5700
6149
-6150

[5c83]

3me CYCLE
D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

N° d'ordre : 1834

apporter Bell avril LABS

THÈSE

PRÉSENTÉE DEVANT

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR EN INFORMATIQUE

myriam@labri.fr

par

Myriam DE SAINTE-CATHERINE

COUPLAGES ET PFAFFIENS EN COMBINATOIRE,
PHYSIQUE ET INFORMATIQUE

Soutenue le 30 Mars 1983 *, devant la Commission d'examen :*

MM. M. MENDES-FRANCE .... **Président.**

H. COHEN ....
R. CORI ....
R. GEORGES .... Examinateurs
P. LAFON ....
G. VIENNOT ....

— 1983 —

$$\text{(III. 19)} \quad \begin{cases} \ell \leq n, \\ 1 < a_1 < a_2 < \dots < a_{\ell-1} < a_\ell , \\ 1 < b_1 < b_2 < \dots < b_{\ell-1} , \\ a_i \leq b_i \quad \text{pour} \quad i \in [1, \ell-1], \\ 1 < a_i \leq n-2 \quad \text{pour} \quad i \in [1, \ell-1], \\ a_\ell \leq n , \\ 1 < b_i \leq n-1 \quad \text{pour} \quad i \in [1, \ell-1] . \end{cases}$$

LEMME III. 19. -

L'ensemble des couples de suites vérifiant (III. 19) est en bijection avec l'ensemble des mots de Motzkin colorés à n-1 lettres .

Preuve :

On utilise la bijection ψ' définie entre les couples de suites vérifiant (III. 10) et (III. 11) et certains couples de chemins du plan ne se coupant pas. Rappelons cette bijection ψ' :

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ le couple de suites. On associe à chacune des suites , un chemin dans le plan . Soit $ch(a) = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$ le chemin associé à la suite (a_i) , il est tel que :

$$\forall i \in [1, n], \ \exists j \in [1, \ell], i = a_j \Rightarrow \omega_i = E \text{ (pas Est) },$$

$$\forall i \in [1, n], \ \forall j \in [1, \ell], i \neq a_j \Rightarrow \omega_i = N \text{ (pas Nord) }.$$

On définit de même ch(b) .

Exemple $n = 5$.

$(a_i)_{1 \leq i \leq 3} = (1, 2, 4)$,

$(b_i)_{1 \leq i \leq 2} = (2, 3)$.

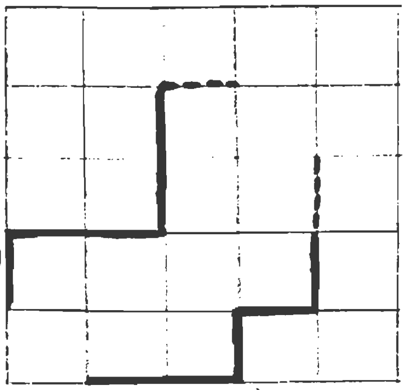

Figure III. 12.

Ajoutons un pas à chaque chemin (voir Figure III. 12) : un pas Est pour ch(b) et un pas Nord pour ch(a), de manière à pouvoir associer au couple formé, un mot de Motzkin coloré, par une bijection ψ'' :

Soient $ch(a) = \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n$,
$ch(b) = \omega'_1 \omega'_2 \cdots \omega'_n$, et $\psi''(ch(a), ch(b)) = u = u_1 \ldots u_n$.

$$\left|\begin{array}{l} \omega_i = E \text{ et } \omega'_i = N \Rightarrow u_i = x, \\ \omega_i = E \text{ et } \omega'_i = E \Rightarrow u_i = B, \\ \omega_i = N \text{ et } \omega'_i = N \Rightarrow u_i = R, \\ \omega_i = N \text{ et } \omega'_i = E \Rightarrow u_i = \bar{x}. \end{array}\right.$$

L'ajout d'un pas aux chemins revient à concaténer un $\bar{x}$ à u. Soit donc $v = u\bar{x} = v_1 v_2 v_3 \ldots v_{n+1}$.

Remarquons de plus, que les deux derniers pas de ch(b) sont toujours verticaux. Ceci implique :

$$v_{n-1} = x \text{ ou } R,$$
$$v_n = x \text{ ou } R.$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Donc} & v = v' R x \bar{x} , & \\ \text{ou} & v = v' R R \bar{x} , & \\ \text{ou} & v = v' x R \bar{x} , & \text{avec } |v'| = n-2 . \end{array}\right\} \quad (\text{III. } 20)$$

Notons $\mathcal{M}^{cm}_{n+1}$ l'ensemble des mots de Motzkin "modifiés", c'est-à-dire qui satisfont (III. 20) .

$$u \in \mathcal{M}^{c}_{n+1} \Rightarrow \begin{array}{l} u = u' R , \\ \text{ou } u = u'B , \\ \text{ou } u = u'\bar{x} , \quad \text{avec } |u'| = n - 1 . \end{array}$$

Soit $\varphi : \mathcal{M}^{cm}_{n+1} \to \mathcal{M}^{c}_{n-1}$.

telle que :

$$\forall w \in \mathcal{M}^{cm}_{n+1} , w = w_1 w_2 \ldots w_{n+1} , \varphi(w) = u = u_1 u_2 \ldots u_{n-1} ,$$

avec $\begin{cases} \forall i \in [1, n-2] , u_i = w_i . \\ w_{n-1} = x , w_n = R , w_{n+1} = \bar{x} \Rightarrow u_{n-1} = R , \\ w_{n-1} = R , w_n = x , w_{n+1} = \bar{x} \Rightarrow u_{n-1} = B, \\ w_{n-1} = R , w_n = R , w_{n+1} = \bar{x} \Rightarrow u_{n-1} = \bar{x} . \end{cases}$

Il est trivial de vérifier que φ est une bijection (Fin de preuve du lemme III. 19) .

Comme $|\mathcal{M}^{c}_{n-1}| = C_n$ (voir Lemme III. 11) , on en déduit la Proposition III. 17 ∎

A91962
A330 A6858

Tableau III. 5.

A5700 ?

p \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1											
2	1		1										
3		2		1									
4	1		5		1								
5		3		14		1							
6	1		14		42		1						
7		4		84		132		1					
8	1		30		594		429		1				
9		5		330		4719		1430		1			
10	1		55		4719		40898		4862		1		
11		6		1001		81796		379236		16796		1	
[illegible]	1		91		26026		1643356		3711916		58786		1
13		7		2548		884884		37119160		37975756		208012	
14	1		140		111384		37119160		922268360		403127256		742900
15		8		5712		6852768		1844536720		24801924512		...	
16	1		204		395352		553361016		105408179176		713055329720		...
17		9		11628		41314284		55804330152		6774025632340		...	
18	1		285		1215126		6018114036		6774025632340		...		...
19		10		21945		20495152		...		...		...	
20	1		385		3331251		51067020290		...		...		...
21		11		38962		869562265		...		...		...	
22	1		506		8321170		...		...		...		...
23		12		65780		...		...		...		...	
24	1		650		19240750		...		...		...		...
[illegible]		13		...		...		...		...		...	
26	1		819		41683005		...		...		...		...
27		14		...		...		...		...		...	
28	1		975		...		...		...		...		...

6149
6150
6151

A A185249 5700

Tableau III. 5.

A330 A6858

A108

5700

6149

6150

6151

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1											
2	1		1										
3		2		1									
4	1		5		1								
5		3		14		1							
6	1		14		42		1						
7		4		84		132		1					
8	1		30		594		429		1				
9		5		330		4719		1430		1			
10	1		55		4719		40898		4862		1		
11		6		1001		81796		379236		16796		1	
12	1		91		26026		1643356		3711916		58786		1
13		7		2548		884884		37119160		37975756		208012	
14	1		140		111384		37119160		922268360		403127256		742900
15		8		5712		6852768		1844536720		24801924512		...	
16	1		204		395352		553361016		105408179176		713055329720		...
17		9		11628		41314284		55804330152		6774025632340		...	
18	1		285		1215126		6018114036		6774025632340		...		...
19		10		21945		20495152		...		...		...	
20	1		385		3331251		51067020290		...		...		...
21		11		38962		869562265		...		...		...	
22	1		506		8321170		...		...		...		...
23		12		65780		...		...		...		...	
24	1		650		19240750		...		...		...		...
[illegible]		13		...		...		...		...		...	
26	1		819		41683005		...		...		...		...
27		14		...		...		...		...		...	
28	1		975		...		...		...		...		...