Шестнадцатый Турнир, 1994-1995

Осенний тур

<u>8-9 классы</u>

Тренировочный вариант

(8-9 кл., 16, осень)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, чем на предыдущем танце, либо более умной, а один - с девушкой одновременно более красивой и более умной. Могло ли такое быть? (Юношей и девушек на балу было поровну.)
А.Я. Канель-Белов

Задача 2.(3)
На плоскости даны две окружности одна внутри другой. Построить такую точку O, что одна окружность получается из другой гомотетией относительно точки O (другими словами - чтобы растяжение плоскости от точки O с некоторым коэффициентом переводило одну окружность в другую).
Фольклор

Задача 3.(5)

Найдите какие-нибудь пять натуральных чисел, разность любых двух из которых равна наибольшему общему делителю этой пары чисел.
С.И. Токарев

Задача 4.(5)
В Простоквашинской начальной школе учится всего 20 детей. У любых двух из них есть общий дед. Докажите, что у одного из дедов в этой школе учится не менее 14 внуков и внучек.
А.В. Шаповалов

Основной вариант

(8-9 кл., 16, осень, 23.11.1994)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
В ящиках лежат орехи. Известно, что в среднем в каждом ящике 10 орехов, а среднее арифметическое квадратов чисел орехов в ящиках меньше 1000.
Докажите, что по крайней мере 10% ящиков не пустые.
А.Я. Канель-Белов

Задача 2.(4)
На плоскости дан квадрат 8*8, разбитый на клеточки 1*1. Его покрывают прямоугольными равнобедренными треугольниками (два треугольника закрывают одну клетку). Имеется 64 черных и 64 белых треугольника. Рассматриваются "правильные" покрытия - такие, что любые два треугольника, имеющие общую сторону, разного цвета. Сколько существует правильных покрытий?
Н.Б. Васильев

Задача 3.(4)
Взаимно перпендикулярные прямые l и m пересекаются в точке P окружности так, что они разбивают окружность на три дуги. Отметим на каждой дуге точку такую, что проведенная через неё касательная к

окружности пересекается с прямыми l и m в точках, равноотстоящих от точки касания. Докажите, что три отмеченные точки являются вершинами равностороннего треугольника.
Е. Пржевальский

Задача 4.
Можно ли из последовательности 1, 1/2, 1/3, ... выбрать (сохраняя порядок)
а)(3) сто чисел,
б)(2) бесконечную подпоследовательность чисел,
из которых каждое, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих ($a_k=a_{k-2}-a_{k-1}$)?
С. Токарев

Задача 5.(6)
Периоды двух последовательностей - 7 и 13. Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать? (Период последовательности $\{a_n\}$ - это наименьшее натуральное число p, такое что для любого номера n выполняется равенство $a_n=a_{n+p}$).
А. Канель-Белов

Задача 6.(6)
Сумма шестых степеней шести целых чисел на единицу больше, чем их ушестерённое произведение. Докажите, что одно из чисел равно единице или минус единице, а остальные - нули.
Л. Курляндчик

Задача 7.(9)
Фигура Ф представляет собой пересечение N кругов (радиусы не обязательно одинаковы). Какое максимальное число криволинейных "сторон" может иметь фигура Ф? (Криволинейная сторон - это участок границы Ф, принадлежащий одной из окружностей и ограниченный точками пересечения с другими окружностями.)
Н. Бродский

10-11 классы

Тренировочный вариант

(10-11 кл., 16, осень)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, чем на предыдущем танце, либо более умной, но большинство (не меньше 80 процентов) - с девушкой одновременно более красивой и более умной. Могло ли такое быть? (Юношей и девушек на балу было поровну.)
А.Я. Канель-Белов

Задача 2.(4)

Докажите, что из шести ребер тетраэдра можно сложить два треугольника.
В.В. Произволов

Задача 3.(4)
Пусть a, b, c, d - вещественные числа, такие что $a^3+b^3+c^3+d^3=a+b+c+d=0$.
Докажите, что сумма каких-то двух из этих чисел равна нулю.
Л.Д. Курляндчик

Задача 4.(5)
Полоска 1*10 разбита на единичные квадраты. В квадраты записывают числа 1, 2, ..., 10. Сначала в один какой-нибудь квадрат пишут число 1, затем число 2 записывают в один из соседних квадратов, затем число 3 - в один из соседних с уже занятыми и т. д. (произвольными являются выбор первого квадрата и выбор соседа на каждом шагу). Сколькими способами это можно проделать?
А. Шень

Основной вариант

(10-11 кл., 16, осень, 23.10.1994)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ изменили не больше, чем на 0,001. Может ли больший корень уравнения измениться больше, чем на 1000?
Фольклор

Задача 2.
Покажите, как разбить пространство
а)(2) на одинаковые тетраэдры,
б)(2) на одинаковые равногранные тетраэдры
(тетраэдр называется равногранным, если все его грани - равные треугольники).
Н. Б. Васильев

Задача 3.(4)
В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Медиана AD пересекает её в точках X и Y. Найдите угол $\angle XOY$, если AC=AB+AD.
А. Федотов

Задача 4.(5)
Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ справедливо неравенство
$(1+(a_1^2/a_2))\,(1+(a_2^2/a_3))\ \ldots\ (1+(a_n^2/a_1)) \geq (1+a_1)\,(1+a_2)\ \ldots\ (1+a_n)$
Л.Д. Курляндчик

Задача 5.(6)
Периоды двух последовательностей - m и n - взаимно простые числа. Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать?
(Период последовательности $\{a_i\}$ - это наименьшее натуральное число p, такое что для любого номера k выполняется равенство $a_k=a_{k+p}$.)
А.Я Канель-Белов

Задача 6.(7)
Рассматривается последовательность, n-ый член которой есть первая цифра числа 2^n.
Докажите, что количество различных "слов" длины 13 - наборов из 13 подряд идущих цифр - равно 57.
А. Канель-Белов

Задача 7.(8)
Фигура Ф представляет собой пересечение n кругов (радиусы не обязательно одинаковы). Какое максимальное число криволинейных "сторон" может иметь фигура Ф? (Криволинейная сторона - это участок границы Ф, принадлежащий одной из окружностей и ограниченный точками пересечения с другими окружностями.)
Н. Бродский

Весенний тур

<u>8-9 класс</u>

Тренировочный вариант

(8-9 кл., 16, весна)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
У кассира было 30 монет: 10, 15 и 20 копеек на сумму 5 рублей.
Докажите, что 20-копеечных монет у него было больше, чем 10-копеечных.
Фольклор

Задача 2.(3)
Три кузнечика сидят на прямой так, что два крайних отстоят на 1 м от среднего. Каждую секунду один из кузнечиков прыгает через другого в симметричную точку (если A прыгает через B в точку A_1, то $AB=BA_1$).
Через некоторое время кузнечики оказались на тех же местах, что и вначале, но в другом порядке.
Докажите, что поменялись местами крайние кузнечики.
А. Ковальджи

Задача 3.(4)
Известно, что вершины квадрата T_1 принадлежат прямым, содержащим стороны квадрата T_2, а вписанная окружность квадрата T_1 совпадает с описанной окружностью квадрата T_2.
Найдите углы восьмиугольника, образованного вершинами квадрата T_2 и точками касания окружности со сторонами квадрата T_1, и величины дуг, на которые вершины восьмиугольника делят окружность.
С. Маркелов

Задача 4.

Докажите, что число 40...09 - не полный квадрат (при любом числе нулей, начиная с 1).
В. Сендеров

Основной вариант

(8-9 кл., 16, весна, 12.03.1995)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
Докажите, что если a, b, c - целые числа, и, кроме того,
(a/b) + (b/c) + (c/a) и (a/c) + (c/b) + (b/a) - также целые числа, то $|a|=|b|=|c|$.
А. Грибалко

Задача 2.(4)
Прямая отрезает от правильного 10-угольника ABCDEFGHIJ со стороной 1 треугольник PAQ, в котором PA+AQ=1.
Найдите сумму углов, под которыми виден отрезок PQ из вершин B, C, D, E, F, G, H, I, J.
В. Произволов

Задача 3.(4)
Дан равносторонний треугольник ABC. Найти геометрическое место точек P таких, что отрезки прямых AP и BP, лежащие внутри треугольника, равны.
Фольклор

Задача 4.(5)
Может ли быть простым число a+b+c+d, если a, b, c и d - целые положительные числа и ab=cd?
Фольклор

Задача 5.(8)
Есть 4 равных прямоугольных треугольника. Разрешается любой разрезать на два по высоте, опущенной на гипотенузу. С полученными треугольниками можно повторять эту операцию.
Докажите, что после любого числа таких операций среди треугольников найдутся равные.
А.В. Шаповалов

Задача 6.(8)
Может ли случиться, что 6 попарно непересекающихся параллелепипедов расположены в пространстве так, что из некоторой им не принадлежащей точки пространства не видно ни одной из их вершин? (Параллелепипеды непрозрачны.)
В. Произволов, С. Маркелов, А. Я. Канель-Белов

Задача 7.
Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на консервах стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может это всем доказать (то есть обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов.
Докажите, что для этой цели ему
а)(4) достаточно четырёх взвешиваний и
б)(4) недостаточно трёх.
А.К. Толпыго

10-11 класс

Тренировочный вариант

(10-11 кл., 16, весна)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
На отрезке [0,1] числовой оси расположены четыре точки: a, b, c, d.
Докажите, что найдётся точка x, принадлежащая [0,1], такая, что
$(1/|x-a|)+(1/|x-b|)+(1/|x-c|)+(1/|x-d|)<40$.
Л. Курляндчик

Задача 2.
Четыре кузнечика сидели в вершинах квадрата. Каждую секунду один из кузнечиков прыгает через другого в симметричную точку (если A прыгает через B в точку A_1, то векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA_1}$ равны).
Докажите, что три кузнечика не могут оказаться
а)(3) на одной прямой, параллельной стороне квадрата;
б)(3) на одной произвольной прямой.
А. Ковальджи

Задача 3.
Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Прямые AC и BC вторично пересекают описанную окружность треугольника AOB в точках E и K.
Докажите, что прямые OC и EK перпендикулярны.
С. Маркелов

Задача 4.(4)
Докажите, что число a0...09 - не полный квадрат (при любом числе нулей, начиная с одного; a - цифра, отличная от 0).
В. Сендеров

Основной вариант

(10-11 кл., 16, весна, 12.03.1995)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
Существует ли такая сфера, на которой имеется ровно одна рациональная точка? (Рациональная точка - точка, у которой все три декартовы координаты - рациональные числа.)
А. Рубин

Задача 2.(4)
При каких n можно раскрасить в три цвета все ребра n-угольной призмы (основания - n-угольники) так, что в каждой вершине сходятся все три цвета и у каждой грани (включая основания) есть стороны всех трёх цветов?
А.В. Шаповалов

Задача 3.(5)
На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности.
Докажите, что все четыре касательные, проведенные к окружностям из точки пересечения диагоналей, равны между собой (если эта точка лежит вне окружностей).
С. Маркелов

Задача 4.(6)
На координатной плоскости отмечены некоторые точки с целыми координатами. Дано, что никакие четыре из них не лежат на одной окружности.
Докажите, что найдётся круг радиуса 1995, в котором не отмечено ни одной точки.
А.В. Шаповалов

Задача 5.
а)(3) Разбейте отрезок [0,1] на черные и белые интервалы так, чтобы для любого многочлена p(x) степени не выше второй сумма приращений p(x) по всем чёрным интервалам равнялась сумме приращений p(x) по всем белым интервалам. (Приращением p(x) по интервалу (a,b) называется число p(b)-p(a)).
б)(4) Удастся ли проделать аналогичную операцию для всех многочленов степени не выше 1995?
Г. В. Кондаков

Задача 6.(8)
Существует ли такой невыпуклый многогранник, что из некоторой точки M, лежащей вне него, не видна ни одна из его вершин? (Многогранник сделан из непрозрачного материала, так что сквозь него ничего не видно.)
А.Я. Канель-Белов, С. Маркелов

Задача 7.(10)
Докажите, что среди 50 человек найдутся двое, у которых чётное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.
С.И. Токарев

Englich

Sixteenth Tournament, 1994-1995

Autumn tour

8-9 grades

Training option

(8-9 grades, 16, autumn)
(The total is summed up on three tasks for which the best results have been achieved)

Problem 1. (3)
During the ball, each young man danced a waltz with a girl who was either more beautiful than at the previous dance, or more intelligent, and one - with a girl who was both more beautiful and more intelligent. Could this be? (There were equal numbers of boys and girls at the ball.)
A.Ya. Kanel-Belov

Problem 2. (3)
Two circles are given on the plane, one inside the other. Construct a point O such that one circle is obtained from another by a homothety about the point O (in other words, so that the extension of the plane from the point O with a certain coefficient translates one circle into another).
Folklore

Problem 3. (5)

Find any five natural numbers, the difference of any two of which is equal to the greatest common divisor of this

pair of numbers.
S.I. Tokarev

Problem 4. (5)
Only 20 children study at Prostokvashinskaya primary school. Any two of them have a common grandfather. Prove that one of the grandfathers has at least 14 grandchildren and granddaughters in this school.
A.V. Shapovalov

Basic option

(8-9 grades, 16, autumn, 11/23/1994)
(The total is summed up in three tasks for which the best results have been achieved)

Problem 1. (3)
There are nuts in the boxes. It is known that on average there are 10 nuts in each box, and the arithmetic mean of the squares of the numbers of nuts in the boxes is less than 1000.
Prove that at least 10% of the boxes are not empty.
AND I. Kanel-Belov

Problem 2. (4)
An 8 * 8 square is given on the plane, divided into 1 * 1 cells. It is covered with right-angled isosceles triangles (two triangles cover one cell). There are 64 black and 64 white triangles. The "regular" coverings are considered - such that any two triangles having a common side are of different colors. How many correct coatings are there?
N.B. Vasiliev

Problem 3. (4)
Mutually perpendicular lines l and m intersect at the point P of the circle so that they divide the circle into three arcs. We mark on each arc a point such that the tangent to the circle drawn through it intersects the straight lines l and m at points equidistant from the tangency point.
Prove that the three marked points are the vertices of an equilateral triangle.
E. Przhevalsky

Problem 4.
Is it possible to choose from the sequence 1, 1/2, 1/3, ... (keeping the order)
a) (3) one hundred numbers,
b) (2) an infinite subsequence of numbers,
each of which, starting from the third, is equal to the difference between the two previous ones ($a_k = a_{k-2} - a_{k-1}$)?
S. Tokarev

Problem 5. (6) The
periods of the two sequences are 7 and 13. What is the maximum length of the initial piece that can coincide with them? (The period of the sequence $\{a_n\}$ is the smallest natural number p such that for any number n the equality $a_n = a_{n+p}$ holds).
A. Kanel-Belov

Problem 6. (6)
The sum of sixth powers of six integers is one more than their sixth product.
Prove that one of the numbers is equal to one or minus one, and the rest are zeros.
L. Kurlyandchik

Problem 7. (9)
Figure Φ is the intersection of N circles (the radii are not necessarily the same). What is the maximum number of curved "sides" that the F shape can have? (A curved side is a section of the boundary Φ that belongs to one of the circles and is bounded by the points of intersection with other circles.)
N. Brodsky

<u>10-11 grades</u>

Training option

(10-11 grades, 16, autumn)
(The total is summed up on three tasks for which the best results have been achieved)

Problem 1. (3)
During the ball, each young man danced a waltz with a girl who was either more beautiful than at the previous dance, or more intelligent, but the majority (not less than 80 percent) - with a girl who was both more beautiful and more intelligent. Could this be? (There were equal numbers of boys and girls at the ball.)
A.Ya. Kanel-Belov

Problem 2. (4)

Prove that six edges of a tetrahedron can be added to two triangles.
V.V. Arbitrariness

Problem 3. (4)
Let a, b, c, d be real numbers such that $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d = 0$.
Prove that the sum of any two of these numbers is equal to zero.
L. D. Kurlyandchik

Problem 4. (5)
Strip 1 * 10 is divided into unit squares. The numbers 1, 2, ..., 10 are written into the squares. First, the number 1 is written into one of the squares, then the number 2 is written into one of the neighboring squares, then the number 3 is written into one of the neighboring ones with already occupied ones, etc. . (the choice of the first square and the choice of a neighbor at each step are arbitrary). How many ways can you do this?
A. Shen

Basic option

(10-11 grades, 16, autumn, 10/23/1994)
(The total is summed up in three tasks for which the best results have been achieved)

Problem 1. (3)
The coefficients of the quadratic equation $x^2 + px + q = 0$ changed by no more than 0.001. Can the larger root of the equation change by more than 1000?
Folklore

Problem 2.
Show how to split the space
a) (2) into identical tetrahedra,
b) (2) into identical isohedral tetrahedra
(a tetrahedron is called isohedral if all its faces are equal triangles).
N. B. Vasiliev

Problem 3. (4)
A circle with center O is inscribed in triangle ABC. Median AD intersects it at points X and Y.
Find angle $\angle XOY$ if AC = AB + AD.
A. Fedotov

Problem 4. (5)
Prove that for any positive numbers $a_1, ..., a_n$ the inequality
$(1+ (a_1^2 / a_2)) (1+ (a_2^2 / a_3))$ holds . . $(1+ (a_n^2 / a_1)) \geq (1 + a_1) (1 + a_2) ... (1 + a_n)$
L.D. Kurlyandchik

Problem 5. (6) The
periods of two sequences - m and n - are coprime numbers. What is the maximum length of the initial piece that they can match?
(The period of the sequence $\{a_i\}$ is the smallest natural number p such that for any number k the equality $a_k =$

a_{k+p} *holds* .)
A. Ya Kanel-Belov

Problem 6. (7)
Consider a sequence, the n-th term of which is the first digit of the number 2^n .
Prove that the number of different "words" of length 13 - sets of 13 consecutive digits - is equal to 57.
A. Kanel-Belov

Problem 7. (8)
Figure Φ is the intersection of n circles (the radii are not necessarily the same). What is the maximum number of curved "sides" that the F shape can have? (A curved side is a section of the boundary Φ, belonging to one of the circles and bounded by the points of intersection with other circles.)
N. Brodsky

Spring tour

8-9 grade

Training option

(8-9 grades, 16, spring)
(The total is summed up on three tasks for which the best results have been achieved)

Problem 1. (3)
The cashier had 30 coins: 10, 15 and 20 kopecks for the amount of 5 rubles.
Prove that he had more 20-kopeck coins than 10-kopeck coins.
Folklore

Problem 2. (3)
Three grasshoppers sit on a straight line so that the two outermost ones are 1 m away from the middle one. Every second one of the grasshoppers jumps over the other to a symmetrical point (if A jumps over B to point A_1 , then $AB = BA_1$). After a while, the grasshoppers ended up in the same places as at the beginning, but in a different order.
Prove that the extreme grasshoppers have changed places.
A. Kovalji

Problem 3. (4)
It is known that the vertices of the square T_1 belong to the straight lines containing the sides of the square T_2 , and the inscribed circle of the square T_1 coincides with the circumscribed circle of the square T_2 .
Find the angles of the octagon formed by the vertices of the square T_2 and the tangency points of the circle with the sides of the square T_1 , and the values of the arcs into which the vertices of the octagon divide the circle.
S. Markelov

Problem 4.

Prove that the number 40 ... 09 is not a complete square (for any number of zeros, starting from 1).
V. Senderov

Basic option

(8-9 grades, 16, spring, 03/12/1995)
(The total is summed up in three tasks for which the best results have been achieved; points for points of one task are summed up)

Problem 1. (4)
Prove that if a, b, c are integers and, in addition,

(a / b) + (b / c) + (c / a) and (a / c) + (c / b) + (b / a) are also integers, then | a | = | b | = | c |.
A. Gribalko

Problem 2. (4)
A line cuts off from a regular 10-gon ABCDEFGHIJ with side 1 triangle PAQ, in which PA + AQ = 1.
Find the sum of the angles at which the segment PQ is visible from the vertices B, C, D, E, F, G, H, I, J.
V. Arbitrariness

Problem 3. (4)
Given an equilateral triangle ABC. Find the locus of points P such that the line segments AP and BP that lie inside the triangle are equal.
Folklore

Problem 4. (5)
Can a + b + c + d be prime if a, b, c and d are positive integers and ab = cd?
Folklore

Problem 5. (8)
There are 4 equal right-angled triangles. It is allowed to cut any one in two according to the height, lowered to the hypotenuse. With the resulting triangles, you can repeat this operation.
Prove that after any number of such operations, there are equal triangles among the triangles.
A.V. Shapovalov

Problem 6. (8)
Can it happen that 6 pairwise disjoint parallelepipeds are located in space so that none of their vertices can be seen from some point in space that does not belong to them? (The parallelepipeds are opaque.)
V. Arizvolov, S. Markelov, A. Ya. Kanel-Belov

Problem 7.
Geologists took 80 cans of canned food on the expedition, the weights of which are all known and different (there is a list). After a while, the inscriptions on the canned food became unreadable, and only the manager knows where what is. He can prove this to everyone (that is, substantiate what is in which jar) without opening the canned food and using only the preserved list and two-cup scales with an arrow showing the difference in weights.
Prove that for this purpose,
a) (4) four weighings are enough for him and
b) (4) three are not enough.
A.K. Tolpygo

10-11 grade

Training option

(10-11 grades, 16, spring)
(The total is summed up on three tasks for which the best results have been achieved; points for points of one task are summed up)

Problem 1. (3)
There are four points on the segment [0,1] of the numerical axis: a, b, c, d.
Prove that there is a point x belonging to [0,1] such that
(1 / | xa |) + (1 / | xb |) + (1 / | xc |) + (1 / | xd |) <40 ...
L. Kurlyandchik

Problem 2.
Four grasshoppers were sitting at the tops of a square. Every second one of the grasshoppers jumps over the other to a symmetrical point (if A jumps over B to point A_1, then vectors **AB** and **BA_1** are equal).
Prove that three grasshoppers cannot be
a) (3) on one straight line parallel to the side of the square;
b) (3) on one arbitrary straight line.
A. Kovalji

Problem 3.
Triangle ABC is inscribed in a circle centered at O. Lines AC and BC intersect the circumcircle of triangle AOB for the second time at points E and K.
Prove that lines OC and EK are perpendicular.
S. Markelov

Problem 4. (4)
Prove that the number a0 ... 09 is not a complete square (for any number of zeros, starting with one; a is a digit other than 0).
V. Senderov

Basic option

(10-11 grades, 16, spring, 03/12/1995)
(The total is summed up in three tasks for which the best results have been achieved; points for points of one task are summed up)

Problem 1. (4)
Is there a sphere with exactly one rational point? (A rational point is a point at which all three Cartesian coordinates are rational numbers.)
A. Rubin

Problem 2. (4)
For what n can all the edges of an n-gonal prism (bases - n-gons) be colored in three colors so that all three colors converge at each vertex and each face (including the bases) has sides of all three colors ?
A.V. Shapovalov

Problem 3. (5)
Circles are drawn on the lateral sides of the trapezoid as on diameters.
Prove that all four tangents drawn to the circles from the point of intersection of the diagonals are equal to each other (if this point lies outside the circles).
S. Markelov

Problem 4. (6)
Some points with integer coordinates are marked on the coordinate plane. It is given that no four of them lie on the same circle.
Prove that there is a circle of radius 1995 in which no points are marked.
A.V. Shapovalov

Problem 5.
a) (3) Divide the segment [0,1] into black and white intervals so that for any polynomial p (x) of degree at most two, the sum of the increments p (x) over all black intervals equals the sum of the increments p (x) over all white intervals. (The increment of p (x) over the interval (a, b) is the number p (b) -p (a)).
b) (4) Will it be possible to perform a similar operation for all polynomials of degree at most 1995?
G. V. Kondakov

Problem 6. (8)
Is there a nonconvex polyhedron such that none of its vertices can be seen from some point M lying outside it? (The polyhedron is made of an opaque material, so nothing can be seen through it.)
A.Ya. Kanel-Belov, S. Markelov

Problem 7. (10)
Prove that among 50 people there are two who have an even number of mutual acquaintances (maybe 0) among the remaining 48 people.
S.I. Tokarev