(V_i) = \mathrm{pr}_v(V_i')$, donc $z = z'$, et $f_i = z(p_i) \neq z(p_i') = f_i'$. Dans tous les cas, $f_i \neq f_i'$ et par conséquent $f \neq f'$.

Exemple. Soit $n = 8$, $p = \begin{pmatrix}12345678\\64521738\end{pmatrix}$. Construisons $f = h(p)$: $f_1 = 6$ $f_2 = 4$ $f_3 = 5$ $\mathrm{pr}_v(U_4) = \{1, 2, 3\}$ et $\mathrm{pr}_v(V_4) = \{4, 5, 6\}$ $f_4 = z(2) = 5$ $\mathrm{pr}_v(U_5) = \{1, 3\}$ et $\mathrm{pr}_v(V_5) = \{5, 6\}$ $f_5 = z(1) = 5$ $f_6 = 7$ $\mathrm{pr}_v(U_7) = \{3\}$ et $\mathrm{pr}_v(V_7) = \{7\}$ $f_7 = z(3) = 7$ $f_8 = 8$ $f = \begin{pmatrix}12345678\\64555778\end{pmatrix}$. On vérifie que, p appartenant à $S_{8,5}$, f appartient à $E_{8,5}$.

Les *nombres eulériens* $A(n, k)$ sont définis par la récurrence

$$A(1, 1) = 1, A(1, k) = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq 1 \text{ et}$$

$$A(n, k) = k\, A(n-1, k) + (n-k+1)\, A(n-1, k-1) \text{ pour } k \in [1, n].$$

Les premières valeurs de ces nombres sont données dans la table ci-dessous

C'est un résultat classique (cf. Carlitz [3], Riordan [17] pp. 213–216, Foata-Schützenberger [9]) que $A(n, k)$ est égal à $|S_{n,k}|$ (on démontre aussi que $A(n, k)$ dénombre les permutations de $[n]$ ayant k "descentes" au sens donné dans le paragraphe suivant). Nous déduisons donc du théorème 4 *une nouvelle interprétation combinatoire des nombres eulériens,* à savoir

Corollaire. *On a*

$$A(n, k) = |E_{n,k}| \textit{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

6. Interprétations en termes de permutations.

Théorème 5. *Soit $P_{2n}{}^0$ l'ensemble des permutations p de $[2n]$ telles que: (i, p_i) est une 0-excédance si et seulement si p_i est pair. Alors le cardinal de $P_{2n}{}^0$ est égal à $|G_{2n+2}|$.*

En effet, $P_{2n}{}^0$ est une partie de $S_{2n,n}$. D'après le théorème 4, l'image de $P_{2n}{}^0$ est le sous-ensemble de $E_{2n,n}$ constitué des applications $f\colon [2n] \to [2n]$ excédantes et telles que $\mathrm{pr}_v(F) = \{2, 4, 6, \cdots, 2n\}$. Par définition, il s'agit de l'ensemble F_{2n}. On a donc

$$|P_{2n}{}^0| = |h(P_{2n}{}^0)| = |F_{2n}| = |G_{2n+2}|.$$

Pour la suite de l'exposé, nous préférons l'énoncé suivant, qui est *à* peine différent:

Théorème 5 bis. *Soit P_{2n} l'ensemble des permutations p de $[2n]$ telles que: (i, p_i) est une 1-excédance si et seulement si p_i est pair. Alors le cardinal de P_{2n} est égal à $|G_{2n+2}|$.*

En effet, soit $c\colon [2n] \to [2n]$ l'involution où $c(i) = 2n + 1 - i$, et $C\colon S_{2n} \to S_{2n}$ l'involution alors définie par $C(p) = cpc$. Montrons que C applique $P_{2n}{}^0$ sur P_{2n}. Soit $p \in P_{2n}{}^0$ et $p' = C(p)$:

TABLE 4

n \ k	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1	4	1		
4	1	11	11	1	
5	1	26	66	26	1

Eulerian nos

$$i < p'(i) \Leftrightarrow j = c(i) > c(p'(i)) = c(p'(c(j))) = p(j)$$
$$\Leftrightarrow p(j) \text{ impair}$$
$$\Leftrightarrow c(p(j)) = c(p(c(i))) = p'(i) \text{ pair.}$$

COROLLAIRE 1. *Soit P_{2n}^{-1} l'ensemble des permutations p de $[2n]$ telles que: (i, p_i) est une 0-excédance si et seulement si i est impair. Alors le cardinal de P_{2n}^{-1} est égal à $|G_{2n+2}|$.*

En effet, soit p un élément de P_{2n} . On a:
$j = p(i) \leq i = p^{-1}(j)$ si et seulement si $p(i) = j$ est impair, donc $p^{-1} \in P_{2n}^{-1}$

Remarque. Les trois classes de permutations que nous venons de définir sont des *permutations à positions interdites.* Pour P_{2n}^{0}, on interdit les portions de lignes impaires situées au-dessus de la diagonale, et les portions de lignes paires situées en-dessous de la diagonale. La différence avec P_{2n} tient seulement aux cases situées sur la diagonale. Même schéma pour P_{2n}^{-1}: on interdit les portions de colonnes impaires situées strictement sous la diagonale et les portions de colonnes paires situées au-dessus de la diagonale (case de la diagonale comprise).

En outre, les permutations de P_{2n}^{-1} sont *alternantes* au sens d'André, c'est-à-dire qu'elles montent ou descendent suivant la parité de l'objet i. Plus exactement, dans l'ensemble de toutes les permutations alternantes (qui, érappelons-le, sont dénombrées par le nombre tangent) elles ont la propriété caractéristique que *l'ensemble des "pics" se confond avec l'ensemble des 0-excédances* (alors que dans le cas général on ne peut même pas dire qu'il y a inclusion d'un de ces deux ensembles dans l'autre.

Les permutations de P_{2n}^{-1} ont une autre propriété caractéristique dans l'ensemble de toutes les permutations commençant par une descente ($p(1) > p(2)$): si l'on trace le "graphe" de la permutation p, c'est-à-dire la ligne brisée réunion des segments joignant (i, p_i) à $(i + 1, p_{i+1})(1 \leq i \leq 2n - 1)$, ce graphe franchit $2n - 1$ fois la diagonale ou plus précisément toute droite d'équation $y = x + a$ ($0 < a < 1$, inégalités strictes) si et seulement si p est une permutation de P_{2n}^{-1}.

Il nous reste à démontrer le résultat annoncé dans l'introduction sur les permutations qui montent et descendent suivant la parité de l'image $p(i)$. Pour donner un énoncé aussi proche que possible de celui, classique, qui concerne le dénombrement de toutes les permutations alternantes sur $2n + 1$ lettres, nous donnons un énoncé concernant un nombre impair de lettres. Il va de soi (c'est d'ailleurs apparent dans la démonstration) que nous pouvions donner un énoncé avec le même nombre de lettres $2n$ que précédemment.

COROLLAIRE 2. *Soit $\hat{P}_{2n+1}$ l'ensemble des permutations p de $[2n + 1]$ telles que $p_i - p_{i+1}$ soit du signe de $(-1)^{p_i}$. Alors le cardinal de $\hat{P}_{2n+1}$ est égal à $|G_{2n+2}|$.*

La démonstration repose sur la "transformation fondamentale" $p \to \hat{p}$ de Foata que nous nous bornerons à "décrire" sur un exemple. Pour les définitions et résultats rigoureux, voir [9].

Soit par exemple $p = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 38475216 \end{pmatrix}$ que l'on décompose en "cycles" ou "orbites" de la manière habituelle: $p = (1347)(286)(5)$. Dans chaque orbite, on marque l'élément maximum, puis on range les orbites par ordre croissant des éléments maxima: $(\underline{5})(134\underline{7})(2\underline{8}6)$.

Enfin, on récrit chaque orbite en partant de l'élément maximum, et "à l'envers", c'est-à-dire en faisant suivre l'élément maximum de ses images itérées p^{-1}: $(\underline{5})(\underline{7}431)(\underline{8}26)$.

En "supprimant les parenthèses, "on obtient $\hat{p} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 57431826 \end{pmatrix}$

La construction est conçue de telle sorte que *les 1-excédances de p deviennent les descentes de $\hat{p}$.*

Sur notre exemple, p a 4 1-excédances: (1, 3), (2, 8), (3, 4), (4, 7) et $\hat{p}$ a 4 descentes qui leur correspondent: 3–1, 8–2, 4–3 et 7–4.

Cette transformation bijective permet donc d'expliquer pourquoi les permutations de $[n]$ ayant k 1-excédances sont en nombre égal à celles qui ont k descentes, ce qu'on démontrait depuis Mac Mahon par le calcul.

Revenons au corollaire 2. Quelle est l'image de P_{2n} par la transformation fondamentale? C'est l'ensemble des permutations $\hat{p}$ de $[2n]$ ayant n descentes issues des n images paires $\hat{p}(i)$, ou encore telles que

i) $\hat{p}_i - \hat{p}_{i+1}$ soit du signe de $(-1)^{\hat{p}_i}$.

ii) $\hat{p}_{2n}$ soit impair.

Prolongeons une telle permutation $\hat{p}$ en une permutation $\hat{p}'$ de $[2n + 1]$ où l'on pose $\hat{p}'(2n + 1) = 2n + 1$. Il est clair que $\hat{p}' \in \hat{P}_{2n+1}$.

Réciproquement, si $\hat{p}' \in \hat{P}_{2n+1}$, nécessairement $\hat{p}'(2n + 1) = 2n + 1$, car si on avait $\hat{p}(i) = 2n + 1$ pour $i < 2n + 1$, on aurait $\hat{p}'(i) < \hat{p}'(i + 1)$, ce qui est impossible. De plus, $\hat{p}'(2n)$ est impair, car inférieur à $\hat{p}'(2n + 1)$.

Par conséquent, les permutations du corollaire 2 sont exactement les prolongées des permutations $\hat{p}$, p décrivant P_{2n}.

Exemple: Voici les permutations de $\hat{P}_7$, qui sont au nombre de 17 ($G_8 = 17$):

2143657, 2156437, 2164357, 3421657, 3564217, 3642157, 4213657, 4215637, 4216357, 4356217, 4362157, 5621437, 5634217, 5642137, 6214357, 6342157, 6421357.

Bibliographie

1. D. André, *Développements de sec x et de tan x*, C. R. Acad. Sc. Paris, vol. 88(1879), pp. 965–967.
2. ———, *Sur les permutations alternées*, J. Math. Pures Appl., vol. 7(1881), pp. 167–184.
3. L. Carlitz, *Eulerian numbers and polynomials*, Math Magazine, vol. 32(1959), pp. 247–260.
4. ———, *The Staudt-Clausen Theorem*, Math. Magazine, vol. 35(1961), pp. 131–146.
5. L. Carlitz and J. Riordan, *The divided central differences of zero*, Canad. J. Math., vol. 15(1963), pp. 94–100.
6. L. Carlitz, *A conjecture concerning Genocchi numbers*, K. norske Vidensk. Selsk. Sk., vol. 9(1972), pp. 1–4.

7. L. COMTET, *Analyse combinatoire*, collection SUP, P.U.F., Paris, 1970.
8. D. DUMONT, *Sur une conjecture de Gandhi concernant les nombres de Genocchi*, Discrete Mathematics, vol. 1, no. 4(1972), pp. 321–327.
9. D. FOATA ET M. -P. SCHÜTZENBERGER, *Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens*, Lecture Notes in Math no. 138, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
10. ———, Nombres d'Euler et permutations alternantes, *A survey of Combinatorial Theory*, (J. N. Srivastava, Ed.), North-Holland, Amsterdam, 1973.
11. J. M. GANDHI, *A conjectured representation of Genocchi numbers*, Amer. Math. Monthly, vol. 77(1970), pp. 505–506.
12. J. LOHNE, *Power sums of natural numbers*, Nord. Mat. Tidskrift, vol. 6(1958), pp. 155–158.
13. R. TAMBS LYCHE, *Supplement to the preceding article*, Nord. Mat. Tidskrift, vol. 6(1958), pp. 159–161.
14. A. LUCAS. *Théorie des nombres*, vol. 1, Gauthiers-Villars, Paris, 1891.
15. N. NIELSEN, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*, Gauthiers-Villars, Paris, 1923.
16. F. -H. POUSSIN, *Polynômes et nombres d'Euler*, Thèse de doctorat de 3e cycle, Paris, 1970.
17. J. RIORDAN, *An introduction to Combinatorial Analysis*, J. Wiley, New-York, 1953.
18. J. RIORDAN AND P. R. STEIN. *Proof of a conjecture on Genocchi numbers*, Discrete Mathematics, à paraître.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE, UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR DE STRASBOURG, 7, RUE RENÉ DESCARTES, 67084 STRASBOURG, FRANCE