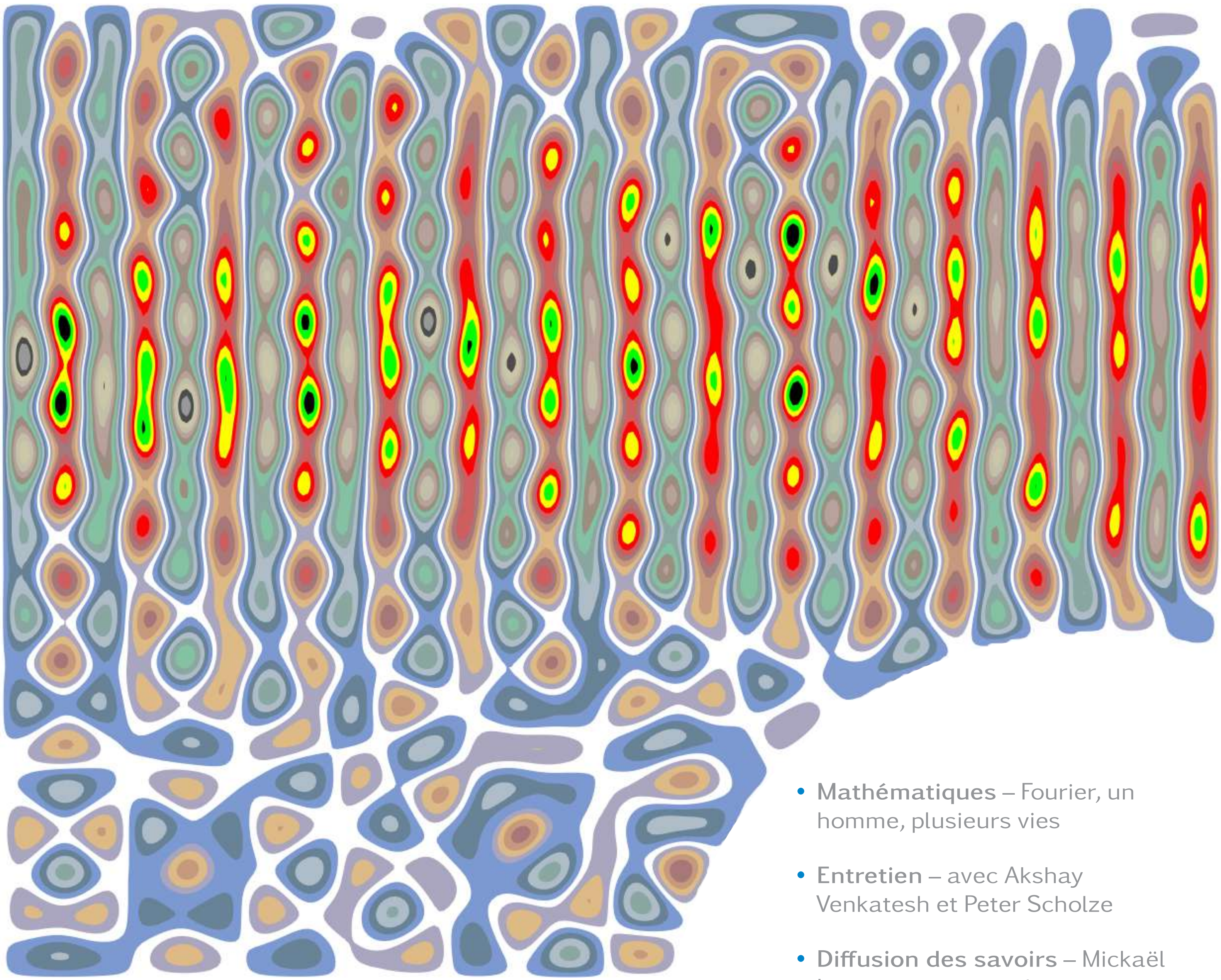
OCTOBRE 2018 – N° 158

la Gazette des Mathématiciens



- **Mathématiques** – Fourier, un homme, plusieurs vies
- **Entretien** – avec Akshay Venkatesh et Peter Scholze
- **Diffusion des savoirs** – Mickaël Launay, montreur de mathématiques
- **Raconte-moi...** l'arbre modulaire de $SL_2(\mathbb{Z})$

Société Mathématique de France
SMF

OCTOBRE 2018
GAZETTE DES MATHÉMATICIENS
N° 158

la Gazette
des Mathématiciens

Comité de rédaction

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. La figure de la couverture représente les valeurs d'une fonction propre pour l'opérateur laplacien, s'annulant sur le bord du « domaine de la *Gazette* » (un rectangle auquel on a soustrait un disque). Physiquement cela correspond à une onde stationnaire quantique, acoustique ou électromagnétique dans cette cavité. D'après l'analyse semi-classique, ces fonctions propres sont liées au billard formé par ce domaine. Celui de la *Gazette* est dispersif : le disque crée une sensibilité aux conditions initiales, ce qui implique une dynamique ergodique. Selon le théorème d'ergodicité quantique, la plupart des fonctions propres s'équidistribuent alors dans ce domaine. Il pourrait y avoir des exceptions comme le suggère cette figure qui montre une concentration sur une trajectoire périodique horizontale. Le calcul numérique a été effectué par Frédéric Faure de l'Institut Fourier, en C++ avec les librairies root du CERN et armadillo. (crédit : Frédéric Faure).

No 158

Éditorial

Chère lectrice, cher lecteur,

Afin de cheminer sans encombre à travers ce numéro de rentrée, tu devras cette fois t'en remettre à ta propre sagacité, et le cas échéant au sommaire qui figure en page 4. En effet, ceci étant mon dernier éditorial (ouf !), j'ai pour ma part quelques remerciements à adresser. De ces quatre années en tant que rédacteur en chef, je dois bien avouer que je tire une grande satisfaction. Non pas une fierté personnelle bien sûr, mais la joie d'avoir participé à une entreprise collective qui, à bien des égards, m'a permis d'enrichir ma connaissance de notre communauté. Toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance d'échanger ont invariablement fait preuve de bonne volonté et je ne peux faire autrement aujourd'hui que de leur témoigner ma reconnaissance avec la plus grande sincérité, même si cela doit, quelque peu tragiquement, m'exposer à la prédiction cynique d'Oscar Wilde « A little sincerity is a dangerous thing, and a great deal of it is absolutely fatal ».

L'histoire débute le 18 décembre 2013, en plein championnat du monde de handball féminin qui se déroulait en Serbie. Dans un courriel, Valérie Berthé me demandait ce que je pensais de l'idée de devenir rédacteur en chef de la *Gazette*. La SMF amorçait une évolution profonde et l'un des chantiers en cours avait pour but de moderniser notre chère *Gazette*. En soufflant mon nom et, bien au-delà, en m'encourageant constamment, Valérie me précipitait dans l'une des plus stimulantes aventures de mon parcours de mathématicien, me donnant, une fois encore, l'occasion de lui être infiniment redevable. Marc Peigné, alors président de la SMF, m'a tout de suite témoigné sa confiance et offert la plus grande liberté. C'est d'ailleurs ce qui m'a poussé à accepter ce projet. Bernard Helffer, qui officiait comme rédacteur en chef par interim, s'est également montré bienveillant et m'a mis le pied à l'étrier. Après quelques mois émaillés de réunions auxquelles participait un petit groupe de réflexion, et après avoir décortiqué les résultats d'un sondage proposé aux adhérents de la SMF, le cahier des charges prit forme : mise en place d'un nouveau format en couleur, d'une nouvelle équipe de rédaction et une refonte du contenu. Les idées fleurissaient...

Je me rappelle très bien de ma première rencontre avec Nathalie Lozanne, graphiste en charge d'établir la future maquette de la *Gazette*. J'avais acheté dans un kiosque quelques magazines tendance, que je trouvais particulièrement élégants, afin de montrer l'esprit que je souhaitais donner. Évidemment, le budget de la *Gazette* est limité, l'organisation reste familiale et les collaborateurs bénévoles. La mise en page doit être simple et efficace. Nous avons donc opté pour un style plutôt minimaliste. Denis Bitouzé est ensuite venu nous prêter main forte en développant une classe LaTeX dédiée à la *Gazette* et donner ainsi corps à nos idées. Cette confrontation à une réalité budgétaire et informatique quelque peu brutale a nécessité un certain nombre de compromis et la phrase « tout n'est pas possible », qu'une bagarre à l'école primaire m'avait valu de copier un grand nombre de fois, m'est souvent revenue à l'esprit. Drôle de mantra. Néanmoins, nos efforts se sont vu récompensés par la naissance de notre nouvelle *Gazette* en janvier 2015. Parée de ses belles couvertures !

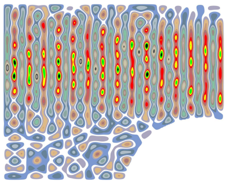
Il me semble important de rappeler que la *Gazette* ne fonctionne pas comme une revue académique classique. Qu'il s'agisse de mathématiques à proprement parler, ou bien de diffusion des savoirs, de questions de parité, ou de tout autre sujet, les articles publiés dans la *Gazette* émanent en grande majorité de suggestions des membres du comité de rédaction. Ces derniers se creusent les méninges pour trouver des sujets stimulants, ainsi que des auteurs habiles dans l'exercice de vulgarisation. Puis, bien souvent, il leur revient d'harceler ces mêmes auteurs afin d'obtenir le fruit de leur labeur en temps et en heure. Ainsi, chaque numéro est façonné collégialement par une petite équipe d'artisans mathématiciens. Et si mon travail a été aussi agréable durant ces années, cela est principalement dû à l'extrême compétence de celle-ci. Je remercie donc celles et ceux qui ont fait partie de ce comité lors des cinq dernières années pour leur investissement bénévole, leurs idées foisonnantes, et bien sûr pour l'ambiance conviviale et décontractée qui prévaut lors de nos réunions à l'IHP. Les déjeuners au Comptoir du Panthéon ou dans le jardin du Luxembourg, lorsque le temps parisien se montre suffisamment clément, sont toujours un moment de plaisir. Tout au long de mon passage en tant que rédacteur en chef, Claire Ropartz a été un relai constant et indispensable au bon fonctionnement de la *Gazette* et je sais à quel point nous lui sommes redevables. Je n'oublie pas non plus Frédérique Petit, que je n'ai malheureusement jamais eu la chance de croiser, mais dont j'ai pu apprécier le travail titanesque de relecture. Enfin, j'adresse un salut amical et reconnaissant à toutes celles et ceux qui ne comptent pas leur temps pour rédiger des textes et faire vivre notre *Gazette*.

Dans le mythe de Sisyphe, Albert Camus écrit « Insistons encore sur la méthode : il s'agit de s'obstiner. ». C'est l'esprit empreint de confiance que je transmets à présent le flambeau à Damien Gayet, lui souhaitant, ainsi qu'à ses successeurs, l'énergie nécessaire pour s'obstiner à leur tour et faire de cette *Gazette* le compagnon de route que notre communauté mérite.

En te souhaitant une agréable lecture,

Boris Adamczewski

la Gazette des Mathématiciens



N° 158

Sommaire

SMF	**5**
Mot du président	5
Mathématiques	**7**
Fourier, un homme, plusieurs vies – *B. Maurey*	7
Autour de l'ergodicité quantique – *M. Ingremeau*	25
Mouvements locaux et algorithmique des nœuds, d'après Lackenby – *A. de Mesmay*	33
Entretien	**42**
... avec Akshay Venkatesh	42
... avec Peter Scholze	44
Diffusion des savoirs	**46**
Mickaël Launay, montreur de mathématiques	46
M@ths en-vie, un dispositif pour ancrer les mathématiques au réel – *C. Cortay et C. Gilger*	52
Parité	**57**
Quelques notes autour d'un atelier sur les femmes en mathématiques – *J. Boucard et I. Lémonon*	57
Raconte-moi	**67**
l'arbre modulaire de $SL_2(\mathbb{Z})$ – *F. Dahmani*	67
Tribune libre	**72**
À propos de la candidature de la France (Paris) à l'icm 2022 – *M. Ledoux*	72
Information	**75**
Un bilan de la candidature de Paris à l'organisation d'icm 2022	75
Rapport sur les sessions du cnu 25 pour l'année 2017	76
Un prix en optimisation : le prix Jean-Jacques Moreau	79
Carnet	**81**
Michel Mendès France – *J.-P. Allouche et J. Shallit*	81
Bernard Morin – *D. Foata*	83
Livres	**84**

Société Mathématique de France

N° 158

Mot du président

Chères et chers collègues,

Ce début d'année scolaire est marqué, au moins dans mon université, par un afflux d'étudiants qui ont franchi l'étape *Parcoursup* et se sont inscrits dans les filières scientifiques. Les cours que nous leur dispensons sont-ils adaptés à leur formation pré-baccalauréat ? Comment les amener au niveau requis par une licence de mathématiques, ou une licence scientifique ? Comment les préparer aux concours d'enseignement (quel que soit le degré), à la recherche (pour une partie de ces étudiantes et étudiants) et plus généralement les armer pour qu'ils intéressent les employeurs, et ainsi valoriser la formation en mathématiques ?

Dans le contexte de la réforme du baccalauréat et des programmes de lycée, du plan licence et de la réforme à venir sur le positionnement et donc les prérequis des concours de recrutement de professeurs, une nécessaire consultation et un partage d'expérience sont nécessaires. La voix des sociétés savantes, et donc de ses adhérentes et adhérents, devra être entendue : nous sommes celles et ceux qui enseignent effectivement à l'université et dans le supérieur. La SMF, comme d'autres associations, va continuer à consulter ses correspondants locaux pour que vous nous fassiez part de vos initiatives et de vos retours d'expérience. Nous publions régulièrement des textes, disponibles sur notre site web notamment, qui reflètent nos demandes et parfois nos inquiétudes sur les évolutions et réflexions en cours sur les réformes : n'hésitez pas à les consulter régulièrement, et à nous transmettre votre avis.

Préparer à la recherche et au travail en équipe, c'est précisément le but du concours SMF junior, qui aura lieu du 26 octobre au 4 novembre prochain : 10 sujets originaux et variés attendent les équipes d'étudiantes et d'étudiants, venant de toute la France et même d'Afrique (le concours sera proposé dans plusieurs pays avec le soutien d'Animath, que je remercie). Le jury regardera toutes les solutions proposées, et s'attachera à récompenser les idées originales. Parlez-en à vos classes et à vos responsables de master !

Enfin, je suis heureux de vous annoncer que la SMAI et la SMF ont décidé, sous le parrainage de l'Académie des sciences, de créer un prix récompensant tous les deux ans des mathématiciennes et mathématiciens de l'optimisation et de la décision. Ce prix portera le nom de Jean-Jacques Moreau, disparu en

2014, mathématicien et mécanicien français ayant apporté des contributions exceptionnelles en mécanique non régulière et en analyse convexe. Il sera décerné à partir de 2019 (tous les deux ans), il est dès à présent possible d'envoyer des dossiers de candidature recommandant une ou un collègue.

Bien à vous,

Le 2 octobre 2018

Stéphane Seuret, président de la SMF

Fourier, un homme, plusieurs vies

• B. Maurey

Fourier est né il y a 250 ans, vingt-et-un ans avant 1789. Les événements de cette époque troublée ont fait de sa vie un roman d'aventures : la Révolution et ses dangers mortels, l'expédition de Bonaparte en Égypte et ses découvertes, puis la carrière de préfet de l'Isère, écrivant les premières versions de la *Théorie analytique de la chaleur* quand il ne s'occupait pas de la construction de la route de Grenoble à Turin ou de l'assèchement des marais de Bourgoin ; enfin, l'académicien, bien établi au cœur de la scène scientifique parisienne des années 1820-1830. En rapportant ici sur ces aspects multiples qui ne touchent pas qu'à la science, il faudra évidemment faire une place importante à la théorie de la chaleur, son œuvre majeure, et aux séries de Fourier qui en sont un élément mathématique crucial.

Des ouvrages

De nombreux auteurs ont écrit sur Fourier, notamment à partir de la deuxième moitié du XXe siècle où plusieurs documents inédits ont été publiés. Jean Dhombres et Jean-Bernard Robert ont fait un travail colossal [10] que je n'ai pas hésité à piller, au prix de simplifications souvent abusives. Un nouvel ouvrage, sous la direction de Dhombres, doit paraître cette année [21] ; il visera un public plus large, contiendra un grand nombre d'illustrations et des pièces nouvelles d'archives. Ivor Grattan-Guinness a publié dans son livre de 1972 [16] le contenu du mémoire *Sur la propagation de la chaleur* présenté par Fourier à l'Académie des Sciences en décembre 1807 et resté jusque-là inédit. Umberto Bottazzini [9] a consacré deux sections [1] à l'étude du problème de la chaleur dans les années 1800-1830. Je me référerai également au livre de Jean-Pierre Kahane et Pierre Gilles Lemarié-Rieusset [23] dont la première partie, écrite par Kahane, traite de l'histoire des séries de Fourier. Le traité d'Analyse harmonique de Thomas Körner [24] expose de façon magistrale les mathématiques attachées au nom de Fourier. Il contient aussi deux courts chapitres sur la vie de Fourier [2], qui s'appuient en grande part sur le texte de John Herivel [18], très riche en informations mais en anglais : les documents français originaux y sont traduits.

1. La Révolution, l'Égypte

Jean-Baptiste Joseph Fourier naît le 21 mars 1768 à Auxerre, il est prénommé *Jean-Joseph* sur son acte de baptême. Il naît dans une famille d'artisans en voie d'ascension sociale : son père, tailleur, emploie une petite dizaine d'ouvriers. Orphelin à dix ans, Jean-Joseph est pris en charge par le clergé auxerrois ; il a un lien de parenté lointain – et incertain – avec un prêtre béatifié, on ne peut le laisser à l'abandon. Il reçoit une bonne éducation à l'École Royale Militaire d'Auxerre, tenue par des religieux. Après l'école, à 19 ans, il fait une demande pour être autorisé à passer le concours d'entrée dans l'Artillerie : elle est sèchement refusée, « Fourier n'étant pas noble » ne saurait devenir officier d'artillerie. Il se tourne vers les ordres et devient novice à l'abbaye bénédictine de Fleury, à Saint-Benoît-sur-Loire. Il y séjourne deux ans, de 87 à 89, il aurait pu être *l'abbé Fourier* : mais la Révolution a éclaté, et l'Assemblée nationale constituante a pris des décrets suspendant la prononciation de vœux religieux, juste avant qu'il ne prononce les siens en novembre 89. Au début 90, il revient à l'école d'Auxerre, comme enseignant cette fois ; à cette date, elle s'appelle « Collège National-École Militaire », il va y rester quatre ans. Il enseignera des matières diverses, histoire, philosophie, éloquence et finalement mathématiques, et deviendra « instituteur salarié par la nation ».

D'abord réservé à l'égard de la Révolution, Fourier s'engage début 93 dans le *Comité de surveillance* d'Auxerre, il en sera même président en juin 94. Il est présent, sans que nous puissions savoir ce qu'il

1. [9, sec. 2.3, 2.4]
2. [24, part VI, ch. 92 et 93]

en pense, lors de scènes violentes de désacralisation d'églises, pendant la vague de déchristianisation de 93-94. Après septembre 93, le Comité d'Auxerre se trouve chargé d'exécuter les décisions de Maximilien de Robespierre et du Comité de Salut Public. Plutôt modéré, Fourier peut s'y trouver en danger, par son manque de zèle à aider les coupeurs de têtes : Victor Cousin, son successeur à l'Académie française en 1831, a rapporté dans des *Notes additionnelles à l'éloge de M. Fourier* – bien des années après les faits – que celui-ci aurait sciemment fait échouer l'arrestation à Tonnerre d'un homme condamné à l'échafaud [3] ; Fourier a tout de même signé un certain nombre de mandats d'arrêts, dans le cadre de ses fonctions officielles au comité d'Auxerre. Un événement va le conduire tout près de l'emprisonnement, « l'affaire d'Orléans », qui est relatée en grand détail dans le livre de Herivel [4].

Début octobre 93, le citoyen Ichon, membre de la Convention, est dépêché pour collecter dans l'Yonne et six départements voisins, armes, matériel et chevaux en vue des opérations en Vendée. Dans ce but, il mandate six citoyens d'Auxerre – dont Fourier – pour une mission d'un mois, à partir de mi-octobre, à Orléans. La ville est agitée par de vives tensions entre sans-culottes et bourgeois. Le citoyen Laplanche, autre Conventionnel, y a été envoyé par Paris début septembre ; il commence par prendre des mesures de caractère révolutionnaire, susceptibles de satisfaire les sans-culottes. Mais il cède ensuite à des pressions des milieux les plus riches et il se heurte aux « leaders » des sans-culottes. S'opposant à Laplanche, et sortant nettement du cadre de sa mission, Fourier prend parti pour ces « gauchistes », dirait-on de nos jours. Laplanche et les autorités orléanaises demandent alors à Auxerre qu'il soit rappelé, et dénoncent son comportement ; leur plainte remonte à Paris. Un décret parisien destitue Fourier de toutes ses fonctions le 29 octobre 93 : « La Commission donnée [...] au citoyen Fournier [*sic*], est révoquée ; le citoyen Fournier est déclaré inhabile à recevoir de pareilles Commissions » ; il ne peut plus exercer de fonction publique. Ichon, qui est responsable de son envoi à Orléans, ressent une partie du blâme ; furieux, il lance un mandat d'arrêt contre Fourier, qui heureusement pour lui n'est pas encore rentré ; les choses sont un peu calmées à son retour à Auxerre, on le laisse tranquille. Cependant, l'affaire d'Orléans finit par ressortir à Paris. Robespierre combat sa gauche aussi bien que sa droite, les meneurs d'Orléans sont visés et Fourier par voie de conséquence : le 19 juin 94, le *Comité de Sûreté Générale* ordonne son arrestation (ce même mois de juin, la loi de « Grande Terreur » est adoptée). On sait aujourd'hui [21] que Fourier ne va pas en prison, il bénéficie d'un traitement de faveur : il est placé en résidence surveillée le 4 juillet, à son domicile d'Auxerre. Robespierre tombe fin juillet et Fourier est « libéré » le 11 août.

Fin 94, Fourier est sélectionné pour faire partie des jeunes enseignants qui seront formés par la toute nouvelle École normale, « l'École Normale de l'an III » ; cette école ne fonctionnera qu'un semestre, de janvier à juin 95, il en sera un élève distingué. Mais suite au changement de climat politique, son appartenance au comité jacobin lui vaut d'autres ennuis. À l'heure de la réaction thermidorienne, on fait la chasse aux « terroristes ». Les nouvelles autorités d'Auxerre veulent obtenir son exclusion de l'École normale ; on lui reproche son passé, dans une adresse à la Convention Nationale [5] :

> Nous frémissons, Représentans, quand nous pensons que les Élèves des écoles normales ont été choisis sous le règne de Robespierre et par ses protégés ; il n'est que trop vrai que Balme et Fourrier [*sic*] élèves du département de l'Yonne ont longtemps proféré les principes atroces et les infernales maximes des tyrans.

Début juin 95, Fourier est mis en prison ; il obtient un ordre de libération conditionnelle après quelques jours, mais l'ordre n'est pas appliqué, il reste incarcéré un mois ou plus. Il est en tout cas libre fin août, ses ennuis judiciaires sont enfin terminés et il est rétabli dans tous ses droits de citoyen.

Les premières années de la Révolution ont été dangereuses, sans doute exaltantes toutefois. Kahane [6] cite un passage d'une lettre de Fourier :

> À mesure que les idées naturelles d'égalité se développèrent on put concevoir l'espérance sublime d'établir parmi nous un gouvernement libre exempt de rois et de prêtres, et d'affranchir de ce double joug la terre d'Europe depuis si longtemps usurpée.

Pourtant Fourier doit beaucoup à l'éducation reçue des bénédictins à l'École Royale Militaire d'Auxerre, qui lui permet d'écrire de fort belles

3. [10, ch. III, p. 94]
4. [18, sec. 2.2]
5. [10, ch. IV, p. 150]
6. [23, ch. 1, p. 8]

phrases comme celle qu'on vient de citer, et qui a fait de lui un enseignant. L'extrait précédent provient d'une longue lettre adressée à l'été 95 à Edmé-Pierre-Alexandre Villetard, député de l'Yonne (reproduite par Dhombres et Robert [7]), au moment mentionné ci-dessus où Fourier, mis en cause, tente de justifier son comportement des années 93-94.

Élève emblématique de l'École normale, il s'y fait connaître de Gaspard Monge, il suit également des cours de Pierre-Simon Laplace et de l'éminent Joseph-Louis Lagrange, « le premier des savants d'Europe », écrit Fourier dans des Notes sur l'École Normale [8]. Laplace, savant reconnu sous l'Ancien Régime, a dû se faire discret pendant la Terreur ; en 95, il commence à remonter sur le devant de la scène et sera bientôt très influent. Fourier indique dans ses Notes qu'il suit aussi les cours de physique de René-Just Haüy, ceux de chimie de Claude-Louis Berthollet et ceux du naturaliste – fort âgé – Louis Jean-Marie d'Aubenton (je ne cite que les plus connus). Au moment de la fermeture de l'École normale, Fourier passe du côté des enseignants de l'École polytechnique (nous écrirons « l'École » tout court, à partir de maintenant ; elle s'est appelée *École Centrale des Travaux Publics* avant septembre 95) : recommandé par Monge, il devient *substitut* fin mai 95 à l'École – sa mission alors est d'encadrer le travail des élèves –, puis instituteur-adjoint en octobre 95. Il s'investit pleinement dans ses fonctions d'enseignant de mathématiques, pendant plus de deux années.

On a une idée des cours que Fourier a donnés en 1796-1797 à partir de notes prises par des élèves [9], conservées à l'Institut de France et à l'École des Ponts et Chaussées [10]. Ces cours ne s'appuient pas sur les manuels du XVIIIe siècle (le traité d'Étienne Bézout par exemple), mais sont plutôt inspirés des cours donnés à l'École normale par Lagrange et Laplace ; on y sent aussi l'esprit géométrique de Monge. Dès novembre 95, Fourier est chargé du cours *d'Analyse algébrique*, qui prépare au cours de calcul différentiel ; il assure en janvier 96 une partie du cours d'Analyse de Prony, incluant le calcul des variations ; en mars 96, il montre aux élèves l'existence des racines complexes des polynômes au moyen de la méthode présentée par Laplace à l'École normale [26]. Cette preuve originale de Laplace s'applique au cas des coefficients réels ; elle met le degré n du polynôme sous forme $n = 2^i s$ où s est impair, et procède par une récurrence subtile sur i, le cas $i = 0$ étant réglé par la propriété des valeurs intermédiaires – qui passe pour une évidence –. Fourier simplifie et généralise un peu : si on admet que les polynômes à coefficients complexes de degré impair ont une racine complexe, on peut les factoriser en facteurs complexes du premier degré. En mai 96, il traite le calcul différentiel et intégral. En 97, il succède à Lagrange à la chaire d'Analyse et Mécanique. Titulaire, il aurait pu comme d'autres y passer de longues années, mais les événements politiques vont détourner le cours de son existence.

L'expédition d'Égypte est un épisode saillant dans la vie de Fourier. Au début 98, les autorités du *Directoire exécutif* lui enjoignent de prendre part à une opération entourée de beaucoup de secret : à ce moment, peu de ses membres en connaissent la destination exacte. Fin mars 98, il quitte Paris, comme un bon nombre d'élèves ou d'anciens de l'École, des promotions de 94 – la première – à 97, qui ont pu l'avoir pour enseignant. Jean-Baptiste Prosper Jollois et Édouard de Villiers du Terrage (« Devilliers » à l'École, Révolution oblige), ingénieur et futur ingénieur des Ponts et Chaussées, âgés de 22 et 18 ans, sont parmi eux [11] ; ils écriront quantité de pages de l'ouvrage monumental *Description de l'Égypte* qui paraîtra à partir de 1809 et consignera, dans les textes et illustrations de nombreux collaborateurs, les découvertes de l'expédition ; Fourier écrira une longue préface. Les illustrateurs comptent Vivant Denon et Henri-Joseph Redouté (peintre, frère de Pierre-Joseph Redouté qui est connu pour ses aquarelles représentant des roses). Des savants et ingénieurs, comme Monge, Berthollet, Étienne Geoffroy Saint-Hilaire, Nicolas-Jacques Conté, Pierre-Simon Girard sont aussi du voyage. De retour en France, Girard, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, dirigera la construction du canal de l'Ourcq ; il y aura sous ses ordres en 1809 le jeune Augustin Louis Cauchy, 20 ans, aspirant ingénieur des Ponts et Chaussées.

Fourier s'embarque à Toulon mi-mai. Un corps expéditionnaire de plus de 30000 hommes part de France et d'Italie. La campagne d'Égypte ne sera pas une promenade tranquille : parmi beaucoup d'autres victimes, plusieurs jeunes polytechniciens n'en reviendront pas – 7 sur 42 [12] –. L'expédition débarque à Alexandrie début juillet. Début août, à Rosette (lieu de découverte de la fameuse *pierre* en juillet 99, à

7. [10, Annexe IV, p. 709]
8. [10, Annexe II]
9. [10, ch. IV, p. 158]
10. [16, ch. 1, p. 6-7]
11. ils sont représentés dans [7] ; Fourier en est absent.
12. [27, annexe]

quelque 50 km d'Alexandrie), Fourier devient responsable du *Courrier de l'Égypte*, un journal dont une des missions est de promouvoir l'action du général en chef Napoléon Bonaparte. Fin août 98, il est nommé Secrétaire perpétuel de l'Institut d'Égypte créé au Caire par Bonaparte. Il joue un rôle d'administrateur et un rôle politique, en particulier de négociateur avec les autorités locales. Dhombres et Robert signalent qu'au moment où Bonaparte se lance en Syrie (février-juin 99), Fourier se trouve de fait à gouverner la Basse-Égypte, sans en avoir officiellement le titre. Quand Bonaparte, et Monge, retournent en France en août 99, il reste la principale autorité civile, particulièrement après la mort du général Jean-Baptiste Kléber, assassiné au Caire en juin 1800, dont il prononce l'éloge funèbre (Fourier sait écrire les discours, et il parle bien). Il se charge du lien entre les civils et les militaires de l'expédition. Il négocie encore à la fin de l'aventure, cette fois avec les Anglais qui tiennent les ports égyptiens, pour obtenir que les savants français puissent repartir dans les meilleures conditions possibles, en gardant l'essentiel de leurs notes et découvertes, au moment de la reddition du général Menou en septembre 1801. Mais la pierre de Rosette partira pour l'Angleterre ; elle y est toujours.

L'activité de Fourier en Égypte ne se limite pas à l'administration et à la politique. En octobre 98, il se fait examinateur de l'École polytechnique : il interroge avec Monge des élèves de la promotion 96 venus en Égypte. Il participe à des expéditions scientifiques et archéologiques, notamment en Haute-Égypte en septembre-octobre 99. Il effectue des recherches mathématiques, présente plusieurs communications à l'Institut d'Égypte, sur des sujets algébriques, travaux plutôt mineurs et restés inédits, et un *Mémoire sur l'analyse indéterminée*, jugé plus convaincant par Dhombres-Robert [10] et Grattan-Guinness [16] qui y voient une ébauche de ce que nous appelons la *programmation linéaire*. Fourier reprendra cette question beaucoup plus tard, dans des mémoires à l'Académie des Sciences en 1823 – pour simplifier, nous désignerons par *Académie des Sciences* l'institution qui s'est appelée aussi *Académie Royale des Sciences* ou *Classe des Sciences de l'Institut* – et dans un article de 1826 au *Bulletin des Sciences, par la Société philomathique*.

2. Grenoble, Paris, l'œuvre

De retour d'Égypte, Fourier débarque à Toulon en novembre 1801 ; rentré à Paris début janvier 1802, il revient très brièvement à l'École. Mais Bonaparte l'envoie à Grenoble, le nommant préfet de l'Isère en février 1802, à la mort du préfet en poste Gabriel Ricard ; Fourier ne refuse pas, il y arrive mi-avril. C'était peut-être en partie une brimade, cependant, il fallait aussi pour occuper cette fonction un homme capable et sûr, des qualités démontrées en Égypte. À Grenoble, il commence à travailler sur la théorie de la chaleur et écrit en 1805 un essai non publié, une sorte de brouillon de la théorie. Fin 1807, il présente à l'Académie un premier mémoire sur la propagation de la chaleur. Les quatre rapporteurs, inscrits au procès-verbal de la séance du 21 décembre, sont Lagrange, Laplace, Monge et Sylvestre Lacroix. Le texte n'est pas bien reçu par Lagrange [13], [14], un peu mieux par Laplace qui, dans un mémoire de 1809-1810 [25], reconnaîtra à Fourier la paternité de l'équation de la chaleur.

Ce mémoire de 1807 de Fourier, resté inédit, a été publié et commenté par Grattan-Guinness en 1972 [16] ; il était conservé à l'École nationale des Ponts et Chaussées, où Claude Louis Marie Henri Navier, proche de Fourier, a été professeur. Navier a été « exécuteur testamentaire » des manuscrits de Fourier. Gaston Darboux, l'éditeur des *Œuvres* de Fourier (parues en 1888 et 1890), avait découvert le mémoire à la fin des années 1880 mais ne l'avait pas exploité. Jointes au « Mémoire » se trouvaient des documents transmis par Fourier à l'Académie en 1808 et 1809 : on comprend qu'il a été informé des objections des « examinateurs » et qu'il y a répondu ; parmi ces documents figurent un *Extrait* soumis en 1809 (dont seules les dix premières pages ont été conservées), courte présentation non mathématique du contenu du mémoire, et un ensemble de dix pages de *Notes* répondant aux objections [15].

L'Académie reste silencieuse sur le travail présenté par Fourier en 1807. Un compte rendu assez froid, écrit par Siméon Denis Poisson, paraît en mars 1808 au *Bulletin des Sciences*, il mentionne l'équation de la chaleur mais pas le traitement par les séries « de Fourier ». En 1809, Fourier finit de rédiger la *Préface Historique* de la *Description de l'Égypte* ; cette rédaction lui pèse, à un moment où la chaleur occupe son esprit, où il voudrait voir son

13. [16, p. 24, fin du ch. 1]
14. [9, Note(5) pour le ch. 2]
15. [16, ch. 1, p. 24]

mémoire de 1807 reconnu. La Préface, document sensible de 90 pages, est soumise à la lecture de Napoléon. Fourier « monte » à Paris pour la lui présenter : il a dû se faire historien pour rapporter sur l'histoire de l'Égypte, ancienne et contemporaine, styliste pour livrer un texte qu'il puisse estimer irréprochable, et diplomate pour savoir parler *comme il fallait* de l'action en Égypte de celui qui est devenu l'Empereur. Körner rapporte qu'un égyptologue de ses connaissances juge que cette *Préface* représente « a masterpiece and a turning point in the subject »[16], et que cet égyptologue a été surpris d'apprendre que l'auteur était également assez connu en tant que mathématicien ! Afin de réaliser sa tâche, Fourier a reçu l'aide de Jacques-Joseph Champollion-Figeac, féru d'égyptologie ; son jeune frère Jean-François, né en 1890, élève en 1804 au *lycée impérial* institué à Grenoble la même année, est passionné de langues anciennes ; il participe (un tout petit peu) à la préparation de la *Préface*. Jean-François Champollion déchiffrera les hiéroglyphes à partir de 1822 ; mort en 1832, il est enterré – selon son souhait – près de Fourier au Père-Lachaise (et Fourier, lui, est enterré non loin de Monge).

En 1811, Fourier remanie sensiblement son texte de 1807 et obtient, enfin, un prix de l'Académie en janvier 1812. Lagrange est toujours là pour s'opposer (mais il meurt l'année suivante) : le rapport décernant ce prix n'est pas sans réserves, « [...] la manière dont l'Auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et [...] son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur ». Bien qu'honoré par le prix, Fourier est blessé, il proteste auprès du secrétaire perpétuel pour les Sciences mathématiques, Jean-Baptiste Joseph Delambre, mais il n'y a pas grand-chose à faire. Et les années qui suivent amènent de grands bouleversements politiques qui vont occuper et toucher le préfet de l'Isère : 1814 et 1815 voient le premier départ de Napoléon, puis son retour de l'île d'Elbe et sa chute.

Après la défaite de Napoléon en Russie, c'est le territoire français qui est menacé dès la fin de 1813 par une coalition comprenant principalement l'Angleterre, l'Autriche, la Prusse et la Russie. Henry Beyle, 30 ans, qui n'est pas encore l'écrivain Stendhal, est attaché à la section de la guerre du Conseil d'État ; il est envoyé dans le Dauphiné en novembre 1813 afin de seconder le *commissaire extraordinaire* chargé des mesures à prendre pour la protection de la région. En janvier 1814, Grenoble craint l'arrivée des troupes autrichiennes qui ont pris Genève. Avec les militaires et avec Stendhal, le préfet doit organiser la défense. Stendhal n'apprécie pas Fourier, qui selon lui temporise et entrave l'action militaire ; il aura des mots très méprisants sur ce préfet : « Une des sources de mon ennui à Grenoble était le petit savant spirituel à l'âme parfaitement petite et à la politesse basse de domestique revêtu, nommé Fourier »[17]. Paris tombe le 31 mars, Napoléon abdique le 6 avril ; le 12 avril, il signe le traité de Fontainebleau et se met en route vers son nouveau royaume, l'île d'Elbe. Les troupes autrichiennes sont à Grenoble, Fourier et l'essentiel des membres de sa préfecture se rallient à la « première Restauration » le 16 avril. Sur son chemin, Napoléon passe près de Grenoble, au grand embarras de Fourier, qui va rester presque un an encore à son poste de préfet.

En 1815, au retour de l'île d'Elbe, Napoléon entre à Grenoble et Fourier en sort pour l'éviter ; après l'avoir suspendu et menacé d'arrestation le 9 mars, Napoléon se ravise et le nomme préfet du Rhône le 11 mars. Fourier se remet au travail à son nouveau poste, mais finit par refuser d'appliquer les mesures d'épuration de Napoléon et de son ministère de l'Intérieur – le ministre est Lazare Carnot – ; il est révoqué le 3 mai 1815.

À la seconde Restauration, la pension de Fourier est supprimée : il est trop marqué comme serviteur du régime napoléonien, en particulier par sa participation aux Cent Jours. Il reçoit alors un appui bienvenu du préfet de la Seine, Gaspard Chabrol de Volvic. Chabrol est un ancien élève de l'École (promotion 94), qui a eu Fourier pour professeur et qui était de plus présent en Égypte ; il était déjà préfet de la Seine sous Napoléon, mais il n'a pas participé aux Cent Jours et il restera à ce même poste jusqu'en 1830. Chabrol confie à Fourier la direction d'un bureau de statistiques du département de la Seine. Fourier s'adonne à cette tâche avec intérêt et publie des *Recherches statistiques sur la Ville de Paris et le département de la Seine*, en quatre volumes parus entre 1821 et 1829. Il ne s'agit pas – loin s'en faut – de travaux théoriques de probabilités ou statistiques du niveau de ceux de Laplace, mais Körner, encore lui, mentionne que certains démographes ne connaissent de Fourier que l'homme qui a joué un rôle important dans le développement des statistiques gouvernementales en France[18].

16. [24, fin du ch. 92]
17. [10, ch. VI, p. 347]
18. [24, fin du ch. 93]

En 1817, les bouleversements politiques étant amortis, Fourier est élu académicien, après une première candidature et une élection en 1816 qui n'a pas été validée par le roi Louis XVIII. Il devient secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences cinq ans plus tard, à la mort de Delambre. Académicien de premier plan, il a l'occasion d'être en contact avec Sophie Germain, ils échangent une correspondance assez régulière entre 1820 et 1827; il lui procure des places pour assister aux séances publiques de l'Institut, lui apporte son soutien contre Poisson, qui travaille aussi sur la théorie des surfaces élastiques; elle le soutient pour le poste de secrétaire perpétuel en 1822. On peut penser que Laplace, sur ses vieux jours (il a 73 ans en 1822), s'est rapproché de Fourier et l'a également soutenu. Fourier prononcera un éloge funèbre de Laplace (mort en 1827), encore un beau discours. En 1822, il fait éditer la version définitive de la *Théorie analytique de la chaleur*; le mémoire de 1811 finit par paraître, en 1824! Il est élu à l'Académie française en 1826; les réactions ne sont pas unanimes : son œuvre littéraire, il est vrai, est un peu mince.

La fin de la vie de Fourier a été rendue pénible par la maladie. Il souffrait de rhumatisme chronique (à Grenoble déjà), et avait peut-être contracté une affection tropicale en Égypte; il était devenu extrêmement frileux, Grattan-Guinness [19] plaisante : « [illness] caused him to discourage the diffusion of heat in his quarters », au point qu'il portait des vêtements épais en laine et chauffait en toute saison. Pendant ces années, il a été absent de bien des séances de l'Académie. Ses derniers mois ont été particulièrement difficiles, il devait passer ses journées dans une chaise spéciale [20] où il pouvait toutefois travailler. La maladie a pu aussi amoindrir ses facultés intellectuelles, au moment où le *secrétaire perpétuel* aurait dû mieux s'occuper du fameux mémoire d'Évariste Galois, présenté en 1829 puis en 1830. Fourier meurt le 16 mai 1830 à Paris, à l'âge de 62 ans.

Pour nous, Fourier est essentiellement l'homme d'une œuvre unique, la théorie de la chaleur. Il a publié d'autres travaux moins connus, parmi lesquels des mémoires sur la statique en 1798 (un article de mécanique rationnelle, contenant trois preuves du principe des puissances virtuelles, utilisant la notion de moment), sur les statistiques entre 1821 et 1829; il a laissé une masse de manuscrits, beaucoup se trouvent à la Bibliothèque nationale. Un thème en particulier doit être mentionné : Fourier a poursuivi, sur une très longue période, des recherches sur la détermination du nombre des racines réelles d'un polynôme qui sont situées dans un segment donné, et sur les méthodes de calcul de valeurs approchées de ces racines. La question l'intéressait déjà en 1787, et même au cours de ses jeunes années [21]; il a présenté une communication à l'Académie le 9 décembre 1789 sur ce sujet, sujet dont il parlait aussi dans ses cours à l'École en 1796 et 1797, sur lequel il travaillait encore en Égypte, puis à Grenoble en 1804 : ces précisions sont données par Navier, voir plus bas. Fourier a publié dans la même direction plusieurs articles à partir de 1818, soumis des mémoires à l'Académie pendant les années 1820-1830. Ses recherches mènent à une borne supérieure pour le nombre des racines; Jacques Charles-François Sturm trouve en 1829 la règle qui porte son nom (le mémoire paraît en 1835) et qui permet de trouver le nombre *exact* des racines; Sturm déclare : « le théorème dont le développement est l'objet de ce Mémoire a beaucoup d'analogie avec celui de Fourier ».

Dans ses dernières années, Fourier prépare un ouvrage intitulé « Analyse des équations déterminées » qu'il ne pourra pas terminer, et qui devait rassembler en deux volumes les travaux algébriques mentionnés ci-dessus. Navier en publiera les parties existantes en 1831, il écrira un « Avertissement de l'éditeur » de 24 pages destiné à affirmer la priorité de Fourier sur des résultats vieux de plus de quarante ans pour certains. Navier cite les documents en sa possession : il insiste sur un manuscrit *Recherches sur l'algèbre*, d'avant 1789, dû à Fourier (mais pas de sa main, et incomplet : seules étaient conservées les 28 premières pages), mentionne des notes prises par un élève aux cours de Fourier à l'École en 1797, puis un texte écrit à Grenoble en 1804. Navier insiste aussi sur l'existence de témoignages permettant de dater chacun de ces documents. La priorité était contestée par François Budan de Boislaurent, docteur en médecine en 1803, inspecteur général de l'Instruction Publique en 1808, mathématicien compétent quoiqu'« amateur » : il avait soumis un mémoire à l'Académie en 1803, publié un article en 1807 et un livre en 1822 sur la même question du nombre des racines [21]. La querelle a été très vive, elle paraît secondaire aujourd'hui; si la méthode analytique de Fourier a conduit au résultat de Sturm, celle de Budan, combinatoire et de nature algorithmique, a

19. [16, fin du ch. 22]
20. [16, fin du ch. 22]
21. voir Jacques Borowczyk [8]

trouvé de nos jours des répercussions en calcul formel.

3. Des séries trigonométriques

Fourier évidemment n'a pas inventé les séries trigonométriques : Leonhard Euler, Daniel Bernoulli et bien d'autres les ont utilisées avant lui ; il faut peut-être partir de Brook Taylor, l'homme de la *formule de Taylor*, et un des premiers à avoir lié vers 1715 la vibration des cordes aux courbes sinusoïdes, appelées à l'époque « compagnes de la cycloïde ». Mais Fourier en a donné de beaux exemples, et surtout, il a systématisé la relation entre fonction et série « de Fourier » ; ce faisant, il a contribué à modifier et préciser la conception des fonctions en mathématiques, une tâche complétée quelque vingt ans plus tard par Dirichlet. Fourier a calculé un bon nombre de développements en série trigonométrique de fonctions 2π-périodiques non nécessairement continues, dont plusieurs se trouvent déjà dans son essai de 1805 : il a retrouvé le développement de la fonction égale à x quand $|x| < \pi$, mentionnant bien sûr qu'il était dû à Euler, et précisant clairement qu'il fallait en limiter la validité à $|x| < \pi$ [22] ; il a développé en série de sinus la fonction impaire qui vaut $\cos x$ pour $0 < x < \pi$ (un fait qui choquera Lagrange et même Laplace), ou la fonction égale à $\operatorname{sh} x$ pour $|x| < \pi$, et beaucoup d'autres. En lisant le livre de Grattan-Guiness [16] on se rend compte de l'ampleur du contenu mathématique des travaux de Fourier sur la chaleur. Je vais insister maintenant sur l'exemple sans doute le plus connu.

Après avoir posé des principes physiques pour comprendre l'évolution de la température des corps et établi *l'équation de la chaleur* à l'intérieur d'un solide,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa \Delta v, \qquad \kappa > 0,$$

Fourier propose [23] de déterminer explicitement la température d'équilibre $v(x,y,z)$ dans un solide infini limité par deux plans parallèles et un troisième perpendiculaire aux deux autres, en supposant que la température soit fixée au bord. Le solide est mis en équation de sorte que la géométrie et la température ne dépendent pas de la coordonnée z : on se ramène à un problème en x, y à l'art. 165, une lame rectangulaire, qu'on modélise comme l'ensemble $\{(x,y) : x \geqslant 0, |y| \leqslant \pi/2\}$. Au bord, la température v est égale à 1 quand $x = 0$ et $|y| < \pi/2$, égale à 0 quand $x \geqslant 0$ et $|y| = \pi/2$. L'équation d'équilibre dans la lame est $\Delta v = 0$. La condition au bord étant paire en y, Fourier recherche des solutions paires en y : il envisage une solution combinaison de fonctions $e^{-kx}\cos(ky)$, où la nullité de v dans le cas $|y| = \pi/2$ impose que k soit un entier impair, et où on a $k > 0$ pour des raisons de vraisemblance physique [24]. La méthode des variables séparées était déjà apparue chez Jean d'Alembert et Euler, la superposition (même d'une infinité) de solutions chez Bernoulli. Fourier cherche donc v sous la forme

$$v(x,y) = a e^{-x}\cos y + b e^{-3x}\cos 3y + c e^{-5x}\cos 5y + \cdots$$

La condition $v = 1$ pour $x = 0$ lui fait rechercher un développement qui vérifie

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \cdots \tag{1}$$

quand $|y| < \pi/2$. Il va déterminer d'abord le coefficient a de $\cos y$, puis il trouvera pareillement les coefficients suivants $b, c, \ldots$ Afin d'y parvenir, il dérive l'équation (1) un nombre pair de fois et écrit pour j entier > 0 l'égalité

$$0 = a\cos y + b3^{2j}\cos 3y + c5^{2j}\cos 5y + \cdots. \tag{2}$$

Pour calculer les coefficients, Fourier suppose pour commencer qu'il n'y a que m inconnues $a, b, \ldots, r$, et il considère un système de m équations, la première provenant de (1) et les $m-1$ dernières, quand $j = 1, \ldots, m-1$, étant

$$0 = a\cos y + b3^{2j}\cos 3y + c5^{2j}\cos 5y + \cdots + r(2m-1)^{2j}\cos(2m-1)y.$$

Prenant $y = 0$, il obtient un système de Vandermonde, le résout pour trouver une valeur approchée $a^{(m)}$ de la solution a, et il passe à la limite avec m en faisant appel à la formule du produit de Wallis qui fournit $a = 4/\pi$.

Entrons un peu plus dans les détails. Écrivant $x_1, \ldots, x_m$ au lieu de $a, b, \ldots, r$, et posant $k_i = (2i-1)^2$, $i = 1, \ldots, m$, les m équations considérées par Fourier sont

$$k_1^j x_1 + k_2^j x_2 + \cdots + k_m^j x_m = \delta_{j,0}, \qquad j = 0, \ldots, m-1,$$

où $\delta_{j,0}$ est le symbole de Kronecker. Fourier travaille « à la main » au long de quatre pages de calculs, mais nous pouvons de notre côté utiliser la règle de Cramer, qui exprime x_1, la valeur approchée $a^{(m)}$ à

22. par exemple [15, art. 184]
23. [15, ch. III, art. 163, p. 159 et suiv.]
24. [14, art. 33], à lire dans [16, p. 138]

l'étape m, à partir d'un quotient de deux déterminants de Vandermonde,

$$x_1 = \frac{k_2 \dots k_m \prod_{1<i<\ell\leqslant m}(k_\ell - k_i)}{\prod_{1\leqslant i<\ell\leqslant m}(k_\ell - k_i)} = \frac{k_2 \dots k_m}{\prod_{1<\ell\leqslant m}(k_\ell - 1)}$$
$$= \frac{3.3.5.5\dots(2m-1)(2m-1)}{2.4.4.6\dots(2m-2)(2m)},$$

qui nous amène bien à Wallis. Le calcul pour $x_2, x_3, \dots$ est analogue.

Fourier observe plus avant que la valeur 1 à gauche de l'équation (1) sera changée en -1 si on ajoute π à y. Cette remarque essentielle lui fait comprendre quelles sont les valeurs de l'extension 2π-périodique qui correspond à sa solution constante sur l'intervalle $(-\pi/2, \pi/2)$: il a obtenu [25] le développement en série trigonométrique d'une fonction « en créneau »,

$$\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sign}(\cos y) = \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y + \cdots. \quad (3)$$

La formule est déjà dans le manuscrit de 1805, et l'étude de 1822 de ce problème se trouve aussi dans le mémoire de 1807 [26]. Bien plus loin dans le texte, Fourier arrive aux formules intégrales « de Fourier » pour le calcul des coefficients. Il ne les a pas utilisées pour l'exemple précédent, il a suivi l'approche calculatoire évoquée ci-dessus. Ensuite, il repasse par cette même approche pour établir les formules intégrales, dans un premier temps au moins. Défaut pour les uns, qualité pour certains, Fourier n'est pas concis : il engage une longue preuve, commençant à l'art. 207, premier article de la Section VI, *Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques* [15] ; il part d'une fonction périodique impaire, écrit son développement en série de Taylor en 0, supposé exister. Égalant la série de Taylor à la série trigonométrique (en sinus) recherchée pour cette même fonction, il calcule les coefficients « de Fourier » au moyen d'équations ressemblant à celles qu'il a données dans le cas de la fonction créneau. Cela mène à l'art. 218, les intégrales apparaissent à l'art. 219. Fourier ne se contente pas d'une seule preuve : à l'art. 221, il propose enfin de multiplier la somme de la série trigonométrique par $\sin nx$ et d'intégrer terme à terme de 0 à π, utilisant l'orthogonalité qui sera si fondamentale en analyse. Il utilise cette méthode depuis 1807 au moins [27] ; on n'en est pas encore, bien entendu, à justifier l'intégration terme à terme. Dans sa démarche progressive et « pédagogique », il est parti d'une fonction régulière pour pouvoir appliquer la première preuve (qui dans une faible mesure pourrait prouver *l'existence* du développement), et il remarque à la fin qu'il peut traiter maintenant, à l'aide des formules intégrales, les fonctions « générales ».

De retour à la physique, Fourier multiplie les exemples « limités » dans l'espace, l'un d'entre eux étant le cas de *l'armille*, un anneau métallique (ch. IV). L'étude de la chaleur dans un cylindre de longueur infinie fait apparaître des fonctions de Bessel : elles ont été présentées par Friedrich Bessel en 1816-1817 à l'Académie de Berlin, publiées en 1819 ; mais Fourier avait étudié cet exemple dès 1807 [16, ch. 15 et 16], et il avait écrit la série entière de J_0 bien avant la publication de Bessel (après Euler cependant, en 1766 et 1784 [28]). Fourier résout par série entière l'équation différentielle $u'' + u'/x + \kappa u = 0$ ($\kappa > 0$, u est liée à la fonction de Bessel J_0 par $u(x) = cJ_0(\sqrt{\kappa}x)$), et il s'en sert afin de produire pour le cylindre des « modes propres » – ce sont ses mots –, qui sont orthogonaux. La constante κ est déterminée par la condition (7) à la surface du cylindre (donnée plus loin), qui amène une suite de valeurs possibles, liées aux solutions $\kappa_i > 0$ d'une équation de la forme $J_0(\sqrt{\kappa_i}r) + \sqrt{\kappa_i}J_0'(\sqrt{\kappa_i}r) = 0$, $r > 0$ étant le rayon du cylindre. Finalement, le cas de l'espace illimité, occulté en 1807, voit arriver la transformation de Fourier sur la droite : elle apparaît dans le mémoire primé en 1812 (art. 71) et à l'article 346 du dernier chapitre du livre de 1822, avec sa transformation inverse. Ce chapitre IX est intitulé tout simplement *De la diffusion de la chaleur*.

Je trouve difficile pour l'historien amateur d'évaluer la preuve qui a conduit à l'équation (3) donnant la *fonction créneau*, et qui a usé d'arguments qu'on peut juger totalement faux suivant les critères de rigueur : les séries dérivées (2) écrites par Fourier sont grossièrement divergentes ; on comprend que des mathématiciens du milieu du XIXe siècle aient pu le prendre pour un fumiste mathématique. On peut aujourd'hui prétendre que ces séries convergent au sens des distributions, mais Fourier utilise la valeur

25. [15, ch. III, art. 177-180]
26. [14, art. 32-43]
27. [14, art. 63]
28. [17, sec. 3.4.4, sec. 9.2.8]
29. [23, sec. 2.4]

ponctuelle des sommes partielles ; Kahane [29] veut y voir la recherche de polynômes trigonométriques de plus en plus « plats » en 0, et qui convergent vers la solution. On est tenté toutefois de se dire que Fourier n'a pas été malchanceux sur ce coup-là. Et encore ! Aimant accumuler les indices concordants, il calcule explicitement la dérivée de la somme partielle de (1), quand on y remplace les coefficients indéterminés $a, b, c, \ldots$ par les valeurs trouvées ; cette dérivée vaut $(-1)^m \sin(2mx)/(2\cos x)$, et il en déduit que les primitives, sommes partielles de (1), sont de plus en plus proches de fonctions constantes sur $(-\pi/2, \pi/2)$ [30].

Niels Henrik Abel [3] et Peter Gustav Lejeune Dirichlet [11] sont vite venus apporter de la rigueur dans le traitement des séries de fonctions. Abel n'a pas, à proprement parler, envisagé les séries trigonométriques dans son article de 1826 (qu'il a rédigé en français [31] ; l'article a été traduit en allemand par August Leopold Crelle, le « patron » du *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, voir [2, préface p. III] ; voir aussi Bottazzini [9, sec. 3.1] pour une analyse de cet article). Abel, à l'occasion de l'étude de la série du binôme de Newton, qu'il trouve insuffisamment justifiée chez Cauchy (bien qu'il vante le traité d'Analyse de ce dernier), établit des principes pour l'étude des séries de fonctions, en particulier pour celle des séries entières de variable complexe, dont il prouve la continuité dans le disque ouvert de convergence. Par ailleurs, Abel écrit également le nombre complexe $z = a + ib$ sous la forme $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ et obtient alors des séries de Fourier. Ses bons principes ne l'empêchent pas de produire lui aussi des énoncés trop optimistes et en conséquence faux [32].

4. Compétition pour la chaleur, inimitiés

L'étude de la chaleur était un sujet sérieux autour de 1800, notamment avec l'essor de la machine à vapeur. Jean-Baptiste Biot, un élève de la première promotion de l'École polytechnique en 1794, disciple de Laplace, est membre de l'Institut dès 1803 ; il restera connu principalement pour la loi de Biot-Savart (1820), ainsi que pour la loi de rotation du plan de polarisation de la lumière traversant un liquide (1835). En 1804, il publie un *Mémoire sur la propagation de la chaleur* [6] [33] ; dans ce mémoire, très révérencieux à l'égard de « M. La Place », il traite de la température d'équilibre dans une barre chauffée à son extrémité, un sujet déjà beaucoup étudié dans plusieurs pays d'Europe, expérimentalement et avec des tentatives de mathématisation. On peut citer le livre du mathématicien et physicien Johann Heinrich Lambert, *Pyrometrie oder vom Maaße des Feuers und der Wärme*, paru en 1779, deux ans après sa mort ; ce livre est imprimé en gothique, pour ne pas nous aider, il a pu être peu lu en France et y avoir un impact assez faible. Il faut aussi remonter à un article (anonyme) d'Isaac Newton en 1701 qui fixe un premier principe, qu'on va grossièrement résumer ainsi : la température d'un corps chaud, refroidi dans un courant d'air de température basse et constante, est une fonction exponentielle décroissante du temps.

Biot décrit son expérience, constate qu'on ne peut pas échauffer sensiblement l'extrémité de la barre de fer de 2 mètres de long et 3 centimètres de section, si on place l'autre extrémité dans un feu intense. À l'équilibre thermique, il trouve une décroissance exponentielle de la température des points de la barre quand on s'éloigne de la source, avance une preuve mathématique verbale, mais n'écrit pas d'équation. Il explique l'équilibre qui s'établit en chaque point de la barre entre la chaleur reçue de la source, la chaleur transmise aux points de la barre plus éloignés et la chaleur perdue en surface, mais sans écrire de symbole ; il ne cite pas Lambert, quoique ces considérations soient quasiment identiques à celles de l'art. 326 de ce dernier [34].

30. [14, art. 43]
31. [2, XIV, p. 219]
32. [9, sec. 3.5]
33. [9, sec. 2.3.a]
34. [18, sec. 8.1, p. 163]

Biot mentionne que les résultats dépendent d'une équation différentielle du second ordre (on imagine qu'elle est de la forme $u'' = \varkappa u$, $\varkappa > 0$) où apparaît le quotient de la *rayonnance* et de la *conductivité* de la barre, deux coefficients qu'il distingue bien, mesurant la déperdition vers l'extérieur et la conduction intérieure. Il indique sans formule que la solution usuelle de l'équation différentielle (en $ae^{\sqrt{\varkappa}x}+be^{-\sqrt{\varkappa}x}$) ne contient ici qu'un terme, puisqu'elle doit rester bornée quand x devient grand (positif). Il signale aussi, avec des mots seulement, que le traitement mathématique conduira, en dehors de l'état d'équilibre, à une équation aux dérivées partielles du second ordre faisant intervenir le temps. Biot propose également, afin d'évaluer la température d'une source très chaude, de se servir de la loi exponentielle trouvée : on pourra mesurer, sur une barre dont une extrémité est placée au contact de la source trop chaude pour le thermomètre, la température d'un point convenablement éloigné de cette extrémité, et en déduire la température de la source chaude.

Le premier essai de Fourier en 1805 contient déjà des équations générales pour la propagation de la chaleur ; il n'est pas publié : ce sont plutôt des notes personnelles, comprenant quelque 80 pages. Fourier va plus loin que Biot : il s'occupe de températures d'équilibre $v(x,y)$ ou $v(x,y,z)$ qui dépendent de plusieurs variables d'espace, et traite aussi la variation avec le temps. Il écrit cependant l'équation différentielle (4) ci-dessous, en x simplement, pour la température d'équilibre de la barre chauffée à un bout, et il mentionne courtoisement [35] le travail de Biot de 1804. Dans cet essai, l'équation de la chaleur n'a pas encore sa forme correcte, Fourier faisant figurer dans l'équation à l'intérieur d'un solide le terme $h(v - v_e)$ de l'équation (7) donnée plus loin, terme qui ne doit apparaître qu'à la surface [36] ; on peut voir toutefois dans une note ajoutée en marge qu'il n'est pas sûr que ce terme doive être présent [37]. La formalisation du phénomène physique n'est pas encore satisfaisante [38] : Biot et Fourier ont des problèmes *d'homogénéité différentielle* dans l'analyse infinitésimale du problème, une « difficulté analytique » que Fourier contourne par une contorsion artificielle. En revanche, l'essai contient des parties mathématiques déjà achevées, on y trouve plusieurs des développements en série trigonométrique [39] qu'on reverra par la suite : la fonction créneau, la fonction en dents de scie entre autres.

Dans son mémoire soumis à l'Académie [14] en 1807, Fourier donne pour la température d'équilibre v de la « barre de Biot » l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2h}{K\ell} v \qquad (4)$$

qui fait intervenir la largeur $\ell/2$ de la barre, cependant, le nom de Biot a disparu – je n'ai pas su trouver pourquoi –. Fourier pratique à cette date une analyse physique qui ne changera (presque) plus, en présentant sa notion de *flux de chaleur* (qui règle son problème d'homogénéité). L'analyse de Biot tenait compte des conductivités h, K – le *quotient* mentionné par Biot, évoqué précédemment –, mais elle ne tenait pas compte de ℓ. Plus tard, Fourier, s'estimant mal traité par Biot, se fera un plaisir d'insister à plusieurs reprises dans des lettres sur « l'erreur » de ce dernier : il est faux de prétendre qu'une tige de fer de 2 mètres de long chauffée à un bout ne peut s'échauffer à l'autre extrémité, si sa section est petite.

Biot était un excellent scientifique, Fourier l'a pourtant traité souvent par le mépris. Ils n'étaient pas du même bord politique et idéologique – Biot était un conservateur catholique – mais surtout, à diverses occasions, Biot a dénigré le travail de Fourier. Celui-ci avait peut-être mal commencé avec ce mémoire de 1807, dont il a transmis une copie à Biot et à Poisson. À tort ou à raison, Biot a pu estimer que Fourier se servait de son article de 1804, en tout cas sans le nommer maintenant, et en être ulcéré. Poisson aussi a attaqué les mathématiques de Fourier. Biot et Poisson, deux jeunes ambitieux et talentueux, étaient dans l'orbite de Laplace ; il semble que le « patron » soit resté au-dessus de cette mêlée.

Laplace écrit à son tour sur la propagation de la chaleur en 1809, dans un mémoire qui traite de bien d'autres sujets de la physique, comme le titre l'indique [25] ; pour la chaleur, il adopte [40] le principe de la transmission par action à courte distance. Il retrouve les équations de la chaleur, admet la priorité de Fourier : « Je dois observer que M. Fourier est déjà parvenu à ces équations, » cependant il ajoute « dont les véritables fondements me paraissent être

35. [16, fin du ch. 8, p. 186]
36. [9, fin de 2.3.a, p. 65-66]
37. [16, ch. 5, p. 111]
38. [18, 8.1, p. 164-165]
39. [16, fin du ch. 8, p. 184]
40. [25, Note, p. 290 dans les Œuvres de Laplace, t. XII]

ceux que je viens de présenter ». Biot publie en octobre 1809 au *Mercure de France* un article [5] rendant compte du livre *Du calorique rayonnant*, de Pierre Prévost ; il y cite de nombreux savants, Laplace et Lavoisier (1784), Pictet, Rumford, Leslie ; il explique le point de vue de Prévost sur le rayonnement, décrit des expériences concrètes pour appréhender le phénomène. Jusque là, rien pour trop fâcher Fourier qui, à l'époque, ne s'occupe pas particulièrement du rayonnement. Mais Biot continue :

> C'est ce qui a conduit un grand géomètre (2) [*renvoi à une note de bas de page, voir ci-après*] à étendre le rayonnement même dans l'intérieur des corps solides ; [...] Ces considérations donnent immédiatement les lois mathématiques de la chaleur transmise conformément aux phénomènes, et elles ont l'avantage de faire disparaître une difficulté analytique qui a jusqu'ici arrêté tous ceux qui ont voulu soumettre au calcul, la propagation de la chaleur à travers les corps.

Pas une seule fois le nom de Fourier n'apparaît dans les douze pages de l'article de Biot. La note (2) est ainsi formulée : « (2) M. Laplace. Ce que l'on rapporte ici a été recueilli dans ses conversations, et forme l'objet d'un travail sur la chaleur, qu'il n'a pas encore publié » – mais Laplace a déjà « lu » un texte à l'Académie pendant la séance du lundi 30 janvier 1809, prélude au mémoire [25] de 1810 –. De fait, Biot attribue à Laplace tout le crédit des découvertes récentes sur la théorie de la chaleur, et sans citer Fourier, il conteste implicitement la validité de ses résultats : « une difficulté analytique [...] qui a [...] arrêté *tous ceux* qui [...] ». Ce passage, particulièrement, choque et vexe Fourier. Il réagit et formule des reproches très vifs à l'égard de Biot dans des lettres à plusieurs correspondants [41], [42]. S'il répugne à polémiquer dans les revues savantes, Fourier est aussi un politique qui a des soutiens : pour faire avancer sa cause, il peut, il sait écrire à des personnes qui ont du poids (il apprendra, par ailleurs, que le silence est plus efficace dans certaines circonstances). Il communique également avec Laplace, en termes fort civils ; il doit tout de même lui garder une rancune qui lui fera oublier de citer, tout au long de son œuvre majeure [15], le nom de Laplace [43].

Biot s'est opposé à Fourier, mais il a quitté assez rapidement la recherche sur la théorie de la chaleur, contrairement à Poisson. Biot parle cependant de la chaleur dans son grand *Traité de physique expérimentale et mathématique* en quatre volumes de 1816 [44] ; dans une longue note au bas de la page 669 du tome 4, il revendique d'avoir été le premier à établir dans son article de 1804 l'équation correcte du cas stationnaire. Fourier n'a eu aucun mal à contredire cette prétention de priorité [45]. Dans la même note, Biot cite encore Laplace comme découvreur de l'équation générale de la chaleur, que Fourier n'aurait fait que *retrouver* : omettant celui de 1807, il mentionne le mémoire primé en 1812 de Fourier, postérieur au mémoire de Laplace. Pour finir, Biot met en avant les travaux de Poisson, dont il vante le traitement du problème de la chaleur, supérieur selon lui à celui de Fourier par les séries trigonométriques. On ne trouve plus trace de la polémique après 1816, tout au moins du vivant de Fourier. Mais à 68 ans, Biot aura encore un peu de fiel à déverser : dans le cours d'un article à la *Revue des Savants* en 1842, consacré d'après le titre à la parution commencée en 1836 des *Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie*, il s'en prendra à la gestion du secrétaire perpétuel Fourier, à la qualité de son éloge de Laplace, etc. etc.

5. La vie parisienne

Kahane [46] parle des concurrents de Fourier, à savoir Cauchy et surtout Poisson dont il réhabilite les mathématiques s'il en était besoin ; il veut peut-être contrebalancer Grattan-Guinness qui, dans un de ses livres [16], a été très négatif à son sujet. Poisson a été un concurrent, sinon un adversaire de Fourier. Dans un séminaire cette année, j'ai entendu Gilles Lebeau parler de Poisson comme d'un grand homme. Il est amusant de voir comment l'avait perçu un futur grand homme, le jeune Abel, 24 ans, séjournant quelque temps à Paris (pour être précis, du 10 juillet au 29 décembre 1826). Les lettres d'Abel ont paru dans un recueil [1] publié en 1902 à l'occasion du centenaire de sa naissance. Heureusement pour nous Français, elles y sont traduites dans notre langue (mais les mots de cette traduction ne sont

41. [10, ch. VI, p. 340]
42. [18, Appendix, lettres XVII et XVIII]
43. [10, ch. VIII, p. 479])
44. [17, sec. 7.7, 9.4.2]
45. [18, ch. 7, p. 158]
46. [23, sec. 3.5]

pas toujours les mêmes que dans les courts extraits des lettres déjà parus et traduits dans les Œuvres [2] en 1881). Abel espérait entrer en contact avec les mathématiciens français, l'été n'était pas le meilleur moment. Il écrit :

« Je n'ai vu Poisson que sur une promenade publique ; il m'a paru très épris de lui-même. Il parait pourtant qu'il ne l'est pas. » (Lettre XVI, à Hansteen, 12 août 1826).

et plus tard :

« Poisson est un petit homme avec un joli petit ventre. Il porte son corps avec dignité. De même Fourier. » (Lettre XVIII, à Holmboe, 24 octobre 1826).

Pour ce qui est de l'aspect physique, Abel préférait sans nul doute les jeunes parisiennes qu'il évoque dans la même lettre du 24 octobre à son ami norvégien. Les lettres d'Abel contiennent quelques expressions « en français dans le texte », rendues ci-dessous en italique. Par leur caractère intime, ces lettres offrent un contraste absolu avec la *sévérité* d'un Fourier [47] dont on connaît peu les émotions (on sait néanmoins qu'il était d'une nature joviale). Après avoir dit qu'il aime aller voir Mlle Mars au théâtre, et parlé des obsèques du grand comédien Talma, Abel ajoute :

> Je vais aussi de temps en temps au Palais Royal que les Parisiens appellent *un lieu de perdition*. On y voit en assez grand nombre *des femmes de bonne volonté*. Elles ne sont nullement indiscrètes. Tout ce que l'on entend est *Voulez-vous monter avec moi mon petit ami ; petit méchant*. [...] Il y en a beaucoup de fort jolies.

Abel assure aussitôt que lui, qui est fiancé en Norvège, reste très sage. Il note qu'il a croisé

« [...] Herr Le-jeune Dirichlet, un prussien, qui l'autre jour est venu me trouver, me considérant comme un compatriote ».

Ce « prussien » est né en 1805 à Düren, alors située dans la France de Napoléon, entre Cologne et Aix-la-Chapelle, et il est vrai, Düren est revenue à la Prusse après 1815 ; son grand-père était né à Verviers [48]. En mai 1822, le jeune allemand vient étudier à Paris. Il prouve en 1825 un cas – parmi deux – du « grand théorème de Fermat » pour $n = 5$, et présente son travail à l'Académie ; l'autre cas est complété rapidement par Adrien-Marie Legendre (et plus tard, par Dirichlet lui-même, dans un article de 1828 au journal de Crelle). Fin 1825, il doit déplorer la mort du général Foy, qui lui avait procuré à Paris une position confortable de précepteur depuis l'été 1823. Dirichlet faisait partie d'un cercle de « partisans » de Fourier, incluant Sturm, Sophie Germain, Navier et, un peu plus tard, Joseph Liouville autour de sa vingtième année. D'après les commentaires des éditeurs des lettres d'Abel, Fourier a recommandé Dirichlet pour son premier poste à Breslau (aujourd'hui Wrocław en Pologne) en 1827. C'est probablement sous son influence que l'arithméticien Dirichlet en vient aux séries trigonométriques. Dans son *célébrissime* article [11] de 1829 sur la question, en français, il reproduit à l'identique, sans dire le nom de Fourier mais en citant la *Théorie analytique de la chaleur* et ses articles, la formule des coefficients qu'on trouve à la fin de l'article 233 du livre de Fourier [15],

$$\frac{1}{2\pi}\int \varphi(\alpha)\,\partial\alpha +$$
$$\frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\cos x\int\varphi(\alpha)\cos\alpha\,\partial\alpha+\cos 2x\int\varphi(\alpha)\cos 2\alpha\,\partial\alpha....\\ \sin x\int\varphi(\alpha)\sin\alpha\,\partial\alpha+\sin 2x\int\varphi(\alpha)\sin 2\alpha\,\partial\alpha....\end{array}\right\}.$$

Naturellement, Fourier s'était approché du noyau de Dirichlet D_n et de son utilisation : il avait écrit [49] – employant la fonction aujourd'hui démodée *sinus verse* – la somme $D_n(x) = \sum_{j=-n}^{n}\cos(jx)$ sous une forme équivalente à $\cos(nx) + \sin(nx)\operatorname{cotan}(x/2)$, et avait avancé des raisons heuristiques pour un « lemme de Riemann », puis pour la convergence vers $\varphi(x_0)$ des intégrales de φ contre les translatés par x_0 de ces « noyaux ». Dirichlet a transformé ces « raisons » en preuve.

L'absence du nom de Fourier dans l'article [11] signifie-t-elle que celui-ci était si grand dans l'esprit de Dirichlet que le nommer lui semblait inutile ? C'est alors seulement que le lecteur moderne peut être sûr d'en comprendre le premier paragraphe,

> [...] Cette propriété n'avait pas échappée [*sic*] au géomètre illustre qui a ouvert une nouvelle carrière aux applications de l'analyse, en y introduisant la manière d'exprimer les fonctions arbitraires dont il est question ; elle se trouve énoncée dans le Mémoire qui contient ses premières recherches sur la chaleur.

L'article de Dirichlet est ainsi présenté par le journal « de Crelle », après le titre :

47. [10, épilogue, p. 683]
48. voir Jürgen Elstrodt [13]
49. [15, ch. IX, art. 423, p. 562]

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

et daté en dernière page : « Berlin, Janvier 1829 », le mois avant son 24^{e} anniversaire. Plus tard, en allemand, dans un article [12] de 1837 destiné aux physiciens-mathématiciens, Dirichlet nommera Fourier et explicitera sa considération pour lui. C'est à Cauchy, qui a proposé des preuves concernant les séries de Fourier (*Mémoire sur le développement des fonctions en séries périodiques*, 1827), que Dirichlet adresse ses critiques dans [11]. Mauvais souvenirs de Paris, de mai 1822 à 1826 ? Revenons à la lettre du 24 octobre 1826, où Abel écrit :

> Legendre est un homme extrêmement aimable mais par malheur « vieux comme les pierres » [*steinalt, en allemand dans le texte*]. Cauchy est *fou*, et il n'y a rien à faire avec lui,

il ajoute en revanche : « bien qu'il soit en ce moment le mathématicien qui sait comment traiter les mathématiques. » Plus loin, à propos d'un mémoire *Sur une certaine classe d'équations transcendantes* qu'il vient d'achever et veut présenter à l'Académie, Abel confie :

> Je l'ai montré à Cauchy ; mais c'est à peine s'il a voulu y jeter les yeux. Et j'ose dire sans me vanter qu'il est bon. Je suis curieux d'entendre le jugement de l'Institut.

C'est justement le secrétaire perpétuel Fourier qui s'en occupera, pas si bien d'ailleurs ; Legendre (un vrai spécialiste, mais âgé de 74 ans) et Cauchy sont désignés comme « commissaires », à la séance du 30 octobre 1826. Ensuite, rien ne bouge. Plus de deux ans après, Carl Jacobi écrit à Legendre de Königsberg [50], le 14 mars 1829, pour obtenir des nouvelles du mémoire d'Abel, moins d'un mois avant la mort de ce dernier. Legendre répond le 8 avril de Paris, explique que « le mémoire n'était presque pas lisible, il était écrit en encre très-blanche, les caractères mal formés », que Cauchy et lui s'étaient mis d'accord pour demander à l'auteur une copie plus lisible, ce qu'Abel ne fit pas, et les choses en étaient restées là. Legendre accable un peu Cauchy :

> M. Cauchy a gardé le manuscrit jusqu'ici sans s'en occuper [...]. Cependant j'ai demandé à M. Cauchy qu'il me remette le manuscrit qui n'a jamais été entre mes mains, et je verrai ce qu'il y a à faire, pour réparer, s'il est possible, le peu d'attention qu'il a donné à une production qui méritait sans doute un meilleur sort.

Kahane [51] parlant de Fourier nous dit de Cauchy qu'il « n'était pas son ami », un très joli « understatement ». On lit souvent que néanmoins, Cauchy lui a reconnu la paternité de la notation $\int_a^b$ de l'intégrale définie, prise entre deux bornes a et b. Un peu comme si Georg Cantor, ou Karl Weierstrass après 1885, insistait pour reconnaître à Leopold Kronecker la paternité de son symbole...

6. Réception de l'œuvre : Riemann

On peut lire dans plusieurs sources que Fourier est resté méconnu, maltraité en France – même Victor Hugo s'en est mêlé ! [52] –, en dépit de sa reconnaissance (lente) par l'Académie. Ses *Œuvres* sont publiées tardivement, en 1888 et 1890. Pourtant, Dirichlet l'a célébré, en français, sept ans à peine après la parution du livre de 1822, et il a dû transmettre à Bernhard Riemann sa haute appréciation de l'œuvre de Fourier. La partie historique du mémoire d'habilitation de Riemann [29], écrit en 1854 et publié en 1867 après sa mort, est donnée par Kahane [53] en allemand et en français (traduction de L. Laugel [28], 1873) ; Riemann indique dès la première page :

> Les séries trigonométriques, ainsi appelées par Fourier [...] jouent un rôle considérable dans la partie des Mathématiques où l'on rencontre des fonctions entièrement arbitraires.

Plus loin, après avoir rappelé d'Alembert, Euler, Bernoulli et Lagrange :

> Près de cinquante années s'étaient écoulées sans que la question de la possibilité de la représentation analytique des fonctions arbitraires fît aucun progrès essentiel, quand une remarque de Fourier vint jeter un nouveau jour sur cet objet. Une nouvelle ère s'ouvrit pour le développement de cette partie des Mathématiques, et s'annonça bientôt d'une

50. [19, p. 436]
51. [23, fin du ch. 1]
52. [23, fin du ch. 1]
53. [23, sec. 5.9]

> manière éclatante par de grandioses développements de la Physique Mathématique. Fourier remarqua que, dans la série trigonométrique [...] les coefficients se déterminent par les formules
>
> $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$
>
> $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$
>
> [*Riemann écrit* $a_n \sin nx + b_n \cos nx$, *contrairement à l'habitude moderne*] Il vit que cette détermination reste encore applicable lorsque la fonction $f(x)$ est donnée tout à fait arbitrairement.

Riemann réfute ensuite la position de Poisson, qui a voulu, chaque fois qu'il les a citées (Riemann prend pour exemple le *Traité de mécanique* de 1833, art. 323, p. 638), faire remonter ces formules à une publication de Lagrange dans *Miscellanea Taurinensia* (t. III, 1762-1765). Dans ce long travail plutôt touffu, Lagrange résout un certain nombre d'équations et de systèmes différentiels, et revient à l'art. 38 sur sa solution du problème des cordes vibrantes, où il a raisonné sur N masses égales placées en des points de la corde équidistants, faisant tendre N vers l'infini par la suite. La formule invoquée par Poisson apparaît à l'article 41. Lagrange y pose une question d'interpolation qu'on va détailler, interpolation sur $[0,1]$ par un polynôme trigonométrique somme de sinus.

Étant donnée une « courbe » $Y(x)$ telle que $Y(0) = Y(1) = 0$, Lagrange cherche, pour n grand mais fixé, une courbe $y(x) = \alpha\sin(x\pi) + \beta\sin(2x\pi) + \cdots + \omega\sin(nx\pi)$ qui coïncide aux points $x_k = k/(n+1)$, $k = 1,\ldots,n$, avec la courbe initiale Y. Il écrit sa solution (à une différence de notation près) sous la forme

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} 2Z_j \sin(jx\pi)$$

où

$$Z_j = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} Y(x_k)\sin(jx_k\pi), \quad j = 1,\ldots,n;$$

ce que Lagrange a prouvé dans les pages précédentes lui fournit la formule « inverse » $y(x_k) = Y(x_k)$, pour chaque $k = 1,\ldots,n$. Ce sont bien les transformations « de Fourier » directe et inverse, sur le groupe $\mathbb{Z}/(2n+2)\mathbb{Z}$, limitées aux fonctions « impaires » (on pourrait prolonger la fonction Y en fonction impaire sur $[-1,1]$). Ensuite, Lagrange *décide de poser* $n+1 = 1/(dX)$ et $x_k = k/(n+1) = X$. Il récrit alors la formule pour Z_j comme une « intégrale étant prise depuis $X = 0$ jusqu'à $X = 1$ » ; remplaçant dans $y(x)$, il obtient une sorte de *formule intégrale de Fourier* (pour les fonctions impaires, et limitée au degré n), dont je modernise un peu la notation,

$$y(x) = 2\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^1 Y(X)\sin(jX\pi)\,dX\Big)\sin(jx\pi). \qquad (5)$$

Lagrange précise qu'il a bien trouvé ainsi une fonction $y(x)$ qui *coïncide* avec la fonction donnée $Y(x)$ aux points $x_k = k/(n+1)$, $k = 1,\ldots,n$ (et $k = 0, n+1$).

Il y a un problème : pour que Poisson ait tout à fait raison de contester la priorité de Fourier, il faut vraiment lire *une intégrale*. Mais pour que Lagrange ait réussi son interpolation annoncée, *il faut* qu'on ait gardé ci-dessus une somme finie. À la partialité sans surprise de Poisson à l'égard de Fourier – même après la mort de ce dernier –, Riemann répond par une petite dose de mauvaise foi, refusant de reconnaître au moins les prémices des formules intégrales, dans des « sommes de Riemann » dont le pas tend vers 0 ! Il écrit :

> Cette formule a bien le même aspect que la série de Fourier, si bien qu'au premier coup d'œil, une confusion est aisément possible ; mais cette apparence provient simplement de ce que Lagrange a employé les symboles $\int dX$, là où il aurait employé aujourd'hui les symboles $\sum \Delta X$. [...] Si Lagrange avait fait tendre n vers l'infini dans cette formule, il serait bien parvenu au résultat de Fourier ; [...] [*je me suis un peu écarté de la traduction citée* [28]].

Bien qu'introduit par Euler en 1755, le symbole de sommation $\sum$ (sans bornes indiquées, comme pour l'intégrale à cette époque) n'était pas courant avant 1800 ; Lagrange avait besoin d'un symbole afin de pouvoir écrire sur seulement deux lignes la double sommation dans la formule (5) pour $y(x)$, la somme en $X = x_k$ (qu'il traduit donc par les intégrales de 0 à 1), et celle en j qu'il écrit sous forme développée $s_1 + \cdots + s_n$; il aurait utilisé le signe $\int$ dans ce but. Riemann ajoute que Lagrange *ne croyait pas* à la possibilité de représenter les fonctions arbitraires par des séries trigonométriques, et que pour cette raison, il n'était pas arrivé aux formules de Fourier :

« Bien sûr il nous semble aujourd'hui à peine pensable que Lagrange ne soit pas parvenu à la série de Fourier à partir de sa formule de sommation ». Il continue :

« C'est Fourier qui a, le premier, compris d'une manière exacte et complète la nature des séries trigonométriques. »

puis il passe aux premières *preuves générales du théorème de Fourier*, c'est-à-dire à l'article de Dirichlet [11].

7. Physique mathématique ou mathématiques pures ?

Je ne suis pas bien qualifié pour parler de la portée, évidente, proclamée dans le titre du livre de Dhombres et Robert [10], de l'œuvre de Fourier en ce qui concerne la physique mathématique. Il est clair que Fourier voulait œuvrer à la compréhension du monde, mettre en équation un phénomène naturel de la plus haute importance, comme Newton l'avait fait pour l'attraction des corps. L'ambition est grande, le point de vue de physique mathématique est énoncé dès les premières lignes du *Discours préliminaire* à la *Théorie* [15] [54] :

« La chaleur pénètre, comme la gravité, toutes les substances de l'univers [...] Le but de notre ouvrage est d'exposer les lois mathématiques que suit cet élément. Cette théorie formera désormais une des branches les plus importantes de la physique générale. »

et vers le milieu du discours préliminaire :

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. »

Fourier tient à dire au début du *Discours* qu'il a lui-même effectué de nombreuses mesures à l'appui de sa théorie, avec les instruments les plus précis. Il ne veut pas avoir à prendre en compte les divers aspects particuliers que peut prendre la chaleur ; il évite d'avoir à distinguer entre les différentes formes de propagation, par contact, par diffusion, par rayonnement. C'est aussi le point de vue de Biot en 1804 [6] :

> Je n'examinerai pas ici si la chaleur est un corps, ou si elle n'est que le résultat du mouvement intérieur des particules de la matière, mais en admettant que ses effets, lorsqu'elle devient sensible, sont mesurables par le thermomètre, je chercherai les lois de sa propagation.

Dans son mémoire de 1807, et plus définitivement à partir du mémoire primé en 1812 [55], [56], Fourier fonde sa démarche sur la notion de *flux de chaleur*, qui pourra sembler très naturelle à notre époque mais qui est bien son invention. Considérons un point P intérieur à un solide homogène, un temps t et une direction donnée par un vecteur u unitaire ; envisageons un cercle infinitésimal $d\sigma$ de centre P et contenu dans un plan affine orthogonal à u, désignons par dS l'aire de $d\sigma$, et par dq la quantité de chaleur qui traverse $d\sigma$, dans le sens de u et en une durée dt après la date t. Le flux de chaleur au point P, au temps t et dans la direction u, est la limite ϕ_u du quotient $dq/(dS\,dt)$; en termes modernes, la loi fondamentale de Fourier indique que ce flux s'exprime comme un produit scalaire, $\phi_u = -\kappa\nabla v \cdot u$, où v est la température et où le coefficient $\kappa > 0$ dépend du solide. Avec des mots différents, il le formule [57] dans les articles 96 et 97 de la section *Mesure du mouvement de la chaleur en un point donné d'une masse solide* ; en réalité, il n'y a pas de vecteur chez lui, seulement des coordonnées rectangulaires ; le flux dans le cas général est déterminé par trois valeurs, les flux dans les directions des x, y et z croissants. Dans le livre, il y arrive très progressivement, commençant par des mouvements uniformes de chaleur, et même d'abord, uniformes dans la direction d'un axe de coordonnées (ch. I, sec. 4 et sec. 7). Fourier revient au flux à l'art. 140, avant d'en déduire l'équation de la chaleur à l'art. 142.

Évidemment, Fourier n'écrit pas l'équation de la chaleur sans y faire figurer des constantes physiques caractéristiques du corps considéré. Ainsi, pour l'équation qui régit la température v à l'intérieur d'un solide, il écrit

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \qquad (6)$$

où D est la densité, K la conductibilité interne et C la chaleur spécifique ; de plus, il est un des premiers à s'intéresser à des *équations aux dimensions* faisant intervenir les puissances positives ou négatives des grandeurs physiques, la longueur, le temps et pour lui, la température [58] ; on n'aurait pas aujourd'hui la température mais la masse, en exprimant la chaleur en équivalent mécanique.

54. repris dans [10, Annexe V, p. 717] ou dans [23, sec. 2.5]
55. [18, ch. 9]
56. [14, art. 18 et suiv.]
57. [15, ch. I, sec. VIII, p. 89]
58. [10, ch. VIII, p. 515-518]

Fourier précise la condition aux limites pour son équation (6) aux dérivées partielles : l'équation à la frontière du solide est, en notation moderne,

$$\nabla v \cdot n = -\frac{h}{K}(v - v_e), \tag{7}$$

où n est la normale sortante, h la conductibilité externe et v_e la température à l'extérieur du solide [59] (Fourier suppose $v_e = 0$).

Dhombres et Robert [60] indiquent que l'enseignement de la propagation de la chaleur suit encore de nos jours la démarche de Fourier, ils notent

« [...] la manière quasi inchangée dont se formulent, se présentent, et se démontrent aujourd'hui les résultats essentiels que Fourier a énoncés [...] »,

précisant qu'on trouve dans les grands manuels de physique du milieu du xx^e siècle (Georges Bruhat, Richard Feynman parmi d'autres), pour une plaque métallique ou un anneau par exemple, des calculs essentiellement semblables à ceux de Fourier. Ils ajoutent qu'on ne démontre plus de nos jours la loi de diffusion de la chaleur dans les solides, parce que d'une part, on ne sait pas le faire à partir des lois fondamentales de la physique atomistique, et qu'à l'inverse, le raisonnement de Fourier paraît trop peu atomiste aujourd'hui.

Après la consécration, Fourier publie entre 1817 et 1825 des « contributions à l'étude de la chaleur rayonnante », le phénomène de rayonnement par lequel la chaleur (ou le froid) peut se transmettre à distance sans contact. Ce sujet devra toutefois attendre les avancées de la physique à la fin du xix^e siècle (loi de Stefan en 1860, retrouvée par Boltzmann en 1879) pour recevoir des réponses plus complètes. En 1824, Sadi Carnot, fils de Lazare Carnot, publie ses *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, mais Fourier reste étranger à ces recherches – il ne sera pas le seul, dans les années 1825-1830 –; le livre de Carnot participe à la naissance de la thermodynamique.

Kahane a écrit plusieurs articles sur Fourier, il a mentionné l'opposition entre les points de vue de ce dernier et ceux de certains mathématiciens « purs ». Il a cité [61] un extrait très connu d'une lettre de Jacobi à Legendre, envoyée de Königsberg le 2 juillet 1830, peu de temps après la mort de Fourier survenue mi-mai 1830. Jacobi s'adresse à Legendre en français, il demande ici et là d'être excusé des incorrections que son français pourrait comporter. Les lettres de Jacobi ont été transcrites et publiées par Joseph Bertrand [20]; nous sommes obligés de faire confiance à Bertrand et à son éditeur pour l'exactitude de la transcription : les lettres ont brûlé en 1871 pendant la Commune de Paris, ainsi que la maison de Bertrand rue de Rivoli.

Jacobi écrit [62] : « J'ai lu avec plaisir le Rapport de M. Poisson sur mon Ouvrage, et je crois pouvoir en être très-content; il me paraît avoir très-bien présenté [*mon travail.*]. Mais M. Poisson n'aurait pas dû reproduire dans son Rapport une phrase peu adroite de feu M. Fourier, où ce dernier nous fait des reproches, à Abel et à moi, de ne nous pas être occupés de préférence du mouvement de la Chaleur. » Puis :

> Il est vrai que M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question des nombres vaut autant qu'une question du système du monde.

Jacobi poursuit en regrettant la disparition de Fourier, « [...] de tels hommes sont trop rares aujourd'hui, même en France, pour qu'il soit facile de les remplacer. » Il termine en demandant à Legendre de faire ses « civilités à Mlle Sophie Germain, dont je me félicite d'avoir fait la connaissance, et de me dire des nouvelles de sa santé [...] ». Sophie Germain souffre de la « longue maladie » qui l'emportera l'année suivante.

Quatre ans plus tôt, Abel regrettait l'engagement appliqué de Fourier et des mathématiciens français, il écrivait à Holmboe (24 octobre 1826) :

> [Cauchy] est d'ailleurs le seul qui travaille aujourd'hui dans les mathématiques pures. Poisson, Fourier, Ampère etc. etc. ne s'occupent absolument que de magnétisme et d'autres affaires de physique.

Poisson, Fourier, André-Marie Ampère : trois professeurs à l'École polytechnique. On pourrait se demander si la prééminence scientifique de l'École en France pendant la première moitié du xix^e siècle, avec sa mission de former principalement des ingénieurs, n'est pas une des raisons du déclin de la France mathématique au milieu du même siècle, dépassée par l'université allemande. Joseph Ben-David [4] a incriminé plutôt une sclérose de l'enseignement à l'École,

59. [15, art. 146 p. 138 et art. 147]
60. [10, ch. IX, p. 626]
61. [23, sec. 4.6]
62. [19, vol. 1, p. 454]

qui s'est laissé distancer par la marche de la science, oubliant une des missions fixées par les pères fondateurs, le deuxième terme de la pompeuse devise de 1804, « Pour la Patrie, les Sciences et la Gloire ».

La renommée mathématique de Fourier a subi une éclipse en France dans la deuxième partie du XIX^e siècle, mais l'Analyse harmonique et ses séries de Fourier, sa transformation de Fourier, a trouvé sa place au XX^e siècle au sein des mathématiques françaises « très pures ». Kahane y a contribué par ses articles et ses livres, où on peut voir traités les sujets les plus pointus sur des *ensembles minces*, provenant d'une étude exclusivement mathématique des séries de Fourier. Un peu paradoxalement, le même Kahane s'est fait l'avocat de la physique mathématique de Fourier. Revenant sur « l'éclipse » il voit, dans son article [22] de 2014, un retour en force des points de vue de Fourier à l'occasion d'une convergence math-physique à l'époque actuelle :

> Cette méconnaissance de Fourier est maintenant datée. Elle ne s'est maintenue en France qu'à la faveur d'un divorce entre mathématiques et physique qui est aujourd'hui complètement résorbé. L'une des plus grandes universités françaises, à Grenoble naturellement, porte le nom de Joseph Fourier.

Nous pourrons conclure avec Kahane, qui écrit dans le même texte :

> Quand j'étais jeune, et c'est encore le cas aujourd'hui parmi les jeunes, « l'honneur de l'esprit humain » sonnait plus glorieux que « l'étude approfondie de la nature ». Cependant la philosophie de Fourier me paraît plus proche que jamais de l'évolution actuelle des mathématiques et de leur portée, qualifiée parfois de « déraisonnable », dans les sciences de la nature.

La plupart des références « historiques » ci-dessous sont faciles à trouver de nos jours sur Internet, par exemple la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier ou le Mémorial rassemblant les Lettres d'Abel, sur des sites tels que EuDML, Gallica, archive.org et bien d'autres.

Repères chronologiques

Joseph-Louis Lagrange	1736-1813	Gaspard Monge	1746-1818
Pierre-Simon Laplace	1749-1827	Adrien-Marie Legendre	1752-1833
Lazare Carnot	1753-1823	François Budan de Boislaurent	1761-1840
Sylvestre-François Lacroix	1765-1843	Joseph Fourier	1768-1830
Napoléon Bonaparte	1769-1821	Jean-Baptiste Biot	1774-1862
Marie-Sophie Germain	1776-1831	Jacques-Joseph Champollion-Figeac	1778-1867
Siméon Denis Poisson	1781-1840	Henri Beyle (Stendhal)	1783-1842
Friedrich Wilhelm Bessel	1784-1846	Claude Louis Marie Henri Navier	1785-1836
Augustin Louis Cauchy	1789-1857	Jean-François Champollion	1790-1832
Nicolas Sadi Carnot	1796-1832	Niels Henrik Abel	1802-1829
Jacques Charles Sturm	1803-1855	Carl Gustav Jacobi	1804-1851
Gustav Lejeune-Dirichlet	1805-1859	Joseph Liouville	1809-1882
Évariste Galois	1811-1832	Bernhard Riemann	1826-1866

Références

[1] N. Abel. *Niels Henrik Abel : Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*. Jacob Dybward, Kristiana ; Gauthier-Villars, Paris ; William & Norgate, Londres ; B. G. Teubner, Leipzig, 1902.

[2] N. Abel. *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*. Nouvelle édition publiée aux frais de l'État norvégien, par MM. L. Sylow et S. Lie. De Grøndahl & Søn, Christiana. 1881.

[3] N. Abel. « Untersuchungen über die Reihe: $1+\frac{m}{1}x+\frac{m.(m-1)}{1.2}.x^2+\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}.x^3+\ldots\ldots$ u. s. w. » *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1** (1826), p. 311–339.

[4] J. Ben-David. « The rise and decline of France as a scientific centre ». *Minerva* **8**, nº 1-4 (1970), p. 160–179.

[5] J.-B. Biot. « Du calorique rayonnant par Pierre Prevost ». *Mercure de France* **38** (1809), p. 327–338.

[6] J.-B. Biot. « Mémoiresur la propagation de la chaleur, et sur un moyen simple et exact de mesurer les hautes températures ». *Journal des Mines **99**, 203-224 (1804-1805) ; et aussi: Bibliothèque britannique* **27** (1804), p. 310–329.

[7] *Bonaparte, la campagne d'Égypte*. Film documentaire-fiction de Fabrice Hourlier. 2016.

[8] J. Borowczyk. « Sur la vie et l'œuvre de François Budan (1761-1840) ». *Historia mathematica* **18**, nº 2 (1991), p. 129–157.

[9] U. Bottazzini. *The higher calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Springer-Verlag, New York, 1986.

[10] J. Dhombres et J.-B. Robert. *Joseph Fourier, créateur de la physique mathématique*. "Un savant, une époque". Belin, Paris, 1998.

[11] P. G. L. Dirichlet. « Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données ». *Journal für die reine und angew. Math.* **4** (1829), p. 157–169.

[12] P. G. L. Dirichlet. « Ueber die Darstellung ganz willkührlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen ». *Repertorium der Physik* (1837).

[13] J. Elstrodt. « The life and work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) ». *Analytic Number Theory* (2007). A tribute to Gauss and Dirichlet. Proceedings of the Gauss-Dirichlet conference, Göttingen, Germany, June 20-24, 2005. Édité par William Duke et Yuri Tschinkel. Clay Mathematics Proceedings 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2007., p. 1–37.

[14] J. Fourier. « Sur la propagation de la chaleur ». *Mémoire présenté à l'Académie en décembre 1807. Inédit, reproduit et commenté dans [16]* (1972).

[15] J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, Paris, 1822.

[16] I. Grattan-Guinness. *Joseph Fourier 1768-1830. A survey of his life and work, based on a critical edition of his monograph on the propagation of heat, presented to the Institut de France in 1807, en collaboration avec J. Ravetz*. The MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1972.

[17] I. Grattan-Guinness. *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840: from the calculus and mechanics to mathematical analysis and mathematical physics*. **4**. Science Networks. Historical Studies. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[18] J. Herivel. *Joseph Fourier, The Man and the Physicist*. Clarendon, Oxford, England, 1975.

[19] C. G. J. Jacobi. *Jacobi's Gesammelte Werke*. G. Reimer, Berlin, 1881-1891.

[20] C. G. J. Jacobi. « Lettres sur la théorie des fonctions elliptiques (publiées par Joseph Bertrand) ». In : *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. Vol. 6. Elsevier. 1869, p. 127–175.

[21] *Joseph Fourier (1768-1830), de la Révolution française à la révolution analytique. Sous la direction de Jean Dhombres*. à paraître chez Hermann.

[22] J. P. Kahane. « Qu'est-ce que Fourier peut nous dire aujourd'hui ? » *Gazette des Mathématiciens*, n° 141 (2014), p. 69–75.

[23] J.-P. Kahane et P.-G. Lemarié-Rieusset. *Séries de Fourier et ondelettes*. Cassini, Paris, 1998.

[24] T. W. Körner. *Fourier analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[25] P. S. Laplace. « Mémoire sur le mouvement de la lumière dans les milieux diaphanes ». *Œuvres complètes, t. XII* (1810), p. 267–298.

[26] *L'École Normale de l'an III. Vol. 1, Leçons de mathématiques. Laplace-Lagrange-Monge. Sous la direction de Jean Dhombres. Dunod, Paris, 1992*. Version numérique (consultable en ligne) : Éditions Rue d'Ulm via OpenEdition, 2012.

[27] F. Masson. « L'expédition d'Égypte et la "Description" ». *Bulletin de la Sabix*, n° 1 (1987).

[28] B. Riemann. « Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique ». *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* **5** (1873), p. 20–48.

[29] B. Riemann. *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*. Dreizehnten Band der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1867.

Bernard Maurey

Équipe d'Analyse fonctionnelle de l'imj-prg, Sorbonne Université

`bernard.maurey@imj-prg.fr`

Professeur à l'université Paris 7 – Denis Diderot jusqu'en 2011, ses recherches portent principalement sur la théorie des espaces de Banach, les inégalités géométriques et fonctionnelles.

Je remercie Jean Dhombres, qui m'a autorisé à piller son ouvrage avec Jean-Bernard Robert [10], et qui m'a fait l'honneur de lire et commenter une version préliminaire de cet article ; il m'a permis de rectifier quelques-unes de mes inexactitudes. Les deux rapporteurs ont contribué à faire beaucoup progresser mon texte, en me forçant à être plus clair ou plus précis, et en m'aidant à éviter de passer à côté de points importants. L'Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche et Sorbonne Université m'ont donné les moyens nécessaires à la réalisation de ce travail.

Autour de l'ergodicité quantique

• M. Ingremeau

L'ergodicité quantique est une propriété décrivant la distribution asymptotique des fonctions propres d'un opérateur auto-adjoint, ou d'une suite d'opérateurs auto-adjoints. Nous présenterons d'abord cette propriété dans le cadre le plus standard, issu de la physique : celui du laplacien dans un domaine borné ou sur une variété riemannienne dont le flot géodésique est *ergodique*[1]. Nous décrirons ensuite des résultats récents concernant l'ergodicité quantique pour la matrice d'adjacence sur les grands graphes. Avant cela, quelques rappels de physique ne seront pas de trop.

1. Introduction physique

1.1 – Un peu de physique classique...

En mécanique classique, la position $x(t)$ d'une particule de masse m est gouvernée par l'équation de Newton, qui s'écrit en l'absence de frottements

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\nabla V(x). \tag{1}$$

Ici, $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est l'énergie potentielle de la particule, décrivant par exemple les forces électriques à laquelle la particule est soumise.

Une manière équivalente de formuler (1), appelée formulation hamiltonienne, consiste à noter $q(t) := x(t)$, $p(t) := m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, et à introduire la fonction

$$H_{clas}(q,p) = \frac{|p|^2}{2m} + V(q). \tag{2}$$

H_{clas} est le hamiltonien classique, ou l'énergie, du système. L'équation (1) peut alors se réécrire comme le système

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H}{\partial p}. \end{cases}$$

1.2 – ... et son analogue quantique

En mécanique quantique, une particule n'est plus simplement décrite par un point dépendant du temps $x(t)$, mais par une fonction $\psi(t;\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, appelée *fonction d'onde*, avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|\psi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1$. Cette fonction est gouvernée par une équation aux dérivées partielles, l'*équation de Schrödinger* :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi. \tag{3}$$

Ici, $\hbar$ est une constante physique, appelée constante de Planck, et V est encore l'énergie potentielle de la particule.

L'interprétation physique de la fonction d'onde, proposée par M. Born, est la suivante : si $A \subset \mathbb{R}^3$, la probabilité à l'instant t de mesurer la particule dans la région A est donnée par

$$\int_A |\psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x.$$

Le second membre de (3) peut être vu comme l'application à ψ de l'opérateur linéaire

$$H_{quant} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V, \tag{4}$$

appelé hamiltonien quantique.

Bien que les hamiltoniens classiques et quantiques soient des objets mathématiques très différents (le premier est une fonction de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ à valeurs réelles, et le second, un opérateur agissant sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$), ils se ressemblent beaucoup. Formellement, le hamiltonien quantique peut être obtenu en remplaçant chaque p_j par $i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Il existe des procédures générales, appelées procédures de quantification, pour passer d'une fonction $a \in C((\mathbb{R}^d)^2;\mathbb{R})$ à un opérateur $Op_\hbar(a)$ agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Par exemple, la quantification standard

1. On dit qu'un système dynamique est ergodique s'il n'est pas possible de décomposer l'espace des phases en deux parties invariantes par la dynamique et non triviales. Un sens plus précis sera donné à cette définition en section 2.3.

est définie comme

$$\big(Op_\hbar(a)u\big)(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar}\langle x-y,\xi\rangle}a(x,\xi)u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi. \quad (5)$$

Les opérateurs de la forme (5), qui dépendent d'un paramètre $\hbar > 0$, sont appelés des opérateurs pseudo-différentiels.

Les propriétés classiques de la transformée de Fourier permettent de retrouver que

$$Op_\hbar(H_{clas}) = H_{quant}.$$

1.3 – Mécanique quantique sur une variété et fonctions propres du laplacien

Dans certaines expériences physiques, les particules sont confinées dans une région de $\mathbb{R}^3$, ou même dans une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^3$. Pour modéliser de telles situations, il convient de reformuler l'équation de Schrödinger sur une variété.

Soit (M,g) une variété Riemannienne compacte, lisse, et soit Δ_g l'opérateur de Laplace-Beltrami [2] sur M. Une particule quantique vivant sur la variété M sera alors une fonction $\psi(t;\cdot) \in L^2(M)$, avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|\psi(t)\|_{L^2(M)} = 1$, satisfaisant à [3]

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\hbar^2\Delta_g\psi, \quad (6)$$

dans le cas où $V = 0$ et $m = 1/2$. Si M possède un bord, on impose en plus à ϕ une condition aux limites. Le plus souvent, il s'agit de la condition de Dirichlet $\phi = 0$ sur ∂M.

L'équation (6) peut être résolue en diagonalisant Δ_g : il existe une suite (λ_n) croissante et tendant vers $+\infty$ avec $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ et une base orthonormale (ϕ_n) de $L^2(M)$ telle que

$$-\Delta\phi_n = \lambda_n\phi_n.$$

La solution de (6) s'écrit alors

$$\psi(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x)e^{-i\hbar\lambda_n t},$$

où les c_n dépendent de la condition initiale $\psi(t=0)$.

Les valeurs propres λ_n et les fonctions propres ϕ_n ne sont pas de simples artefacts mathématiques permettant de résoudre (6), mais possèdent une vraie interprétation physique : les $(\hbar^2\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les énergies que peut prendre la particule, et les $\phi_n(x)e^{-i\hbar\lambda_n t}$ sont les solutions de l'équation de Schrödinger pour lesquelles l'énergie de la particule est déterministe, et indépendante du temps.

Les λ_n et ϕ_n jouent un rôle important dans d'autres branches des mathématiques et de la physique, et permettent par exemple de résoudre simplement l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes.

Malheureusement, il n'existe des expressions explicites pour les fonctions propres ϕ_n que lorsque M est une variété très simple, comme un disque, un tore ou une sphère. Pour les variétés plus générales, le mathématicien (ou le physicien) doit calculer numériquement les ϕ_n, ou bien étudier leurs propriétés qualitatives.

Les propriétés qui nous intéresseront seront les propriétés *semi-classiques* des ϕ_n, c'est-à-dire leurs propriétés lorsque n tend vers l'infini. Dans cet article, nous expliquerons comment certaines propriétés semi-classiques des fonctions propres dépendent de la dynamique classique sous-jacente. Nous présenterons en particulier des résultats de *chaos quantique*, décrivant les propriétés semi-classiques des fonctions propres lorsque la dynamique classique est chaotique [4].

2. Délocalisation à haute fréquence

Quelles propriétés peut-on espérer des ϕ_n lorsque n tend vers l'infini ? Commençons par le cas élémentaire du segment $I = [0,\pi]$ avec condition de Dirichlet. Dans ce cas, les valeurs propres sont les entiers positifs, et les fonctions propres associées sont les $(\sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite de fonctions ne possède de limite dans aucun espace L^p, ou C^k. Par contre, si $A \subset I$ est un ouvert, on a

$$\int_A |\sin(nx)|^2\mathrm{d}x \longrightarrow \mathrm{Leb}(A).$$

L'interprétation physique de ce résultat est la suivante : étant donnée une particule quantique de

2. L'opérateur de Laplace-Beltrami est une généralisation naturelle du laplacien usuel, pour les fonctions vivant sur des variétés riemanniennes.

3. On pourrait aussi considérer l'équation (6) avec en plus un terme $V\psi$ dans le membre de gauche. Bien que cela n'ajoute pas de difficulté majeure, nous ne le ferons pas ici, afin de mettre en évidence le lien entre les solutions de (6) et la géométrie de la variété M.

4. En mathématiques comme en physique, le terme « chaotique » ne correspond pas à une propriété précise d'un système dynamique, mais à un ensemble de propriétés plus ou moins fortes. Ce terme prendra donc des sens divers dans cet exposé.

haute énergie sur un segment, la probabilité de mesurer la particule dans une partie A du segment ne dépend que de la longueur de A.

Cette propriété d'équidistribution semi-classique des fonctions propres est-elle encore vraie pour des variétés plus compliquées qu'un segment ? Autrement dit, si Leb est la mesure de Lebesgue induite par la métrique riemannienne sur M, a-t-on pour tout $A \subset M$ ouvert

$$\int_A |\phi_n|^2(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \mathrm{Leb}(A)\ ?$$

La réponse générale est non. Sur la sphère $\mathbb{S}^2$, il existe des exemples simples de sous-suites de fonctions propres ϕ_{n_j} qui se concentrent sur l'équateur. Autrement dit, si $A \subset \mathbb{S}^2$ est un ouvert disjoint de l'équateur, on a

$$\lim_{j\to\infty}\int_A |\phi_{n_j}|^2(x)\mathrm{d}x = 0.$$

2.1 – Mesures de défaut et mesures semi-classiques

Une manière de reformuler la question de l'équidistribution semi-classique des fonctions propres est de considérer la suite de mesures de probabilité μ_n donnée par $\mathrm{d}\mu_n(x) = |\phi_n(x)|^2\mathrm{d}x$. On dit qu'une mesure de probabilité μ sur M est une *mesure de défaut*[5] s'il existe une sous-suite n_j telle que

$$\forall a \in C(M),\quad \int_M a(x)|\phi_{n_j}|^2(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \int_M a(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

Il est alors naturel de chercher à classifier les différentes mesures de défaut correspondant à la suite (μ_n).

En fait, il existe des outils plus précis pour décrire la distribution asymptotique des fonctions propres : les *mesures semi-classiques*, qui vivent sur l'espace co-tangent T^*M. On dit qu'une mesure μ sur T^*M est une mesure semi-classique pour (ϕ_n) s'il existe une sous-suite n_j telle que pour tout $a \in C_c^\infty(T^*M)$,

$$\langle \phi_{n_j}, Op_{\lambda_{n_j}^{-1/2}}(a)\phi_{n_j}\rangle \longrightarrow \int_{T^*M} a(x,\xi)\mathrm{d}\mu(x,\xi).$$

Ici, $Op_{\lambda_{n_j}^{-1/2}}(a)$ est défini en appliquant la règle de quantification (5) dans des cartes locales. Une telle construction n'est pas intrinsèque, mais la limite de $\langle \phi_{n_j}, Op_{\lambda_{n_j}^{-1/2}}(a)\phi_{n_j}\rangle$ quand j tend vers l'infini ne dépend pas des détails de la construction.

Un petit calcul montre que les mesures semi-classiques permettent de retrouver les mesures défaut, en intégrant sur les fibres de T^*X. Alors que les mesures de défaut permettent de décrire la façon dont une particule de haute énergie sera distribuée dans l'espace des positions, les mesures semi-classiques permettent de décrire la distribution d'une telle particule dans l'espace des positions et des vitesses.

On peut montrer qu'une suite de fonctions propres (ϕ_n) possède toujours au moins une mesure semi-classique, et que toutes les mesures semi-classiques sont en fait supportées dans l'espace co-tangent unitaire S^*M[6]. Quelles seront les propriétés des mesures semi-classiques de (ϕ_n) ? Quand y aura-t-il unicité de la mesure semi-classique ?

La réponse à ces questions dépend fortement de la dynamique classique sous-jacente, c'est-à-dire du flot géodésique.

2.2 – Flot géodésique et mesures semi-classiques

Notons S^*M le fibré co-tangent unitaire de M ; un point de S^*M s'interprète comme la donnée d'une position et d'une direction. La métrique riemannienne g induit un flot Φ^t sur S^*M, appelé flot géodésique. Si $(x,\xi) \in S^*M$, $\Phi^t(x,\xi)$ peut être vu comme la position et la direction atteintes au temps t en « marchant tout droit à vitesse 1 sur M » depuis la position x dans la direction ξ. Si la variété M possède un bord, les trajectoires pour le flot géodésique rebondissent sur les bords selon les lois de Descartes, comme des boules de billard.

De nombreux liens existent entre le flot géodésique et l'équation de Schrödinger. L'un des plus importants, en lien avec les mesures semi-classiques, est le *théorème d'Egorov*. Soit $\hbar$ un paramètre > 0. Notons $U_\hbar^t$ le propagateur de Schrödinger au temps t, c'est-à-dire l'opérateur qui associe à une fonction $u_0 \in L^2(M)$ la solution au temps t de l'équation (6) avec condition initiale u_0.

Le théorème d'Egorov affirme que l'on a, pour toute fonction $a \in C_c^\infty(T^*M)$:

$$U_\hbar^{-t} Op_\hbar(a) U_\hbar^t = Op_\hbar(a_t), \tag{7}$$

5. Une mesure de défaut est donc une valeur d'adhérence de (μ_n) pour la topologie faible-étoile.

6. Ceci traduit le fait que les fonctions propres ϕ_j oscillent typiquement à l'échelle $\lambda_j^{-1/2}$.

où $a_t(x,\xi) = a(\Phi^t(x,\xi)) + O_{\hbar\to 0}(\hbar)$. Ainsi les évolutions classiques et quantiques sont reliées dans la limite où $\hbar$ tend vers 0.

À partir de (7), et du fait que le propagateur de Schrödinger est périodique quand on l'applique à une fonction propre, on voit qu'une mesure semi-classique est toujours invariante par le flot géodésique, au sens où pour tout ouvert $A \subset T^*X$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, si μ est une mesure semi-classique, on a

$$\mu(A) = \mu(\Phi^t(A)).$$

Ce résultat restreint grandement l'ensemble des mesures pouvant être des mesures semi-classiques. En général, le flot géodésique possède de nombreuses mesures invariantes : par exemple, toute mesure uniforme sur une trajectoire périodique.

Une autre mesure de probabilité sur S^*X invariante par le flot géodésique est la *mesure de Liouville* $\mathscr{L}$, que l'on peut définir à partir de la métrique. La mesure de Liouville est d'une certaine manière la mesure uniforme sur S^*X, qui donne un poids équivalent à tous les points et toutes les directions.

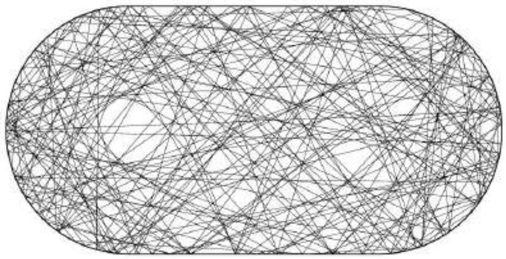
On peut avoir des informations plus précises sur les mesures semi-classiques et l'équidistribution des fonctions propres en faisant des hypothèses « chaotiques » sur le flot géodésique.

2.3 – Ergodicités classique et quantique

On dit que le flot géodésique est *ergodique* si, lorsqu' une partie mesurable $A \subset S^*X$ est invariante par Φ^t pour tout $t \geqslant 0$, on a $\mathscr{L}(A) = 0$ ou $\mathscr{L}(A) = 1$. Une manière informelle de reformuler cette hypothèse est de dire que « la trajectoire de presque tout point dans S^*X va presque partout dans S^*X ».

Des exemples de domaines de $\mathbb{R}^2$ ayant un flot géodésique ergodique sont le stade (un rectangle avec un demi-cercle de chaque côté) représenté dans la figure 1, les polygones d'angles irrationnels, ou encore la cardioïde. Un autre exemple standard de flot ergodique est le flot géodésique sur les variétés de courbure sectionnelle strictement négative, par le théorème de Hopf.

Figure 1 – Une trajectoire typique dans un billard ergodique



Le théorème suivant, appelé théorème d'ergodicité quantique, est dû à A. Shnirelman, S. Zelditch et Y. Colin de Verdière ([14], [15], [9]). Il affirme que, si le flot géodésique est ergodique, alors la mesure de Liouville est une mesure semi-classique qui permet de décrire presque toutes les fonctions propres.

Théorème 1 (Ergodicité quantique). *Supposons que le flot géodésique sur (M,g) est ergodique. Alors on a pour tout $a \in C_c^\infty(X)$*

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Big|\langle \phi_j, Op_{\lambda_j^{-1/2}}(a)\phi_j\rangle - \int_{T^*M} a(x,\xi)\mathrm{d}\mathscr{L}(x,\xi)\Big|^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (8)$$

De manière équivalente, il existe une suite (n_j) de densité 1 telle que[7] *pour tout $a \in C_c^\infty(T^*M)$, on a*

$$\langle \phi_{n_j}, Op_{\lambda_{n_j}^{-1/2}}(a)\phi_{n_j}\rangle \longrightarrow \int_{T^*M} a(x,\xi)\mathrm{d}\mathscr{L}(x,\xi). \quad (9)$$

En particulier, pour tout $b \in C^0(M)$, on a

$$\int_M b(x)|\phi_{n_j}(x)|^2\mathrm{d}x \longrightarrow \int_M b(x)\mathrm{d}x. \quad (10)$$

L'équation (9) se déduit de (8) par un procédé d'extraction diagonale, en utilisant le fait que l'espace $C_c^0(T^*X)$ est séparable. Quant à (10), elle s'obtient à partir de (9) en prenant une fonction $a(x,\xi) \in C_c^\infty(T^*X)$ égale à $b(x)$ sur S_x^*M, en intégrant le long de chaque fibre de T^*X, et en utilisant le fait que les mesures semi-classiques sont supportées sur S^*X.

Concluons ce paragraphe en donnant les grandes idées de la preuve du théorème 1.

7. Rappelons que, si $(n_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante, et si $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, on dit que n_j est une suite de densité δ si

$$\frac{\sharp\{j; n_j \leqslant N\}}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \delta.$$

Éléments de démonstration du théorème 1 Pour montrer (8), on commence par se ramener au cas où a est de moyenne nulle : $\int_{T^*M} a(x,\xi)\mathrm{d}\mathscr{L}(x,\xi) = 0$, de sorte qu'on veut estimer

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\langle\phi_j, Op_{\lambda_j^{-1/2}}(a)\phi_j\rangle\right|^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{1}{T}\int_0^T \langle U^t_{\lambda_j^{-1/2}}\phi_j, Op_{\lambda_j^{-1/2}}(a)U^t_{\lambda_j^{-1/2}}\phi_j\rangle \mathrm{d}t\right|^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\frac{1}{T}\int_0^T \langle \phi_j, U^{-t}_{\lambda_j^{-1/2}} Op_{\lambda_j^{-1/2}}(a)U^t_{\lambda_j^{-1/2}}\phi_j\rangle \mathrm{d}t\right|^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\langle\phi_j, \left(\frac{1}{T}\int_0^T Op_{\lambda_j^{-1/2}}(a_t)\mathrm{d}t\right)\phi_j\rangle + O(\lambda_j^{-1/2})\right|^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\langle\phi_j, Op_{\lambda_j^{-1/2}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T a_t\mathrm{d}t\right)\phi_j\rangle + O(\lambda_j^{-1/2})\right|^2.
\end{aligned}$$

Ici, on a utilisé successivement le fait que les fonctions propres sont invariantes par le propagateur de Schrödinger (à multiplication par une constante de module 1 près), le fait que le propagateur de Schrödinger est unitaire, le théorème d'Egorov, et la linéarité de la quantification $Op_{\lambda_j^{-1/2}}$.

Notons

$$\alpha_T := \frac{1}{T}\int_0^T a_t\mathrm{d}t.$$

Comme le flot géodésique est ergodique, le théorème de Birkhoff nous assure que, quand T tend vers l'infini, α_T converge vers la moyenne de a, qui est nulle. En combinant ce théorème avec des estimées sur les opérateurs pseudo-différentiels, on parvient à montrer que $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|\langle\phi_j, Op_{\lambda_j^{-1/2}}(a)\phi_j\rangle\right|^2$ tend vers zéro.

2.4 – La conjecture d'unique ergodicité quantique

Nous venons de voir que, lorsque le flot géodésique est ergodique, la mesure de Liouville est une mesure semi-classique. Une question naturelle est alors : est-ce la seule ? S'il existe d'autres mesures semi-classiques, d'après le théorème 1 elles correspondent à des sous-suites de fonctions propres de densité nulle.

Une réponse à cette question a été donnée par A. Hassell [11] dans le cas de domaines en forme de stade de la figure 1 : il existe des mesures semi-classiques différentes de la mesure de Liouville. L'existence de ces mesures semi-classiques est liée au fait que les géodésiques verticales, qui ne rebondissent que sur les bords plats du billard, restent toujours parallèles.

L'ergodicité n'est donc pas une condition suffisante pour avoir une unique mesure semi-classique : il faut sans doute faire une hypothèse chaotique plus forte. Sur les variétés de courbure sectionnelle strictement négative, il n'existe pas de familles de géodésiques restant parallèles comme dans le stade : en courbure négative, deux géodésiques ne peuvent pas être proches l'une de l'autre pour tout temps sans être identiques. Dans ce cadre, Z. Rudnick et P. Sarnak [13] ont fait la conjecture suivante, appelée conjecture d'unique ergodicité quantique :

Conjecture 1. *Soit (M,g) une variété de courbure sectionnelle strictement négative, et soit (ϕ_n) une base orthonormale de $L^2(M)$ formée de fonctions propres du laplacien. Alors la mesure de Liouville est l'unique mesure semi-classique associée à la suite (ϕ_n).*

Cette conjecture a été prouvée par E. Lindenstrauss dans [12], pour certaines surfaces de courbure négative constante (les surfaces dites arithmétiques), et pour des bases particulières de fonctions propres. Sur les variétés de dimension plus grande, ou de courbure variable, ou même sur les surfaces de courbure constante non-arithmétiques, la conjecture reste largement ouverte.

Nous présentons maintenant deux théorèmes remarquables allant dans le sens de la conjecture d'unique ergodicité quantique.

Entropie des mesures semi-classiques Étant donné un système dynamique préservant une mesure de probabilité μ (par exemple, le flot géodésique sur une variété riemannienne compacte, qui préserve les mesures semi-classiques), on peut construire une quantité appelée l'*entropie métrique*, ou *entropie de Kolmogorov-Sinai*, notée $h_{KS}(\mu)$ qui mesure la complexité de la mesure et du système dynamique. Lorsque cette entropie est positive, la dynamique est chaotique sur le support de la mesure, au sens où il faut beaucoup d'information pour suivre les différentes trajectoires des points du support de μ.

Par exemple, sur une variété riemannienne, si μ est une mesure sur S^*X supportée sur une orbite périodique pour le flot géodésique, alors $h_{KS}(\mu) = 0$: les points dans le support de μ ont tous la même trajectoire. Par contre, sur une variété de courbure constante -1 et de dimension d, la mesure de Liouville est la mesure invariante de plus grande entropie, et on a $h_{KS}(\mu) = d-1$.

Le théorème suivant donne des bornes inférieures sur l'entropie des mesures semi-classiques sur les variétés de courbure négative. La borne (11) a été prouvée par N. Anantharaman dans [1], et la borne (12) a été prouvée par N. Anantharaman et S. Nonnenmacher dans [4].

Théorème 2. *Soit (M,g) une variété de courbure négative, et soit (ϕ_n) une base orthonormale de $L^2(M)$ formée de fonctions propres de Δ_g. Soit μ une mesure semi-classique pour (ϕ_n). Alors*

$$h_{KS}(\mu) > 0. \tag{11}$$

De plus, si (M,g) est de courbure négative constante, on a

$$h_{KS}(\mu) \geqslant \frac{d-1}{2}. \tag{12}$$

Le théorème 2 implique en particulier que sur les variétés de courbure négative, les mesures semi-classiques ne peuvent pas être trop simples : par exemple elles ne peuvent pas être supportées sur une orbite périodique, ou sur un nombre fini d'orbites périodiques.

Support des mesures semi-classiques Récemment, S. Dyatlov et L. Jin [10] ont prouvé le théorème suivant concernant le support des mesures semi-classiques en courbure constante.

Théorème 3. *Soit M une surface de courbure négative constante, et soit (ϕ_n) une base orthonormale de $L^2(M)$ formée de fonctions propres. Soit μ une mesure semi-classique pour (ϕ_n). Alors* $\mathrm{support}(\mu) = S^*M$.

Ce théorème implique lui aussi que les mesures semi-classiques ne peuvent pas être supportées sur une union finie d'orbites périodiques. Cependant, les théorèmes 2 et 3 sont largement indépendants : il existe des mesures d'entropie positive et de support de mesure nulle, ainsi que des mesures de support plein et d'entropie nulle...

La démonstration du théorème 3 repose sur un *principe d'incertitude fractal* introduit par J. Bourgain et S. Dyatlov dans [8], qui affirme qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être localisées simultanément sur des ensembles fractals trop fins. Ce résultat a eu de nombreuses applications en chaos quantique, et mériterait un article à lui tout seul. Espérons qu'il permettra bientôt d'obtenir des résultats en courbure variable aussi bien que constante !

3. Délocalisation sur les grands graphes

Le laplacien, s'il joue un rôle central en mécanique quantique, apparaît sous une forme ou une autre dans de nombreux autres contextes mathématiques. Nous nous intéresserons maintenant au laplacien combinatoire sur les graphes.

Soit $G = (V,E)$ un graphe fini dont les sommets sont les éléments de V, et les arêtes sont les éléments de E. Si $v,w \in V$, on notera $v \sim w$ si v et w sont reliés par une arête. On supposera que G est d-régulier, c'est-à-dire que chaque sommet possède d voisins.

La matrice d'adjacence $\mathcal{A} : \mathbb{C}^V \to \mathbb{C}^V$ est définie de la manière suivante : si $f : V \to \mathbb{C}$ est une fonction définie sur les sommets, on pose

$$(\mathcal{A}f)(v) := \sum_{w\sim v} f(w).$$

Le laplacien est alors simplement donné par

$$\Delta = d\mathrm{Id} - \mathcal{A},$$

et a donc les mêmes vecteurs propres que $\mathcal{A}$.

La matrice d'adjacence est symétrique, et on peut la diagonaliser. Cependant, étudier le comportement semi-classique des fonctions propres n'a ici aucun sens : le graphe étant fini, cette matrice agit sur un espace de dimension finie. Les questions intéressantes sur le comportement asymptotique des fonctions propres apparaissent lorsqu'on considère une *suite* de graphes G_N, et que l'on étudie la distribution des fonctions propres quand N tend vers l'infini.

Nous présentons maintenant quelques résultats récents d'ergodicité quantique sur les grands graphes.

Soit $G_N = (V_N, E_N)$ une suite de graphes réguliers, satisfaisant aux hypothèses suivantes :

- (EXP) G_N est une suite de graphes *expanseurs*, au sens où il existe $\beta > 0$ indépendant de N tel que le spectre de $\mathcal{A}_N$ sur $\ell^2(V_N)$ est contenu dans $\{1\} \cup [-1+\beta; 1-\beta]$ pour tout N ;
- (BST) G_N possède peu de cycles courts : pour tout $R > 0$, on a

$$\frac{|\{x \in V_N ; \rho(x) < R\}|}{|V_N|} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\rho(x)$ est le rayon d'injectivité de x, c'est-à-dire le plus grand $r \geqslant 0$ tel que la boule de centre x et de rayon r ne contienne pas de cycle.

L'hypothèse **(EXP)** peut être considérée comme une hypothèse de chaos sur la dynamique classique sur le graphe. En effet, elle implique qu'une marche aléatoire sur le graphe va rapidement s'équidistribuer.

L'hypothèse **(BST)** signifie que les graphes G_N « ressemblent » à des arbres (une manière rigoureuse de définir cette « ressemblance » est à l'aide de la topologie de Benjamini-Schram). Cette condition est en particulier vérifiée quand la maille des graphes G_N, c'est-à-dire la longueur du plus petit cycle, tend vers l'infini avec N.

Ces hypothèses ne sont pas complètement artificielles : elles sont vérifiées avec grande probabilité si les G_N sont des graphes réguliers choisis au hasard. Sous ces hypothèses, le théorème d'ergodicité quantique sur les grands graphes est le suivant :

Théorème 4. *Soit (G_N) une suite de graphes d-réguliers, vérifiant les hypothèses **(EXP)** et **(BST)**. Soient $(\psi_1^N, \ldots, \psi_{|V_N|}^N)$ une base orthonormée de $\ell^2(V_N)$ formée de vecteurs propres de $\mathscr{A}$.*

Soit $a_N : V_N \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions telle que $\sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{x\in V_N} |a_N(x)| \leqslant C$.

On pose $\langle a_N \rangle = \frac{1}{|V_N|} \sum_{x\in V_N} a_N(x)$. On a alors

$$\frac{1}{|V_N|} \sum_{j=1}^{|V_N|} \left| \langle \psi_j^N, a_N \psi_j^N \rangle_{\ell^2(V_N)} - \langle a_N \rangle \right|^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (13)$$

L'équation (13) est très analogue à (8). Cependant, on ne peut pas en déduire simplement un analogue de (9) ou (10), car l'espace des suites de fonctions $(a_N)_{N\in\mathbb{N}}$ n'est pas séparable.

Le théorème 4 a été prouvé pour la première fois par N. Anantharaman et E. Le Masson dans [3], en adaptant la preuve classique de la section 2.3. Pour cela, les auteurs définissent une méthode de quantification, analogue à (5), introduisent une dynamique classique sur le graphe, et prouvent un analogue du théorème d'Egorov. Depuis, plusieurs autres preuves de ce résultat ont été données dans [2]. La preuve la plus astucieuse consiste à transformer les vecteurs propres de la matrice d'adjacence en fonctions sur les arêtes orientées du graphe, fonctions propres d'un *opérateur de transfert sans retour en arrière* (non-backtracking pour les anglophones). Ce nouvel opérateur n'est pas auto-adjoint, mais il est très facile d'avoir des informations sur les puissances de cet opérateur, en utilisant le fait que le graphe possède peu de cycle courts.

Cette méthode de preuve, consistant à troquer le caractère auto-adjoint du problème contre des simplifications combinatoires, a ensuite été utilisée par N. Anantharaman et M. Sabri pour généraliser le théorème 4 à certains graphes non réguliers [6], ou en ajoutant un potentiel aléatoire à la matrice d'adjacence [5]. Nous renvoyons le lecteur à l'article de synthèse [7] pour un panorama de ces progrès récents.

4. En guise de conclusion

Dans cet article, nous avons décrit des propriétés d'équidistribution asymptotique des fonctions propres du laplacien. Il existe bien d'autres questions intéressantes sur les propriétés spectrales dans la limite semi-classique, concernant les lignes de niveaux des fonctions propres, leurs normes L^p, ou encore la répartition des valeurs propres. Pour toutes ces questions, les systèmes dont la dynamique classique sous-jacente est chaotique semblent avoir des propriétés remarquables... Le chaos quantique a encore de beaux jours devant lui !

Références

[1] N. Anantharaman. « Entropy and the localization of eigenfunctions ». *Annals of Mathematics* **168** (2008), p. 435–475.

[2] N. Anantharaman. « Quantum ergodicity on regular graphs ». *Communications in Mathematical Physics* **353** (2017), p. 633–690.

[3] N. Anantharaman et E. Le Masson. « Quantum ergodicity on large regular graphs ». *Duke Mathematical Journal*, nº 164 (2015), p. 723–765.

[4] N. Anantharaman et S. Nonnenmacher. « Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold ». *Annales de l'Institut Fourier* **57** (7 2007), p. 2465–2523.

[5] N. Anantharaman et M. Sabri. « Quantum ergodicity for the Anderson model on regular graphs ». *arXiv:1704.02765* (2017).

[6] N. Anantharaman et M. Sabri. « Quantum ergodicity on graphs: from spectral to spatial delocalization ». *arXiv:1704.02766* (2017).

[7] N. Anantharaman et M. Sabri. « Recent results of quantum ergodicity on graphs and further investigation ». *preprint arXiv:1711.07666.* (2017).

[8] J. Bourgain et S. Dyatlov. « Spectral gaps without the pressure condition ». *Annals of Mathematics* **187** (2018), p. 825–867.

[9] Y. Colin de Verdière. « Ergodicité et fonctions propres du laplacien ». *Communications in Mathematical Physics* **1985** (1985), p. 497–502.

[10] S. Dyatlov et L. Jin. « Semiclassical measures on hyperbolic surfaces have full support ». *arXiv preprint arXiv:1705.05019* (2017).

[11] A. Hassell. « Ergodic billiards that are not quantum unique ergodic ». *Annals of Mathematics* **171** (2010). Avec un appendice de L. Hillairet, p. 605–618.

[12] E. Lindenstrauss. « Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity ». *Annals of Mathematics* **163** (2006), p. 165–219.

[13] Z. Rudnick et P. Sarnak. « The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds ». *Communications in Mathematical Physics* **161** (1994), p. 195–213.

[14] A. I. Snirel'man. « Ergodic properties of eigenfunctions ». *Uspehi Mathematical Nauk* **29** (1974), p. 181–182.

[15] S. Zelditch. « Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces ». *Duke Mathematical Journal* **55** (1987), p. 919–941.

Maxime Ingremeau

ingremeau@math.unistra.fr

Maxime Ingremeau est maître de conférences à l'université de Nice-Sofia-Antipolis. Ses recherches concernent divers aspects du chaos quantique et de la théorie de la diffusion.

L'auteur remercie Nalini Anantharaman pour ses conseils pendant la rédaction de cet article, ainsi que Thomas Dedieu et Yohann Le Floch pour leur relecture attentive et leurs nombreux commentaires.

Mouvements locaux et algorithmique des nœuds, d'après Lackenby

• A. de Mesmay

Comment détecter rapidement si un nœud donné est dénouable ? Comment séparer efficacement deux nœuds qui se seraient emmêlés ? Ces questions d'apparence élémentaire constituent des problèmes notoirement épineux. Récemment, Lackenby a prouvé des bornes polynomiales sur le nombre de mouvements élémentaires (de Reidemeister) à effectuer pour simplifier ou séparer des nœuds, et cet article a pour but de mettre en contexte et de présenter ces résultats ainsi que certaines des idées qui sont derrière. Il s'agit d'une version remaniée, simplifiée, d'un exposé écrit pour le séminaire Bourbaki [19].

1. Introduction

1.1 – Nœuds et invariants de nœuds

Un nœud au sens traditionnel du mot (par exemple un nœud de lacets, de marin ou d'escalade) peut être modélisé, en négligeant l'épaisseur de la corde, comme un plongement régulier, par exemple lisse ou polygonal, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^3$. Manipuler un nœud, c'est déformer continûment celui-ci dans $\mathbb{R}^3$, et donc lui appliquer une isotopie ambiante. Cela mène à considérer les classes d'équivalence de nœuds modulo isotopie ambiante, mais cette notion s'avère avoir peu d'intérêt puisque tout nœud peut être complètement dénoué en tirant sur une de ses extrémités, et il n'y a donc qu'une classe d'équivalence. En revanche, si l'on « ferme » un nœud en attachant ses deux extrémités, ce qui revient donc à considérer les plongements réguliers du cercle $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^3$ (ou de façon équivalente dans $\mathbb{S}^3$, qui a l'avantage d'être compact), cette déformation triviale disparaît et une infinité de classes d'isotopie apparaissent : c'est l'objet d'étude de la théorie des nœuds.

Figure 1 – Trois nœuds triviaux. Le deuxième est dû à Thistlethwaiste et le troisième à Haken

Un nœud est dit trivial s'il est isotope au plongement standard de $\mathbb{S}^1$. Comme l'illustre la figure 1, déterminer si un nœud donné est trivial est loin d'être trivial. Similairement, un *entrelacs* est un plongement polygonal de deux[1] copies disjointes de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^3$, et un problème connexe est de déterminer si un entrelacs donné est *séparé*, c'est-à-dire s'il existe une sphère topologique séparant les deux nœuds. Nous nous intéressons dans cet article aux problèmes suivants :

Trois problèmes d'algorithmique des nœuds

1. Étant donné un nœud, comment déterminer efficacement si celui-ci est trivial ?
2. Étant donné un entrelacs, comment déterminer efficacement si celui-ci est séparé ?
3. Étant donnés deux nœuds, comment déterminer efficacement si ceux-ci sont équivalents ?

1. La définition habituelle d'un entrelacs autorise un nombre arbitraire de composantes connexes, mais dans cet exposé il n'y en aura toujours que deux.

Pour avoir des problèmes algorithmiques bien posés, il convient de décrire les nœuds ou entrelacs de façon discrète, par exemple comme une suite de segments dans $\mathbb{R}^3$. Un algorithme sera considéré efficace si sa complexité par rapport à l'entrée est polynomiale [2]. Pour ce critère, les trois problèmes sont ouverts : non seulement on ne dispose pas d'algorithmes polynomiaux pour les résoudre, mais on ne sait pas non plus montrer qu'ils sont NP-difficiles, ce qui impliquerait qu'il n'en existe pas (modulo l'hypothèse classique $P \neq NP$).

La théorie des nœuds étudie traditionnellement ceux-ci via l'introduction et l'analyse d'invariants de nœuds, c'est-à-dire d'objets définis pour chaque nœud et qui sont les mêmes pour deux nœuds équivalents. Ces objets peuvent être des entiers, des groupes, des polynômes (Alexander, Jones), des espaces topologiques, des structures géométriques (notamment hyperboliques), des théories homologiques (Floer, Khovanov) ou peuvent revêtir bien d'autres formes, et fournissent quantité d'informations sur les nœuds, souvent via des interactions extrêmement fortes avec d'autres domaines des mathématiques. Pour répondre aux problèmes algorithmiques mentionnés plus haut, idéalement on chercherait un invariant ayant les propriétés suivantes.

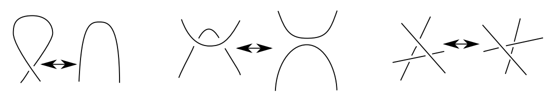
1. Il devrait être complet, c'est-à-dire différent pour chaque paire de nœuds non équivalents, ou au moins distinguer le nœud trivial de tous les autres.
2. Il devrait être calculable efficacement, c'est-à-dire qu'il devrait exister un algorithme efficace pour calculer celui-ci à partir d'un nœud.
3. Il devrait être distinguable efficacement, c'est-à-dire qu'il devrait exister un algorithme efficace pour décider si deux valeurs de cet invariant sont les mêmes.

Aucun invariant satisfaisant aux trois conditions n'est connu à ce jour (même si l'on souhaite « juste » reconnaître un nœud trivial). Un invariant complet est par exemple le complémentaire d'un nœud K : l'espace topologique $\mathbb{S}^3 \setminus K$, considéré à homéomorphisme préservant l'orientation près. Un théorème célèbre de Gordon et Luecke [8] prouve que c'est un invariant complet. De plus, calculer une description combinatoire de ce complémentaire, par exemple une triangulation, est assez simple. En revanche, déterminer si deux espaces tridimensionnels décrits par des triangulations sont homéomorphes est bien plus ardu, et si un algorithme général est connu pour résoudre ce problème, il est d'une complexité gigantesque.

Une approche plus algébrique consiste à étudier le groupe fondamental de ce complémentaire. Lui aussi est un invariant très fort [3] et l'on peut le calculer efficacement à partir du nœud. Mais là encore, la dernière étape est délicate car tester si deux groupes décrits par une présentation sont isomorphes est indécidable en général. De l'autre côté du spectre, le polynôme d'Alexander par exemple se calcule en temps polynomial, mais n'est pas complet.

1.2 – Mouvements de Reidemeister

Figure 2 – Les trois mouvements de Reidemeister



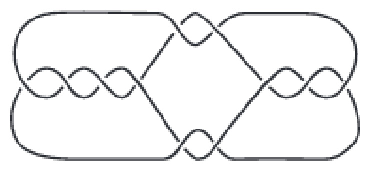
Une approche plus ad hoc est de chercher à résoudre plus directement nos problèmes algorithmiques par l'étude de mouvements locaux, imitant la démarche intuitive d'un individu patient face à un nœud ardu. Nous formalisons cela de la façon suivante : une représentation courante d'un nœud est de projeter ce plongement sur un plan – de façon générique les points d'intersection ne seront pas plus que doubles. En précisant à chaque croisement quel brin passe au-dessus de l'autre, on obtient un *diagramme de nœud* (les exemples de la figure 1 sont en fait de tels diagrammes).

Génériquement, la projection d'une isotopie induit une isotopie, avec possiblement trois changements locaux autour des points doubles d'un diagramme de nœud, appelés *mouvements de Reidemeister*, voir la figure 2. On obtient ainsi le théorème de Reidemeister, stipulant que partant de deux diagrammes d'un même nœud ou entrelacs, il existe une suite de mouvements de Reidemeister et d'isotopies planaires transformant l'un en l'autre.

2. Nous nous concentrons sur l'aspect *théorique* de ces problèmes, qui est encore grand ouvert – même si en pratique des algorithmes étonnamment efficaces existent pour reconnaître et classifier les nœuds, notamment ceux reposant sur la géométrie hyperbolique (SnapPea, SnapPy, voir [6]).

3. Il est complet lorsqu'on précise également un système périphérique, cela découle d'un théorème de Waldhausen [20] et du théorème de Gordon-Luecke sus-cité.

Figure 3 – Un nœud trivial impossible à simplifier monotonement



Une approche naturelle pour s'attaquer aux problèmes est donc de trouver une telle suite de mouvements de Reidemeister, ou de prouver qu'il n'y en a pas. Mais même dans le cas de base que constitue le nœud trivial que l'on essayerait de simplifier en un *diagramme trivial*, c'est-à-dire un cercle plongé dans $\mathbb{R}^2$, la question du nombre de mouvements suffisants pour simplifier le diagramme d'un nœud trivial est notoirement épineuse, comme le montre par exemple la discussion initiée par Gowers sur le forum MathOverflow [18]. Une des raisons est que la suite de mouvements de Reidemeister n'est pas nécessairement *monotone* : pour certains nœuds triviaux, il est nécessaire d'augmenter le nombre de croisements d'un diagramme avant de pouvoir le simplifier. Un exemple d'un tel nœud, dû à Goeritz, est illustré en figure 3, et des familles infinies de tels nœuds triviaux « difficiles » ont été construites par Kauffman et Lambropoulou [14].

Le théorème suivant, dû à Lackenby, montre que malgré cette difficulté, on peut toujours dénouer un nœud trivial en utilisant un nombre de mouvements qui est polynomial en la complexité du diagramme initial. La meilleure borne connue précédemment, due à Hass et Lagarias, était exponentielle [10]. Du côté des bornes inférieures, Hass et Nowik [12] ont montré que certains nœuds nécessitent $c^2/25$ mouvements de Reidemeister pour être simplifiés.

Théorème 1 (Lackenby [16]). *Soit D le diagramme d'un nœud trivial avec c croisements. Il existe une suite d'au plus $(236c)^{11}$ mouvements de Reidemeister qui transforment D en le diagramme trivial.*

Un résultat similaire est également obtenu pour séparer les entrelacs.

Théorème 2 (Lackenby [16]). *Soit D le diagramme d'un entrelacs séparé avec c croisements. Alors il existe une suite d'au plus $(49c)^{11}$ mouvements de Reidemeister qui le transforment en un diagramme déconnecté.*

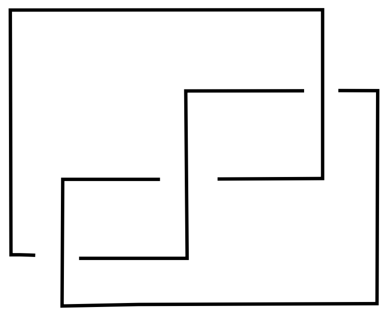
L'objectif de cet article est de présenter les idées et techniques derrière les preuves de ces deux théorèmes. Observons d'abord qu'ils fournissent des algorithmes exponentiels conceptuellement très simples pour répondre aux Problèmes 1 et 2 : on peut juste essayer exhaustivement toutes les suites de $(236c)^{11}$ (resp. $(49c)^{11}$) mouvements de Reidemeister et voir si l'on obtient ainsi un nœud trivial (resp. un entrelacs séparé). D'autres algorithmes plus rapides existent pour ces deux problèmes (voir notamment [11]), mais leur complexité est également exponentielle et ils sont sensiblement plus compliqués à décrire et à implémenter (mais néanmoins rapides en pratique, voir le programme Regina [4] et l'article [3]). L'état de l'art sur le troisième problème est sensiblement moins avancé, et aucun algorithme simplement exponentiel n'est connu pour le résoudre. Notons juste qu'à notre connaissance, rien n'exclut la possibilité d'une borne polynomiale universelle similaire à celle du Théorème 1 qui serait valide pour toute paire de diagrammes d'un même nœud à $O(c)$ croisements. Nous renvoyons à l'article de revue de Lackenby [17] pour des résultats partiels dans cette direction et un survol de différentes approches pour s'attaquer à ce problème (et à de nombreux autres).

2. Présentation par arcs et diagrammes en grille

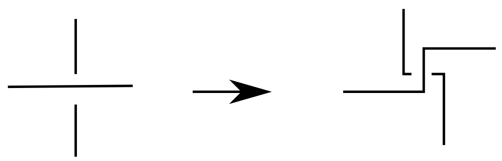
2.1 – Présentation par arcs et diagrammes en grille

Introduites initialement par Birman et Menasco [1] pour étudier des tresses, puis étudiées par Cromwell [5], les présentations par arcs sont un outil essentiel utilisé par Dynnikov [7] puis par Lackenby dans l'étude des mouvements de Reidemeister.

Figure 4 – Un diagramme en grille du nœud de trèfle



Nous allons voir deux façons équivalentes de décrire une présentation par arcs. Commençons par la plus combinatoire, en lien direct avec notre problématique. Un *diagramme en grille* d'un nœud ou d'un entrelacs est un diagramme (au sens défini dans l'introduction) où tous les arcs sont soit horizontaux, soit verticaux, les arcs verticaux passent toujours au-dessus des horizontaux, et aucune paire d'arcs n'est colinéaire. La figure 4 montre un diagramme en grille du nœud non trivial le plus simple, le nœud de trèfle. Dans un diagramme en grille, il y a autant d'arcs horizontaux que verticaux, et leur nombre est l'*indice d'arcs* du diagramme.



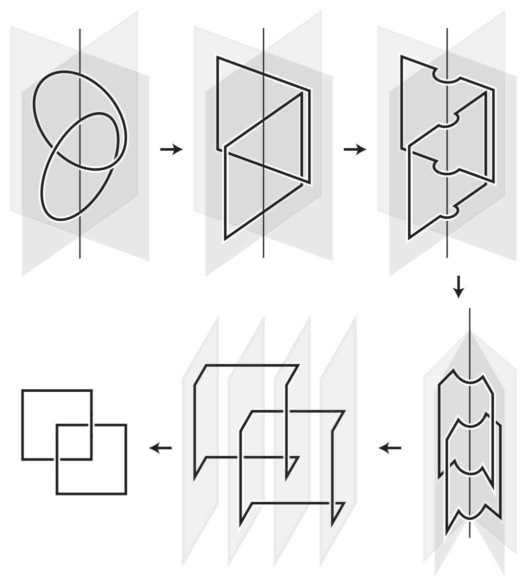
On peut facilement transformer tout diagramme de nœud en un diagramme en grille : en considérant les croisements comme des sommets, un diagramme est un graphe planaire où tous les sommets ont degré 4. Il s'agit d'abord de trouver un nouveau plongement de ce graphe (homéomorphe au premier) où toutes les arêtes sont des concaténations d'un nombre contrôlé d'arcs horizontaux ou verticaux. En perturbant un peu pour éviter les arêtes colinéaires, et en utilisant le gadget ci-dessus lorsque les arêtes horizontales passent au-dessus des verticales, on obtient un diagramme en grille.

Pour introduire une autre façon d'appréhender ces diagrammes en grille, commençons par paramétrer [4] $\mathbb{R}^3$ comme un livre ouvert. Pour cela, fixons une droite verticale, par exemple celle de coordonnées $\{x = y = 0\}$ et appelons celle-ci la *reliure*. Les *pages* sont l'ensemble des demi-plans ayant pour bord cette reliure : celles-ci sont naturellement paramétrées par un angle $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Lorsque l'on compactifie $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{S}^3$, la reliure se compactifie en un cercle dénoté $\mathbb{S}^1_\phi$ et chacune des pages devient un disque 2-dimensionnel, dénoté D_θ.

Un entrelacs L est *présenté par arcs* si $L \cap \mathbb{S}^1_\phi$ est un ensemble fini de points (les *sommets* de L), et pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'intersection $D_\theta \cap L$ est soit vide, soit un unique arc reliant deux sommets distincts, comme sur la première image de la figure 5. L'*indice d'arcs* d'une telle présentation est le nombre de pages utilisées.

Il se trouve que les présentations par arcs et les diagrammes en grille sont rigoureusement le même objet. En effet, remarquons d'abord qu'à isotopie près, pour décrire une présentation par arcs il suffit de préciser les coordonnées $\phi_1, \ldots, \phi_n$ des sommets sur $\mathbb{S}^1_\phi$, les pages $\theta_1, \ldots, \theta_n$ des arcs et sur quels sommets sont attachés les arcs. Pour en déduire un diagramme en grille, il suffit d'utiliser les θ_i, respectivement les ϕ_i, comme les abscisses $x_1, \ldots x_n$ des arcs verticaux, respectivement comme les ordonnées $y_1, \ldots y_n$ des arcs horizontaux, et en attachant ceux-ci de la même façon que les arcs étaient attachés aux sommets.

Figure 5 – D'une présentation par arcs de l'entrelacs de Hopf à un diagramme en grille



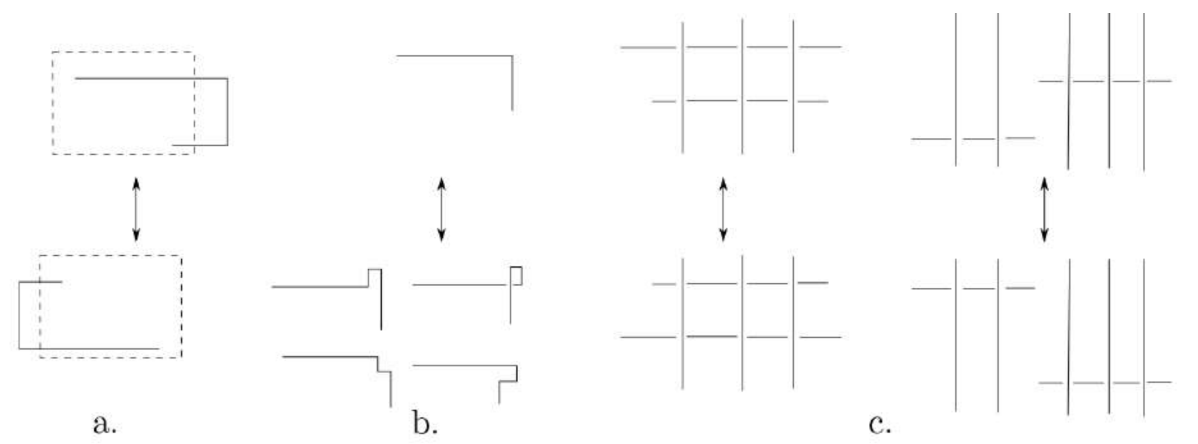
Cette bijection peut se visualiser de la façon suivante, voir la figure 5 :

- dans chaque page, tracer les arcs avec des demi-rectangles ;
- éloigner les sommets de la reliure par des arcs de cercle d'un petit rayon ε ;
- « refermer » presque entièrement le livre.
- Regarder par la tranche.

Par construction, les arcs verticaux se retrouvent toujours devant les arcs horizontaux, conformément à la définition d'un diagramme en grille.

4. En termes techniques, cela consiste juste à observer que $\mathbb{S}^3$ est le joint topologique de $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^1$ et à utiliser le système de coordonnées correspondant.

Figure 6 – a. Permutation cyclique des arêtes verticales. b. Stabilisation (haut vers bas) et déstabilisation (bas vers haut). c. Mouvement d'échange horizontal



2.2 – Mouvements sur les diagrammes en grille

La construction précédente n'est pas tout à fait bien définie puisque les angles sont définis modulo 2π alors que les abscisses et ordonnées des segments sont des réels. Pour pallier ce problème, il est naturel de considérer les diagrammes en grille modulo une permutation cyclique des arêtes verticales ou horizontales, voir la figure 6a. Deux autres types de *mouvements de grille* vont également nous intéresser : les stabilisations/déstabilisations (figure 6b) et les échanges horizontaux ou verticaux (figure 6c) – ces derniers ne sont autorisés que lorsqu'il n'y a pas de segments entre les segments échangés et que les extrémités ne sont pas intercalées. Notons que ces mouvements préservent la classe d'isotopie de l'entrelacs. En conséquence, ces mouvements peuvent être réalisés par des mouvements de Reidemeister, et le lemme suivant montre qu'il en suffit d'assez peu.

Lemme 1. *Soit D un diagramme en grille d'indice d'arcs n. Une permutation cyclique, un mouvement d'échange ou une déstabilisation peuvent être réalisés par $poly(n)$ mouvements de Reidemeister.*

Parmi les mouvements de grille, seule la stabilisation augmente l'indice d'arcs du diagramme. Toute la force des diagrammes en grille est alors illustrée dans le théorème de Dynnikov suivant.

Théorème 3 (Dynnikov [7]). *Soit D le diagramme en grille d'un nœud trivial (respectivement d'un entrelacs séparé), alors il existe une suite de mouvements de grille, ne contenant pas de stabilisation, qui transforme D en un diagramme trivial (respectivement en un diagramme déconnecté).*

C'est un résultat de simplification *monotone* : la complexité du diagramme n'augmente jamais au cours de la simplification. Comme nous l'avons vu dans l'introduction, un tel résultat serait impossible avec des mouvements de Reidemeister. La complexité n'est pas strictement décroissante pour autant, puisque les permutations et les échanges ne la changent pas. Mais comme le nombre de graphes plans de degré 4 est simplement exponentiel (voir par exemple Bousquet-Mélou [2]), le nombre de diagrammes en grille d'indice d'arcs n est exponentiel en n^2, et cela fournit donc une borne exponentielle sur le nombre de mouvements nécessaire pour trivialiser un diagramme (ou séparer un diagramme d'entrelacs), et donc également une borne exponentielle sur le nombre de mouvements de Reidemeister.

Pour améliorer cette borne en un polynôme, pénétrons maintenant les arcanes du Théorème 3.

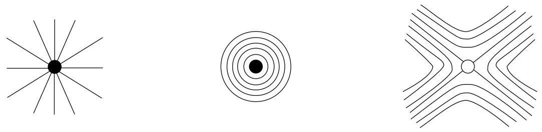
3. De la simplification monotone à une borne polynomiale

3.1 – Simplification monotone

Par définition, un entrelacs est séparé si et seulement s'il existe une sphère disjointe de l'entrelacs séparant ses composantes connexes. Similairement, on peut montrer facilement qu'un nœud est trivial si et seulement si il borde un disque plongé (ne croisant pas le nœud en son intérieur). Appelons ces deux surfaces les *surfaces caractéristiques* du problème correspondant, et dénotons une telle surface caractéristique par S. L'approche pour prouver le théorème 3 commence, partant d'une présentation par arcs d'un nœud ou d'un entrelacs, par placer la surface caractéristique S dans une certaine position générale vis-à-vis de la reliure $\mathbb{S}^1_\phi$ et des pages D_θ.

Cela permet d'étudier S d'un point de vue similaire à celui de la théorie de Morse : l'intersection de S avec chacune des pages peut être vue comme des lignes de niveau, et les singularités de ces lignes de niveau sont en nombre fini et forment soit des *sommets* sur la reliure, soit sont de type Morse et ressemblent localement à des pôles et des points selles, illustrés en figure 7.

Figure 7 – Les singularités sont des sommets, des pôles ou des selles



Et comme en théorie de Morse, le nombre et le type de ces singularités est relié à la topologie globale de la surface (qui est, rappelons-le, toujours une sphère ou un disque) par une caractéristique d'Euler. On peut exploiter cette relation pour montrer que si le nœud n'est pas déjà trivial ou l'entrelacs n'est pas séparé, la surface caractéristique S a nécessairement certaines sous-structures locales. Celles-ci sont ensuite utilisées pour identifier certains mouvements sur la présentation par arcs du nœud ou de l'entrelacs qui permettent de simplifier la surface S. Une fois que celle-ci est aussi simple que possible, le diagramme en grille que l'on obtient est trivial ou déconnecté.

Sans rentrer dans les détails, assez techniques, de la preuve, montrons sur un exemple l'articulation entre les singularités de la surface S et les mouvements sur les diagrammes en grille. Une des sous-structures locales qui apparaît est celle illustrée en haut à gauche sur la figure 8, avec deux points selles s_1 et s_2 adjacents via leurs lignes de niveaux à trois sommets v, v_1 et v_2, dont l'un, v, n'est adjacent à aucune autre selle. Dans ce cas de figure, l'objectif est de simplifier S en réduisant son nombre d'intersections avec la reliure $\mathbb{S}^1_\phi$. Mais si l'entrelacs ou le nœud L est sur le chemin de ce mouvement, il faut d'abord déplacer celui-ci. La figure 8 montre une série de mouvements à réaliser sur l'entrelacs pour réaliser cette simplification. L'observation-clé est que ces mouvements ne sont que des rotations autour de la reliure et des translations le long de celles-ci, ce qui se traduit dans le monde des diagrammes en grille par des mouvements d'échange et, si besoin est, de permutation. Notamment, aucune stabilisation n'est nécessaire, et c'est le cas pour toutes les sous-structures locales qui peuvent apparaître. Cette absence de stabilisation permet d'obtenir le théorème de simplification monotone.

3.2 – Surfaces normales

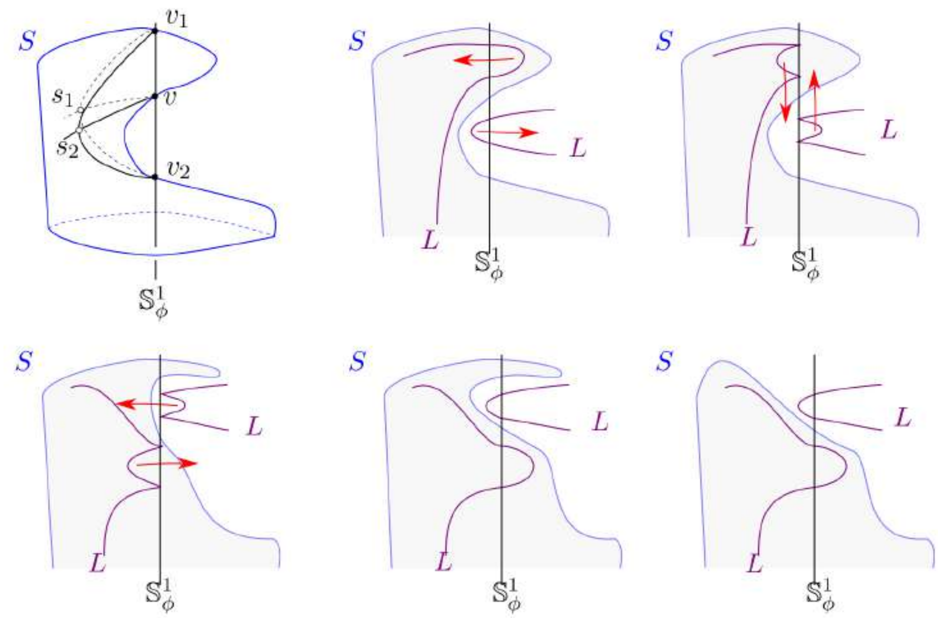
L'argument précédent est de nature essentiellement qualitative, puisqu'il ne permet que de contrôler la nature des mouvements à effectuer, et non leur nombre. Mais si l'on disposait d'une borne sur la complexité de la surface caractéristique (par exemple son nombre d'intersections avec la reliure), le même argument donnerait directement une borne similaire sur le nombre de mouvements de Reidemeister à effectuer. Il s'agit donc de contrôler quantitativement la position d'une surface caractéristique d'un nœud ou d'un entrelacs donné. C'est là qu'intervient la théorie des *surfaces normales*.

Un très grand nombre de problèmes en topologie de basse dimension reviennent à trouver une certaine surface dans une 3-variété, et une observation fondamentale dont l'idée remonte à Kneser [15] et qui a été fortement développée par Haken [9] est que dans de nombreux cas, l'on peut supposer que cette surface n'est pas trop compliquée, c'est-à-dire qu'elle n'intersecte une triangulation donnée qu'en des morceaux élémentaires assez simples. Dans le cas de l'entrelacs séparé, nous travaillons avec une triangulation T de $\mathbb{S}^3$ qui contient l'entrelacs L que l'on étudie dans son 1-squelette, et qui est compatible, en un certain sens technique, avec la paramétrisation en livre ouvert de $\mathbb{S}^3$. Pour le problème de la détection d'un nœud trivial L, c'est un peu plus technique et l'on considère en fait une triangulation de $\mathbb{S}^3 \setminus N(L)$, c'est-à-dire que l'on tronque également un voisinage du nœud dans la triangulation considérée [5]. La surface caractéristique du problème est alors un disque ayant pour bord une *longitude*, c'est-à-dire est une courbe sur $\partial N(L)$ parallèle [6] à L dans $N(L)$. En partant d'un diagramme en grille d'indice

5. Pour des raisons techniques, Lackenby considère des triangulations généralisées autorisant des formes plus générales que les simplexes. Nous négligeons ce point dans ce qui suit, la théorie des surfaces normales correspondante étant similaire.

6. Précisément, une longitude est une courbe simple fermée de $\partial N(L)$ qui est homologue à L dans $N(L)$ et a un enlacement avec L nul.

Figure 8 – Une sous-structure de la surface caractéristique S à éliminer. L'élimination réduit le nombre d'intersections de S avec la reliure $\mathbb{S}^1_\phi$, et, pour ce faire, commence par écarter l'entrelacs L du chemin, mais sans utiliser de stabilisation !



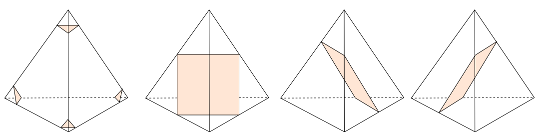
d'arcs n, il est possible de construire de telles triangulations avec un nombre de tétraèdres polynomial en n.

Une *surface normale* dans T est une surface proprement plongée qui intersecte chaque tétraèdre en une collection disjointe de *disques normaux*, qui sont soit :

- un *triangle*, qui sépare un sommet du tétraèdre des autres,
- ou un *quadrilatère*, qui sépare une paire de sommets des deux autres.

À isotopie normale près, il y a exactement 4 types de triangles et 3 types de quadrilatères dans un tétraèdre, représentés sur la figure 9.

Figure 9 – Les sept disques normaux dans un tétraèdre



Si toute surface dans une 3-variété ne peut en général pas être isotopée en une surface normale, celles qui sont dans une certaine position minimale (la bonne notion est celle d'*incompressibilité*, que nous ne définirons pas ici) peuvent l'être. C'est en particulier le cas des surfaces caractéristiques, disques ou sphères, de nos problèmes. Mieux encore, les surfaces normales sont naturellement dotées d'une structure additive : on peut additionner deux surfaces normales en sommant les disques normaux de chaque type apparaissant dans chaque tétraèdre. En considérant des surfaces minimales pour cette structure additive, on peut borner le nombre de disques normaux de chaque type dans une surface normale par une fonction exponentielle. Nous résumons tout ceci dans le théorème suivant :

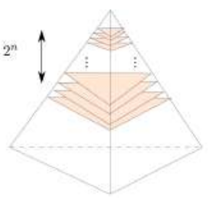
Théorème 4 (Haken [9], Hass-Lagarias-Pippenger [11], Lackenby [16]). *Si L est un nœud trivial, décrit par un diagramme en grille d'indice d'arcs n, il existe une surface normale qui est un disque ayant pour bord une longitude, et qui est constitué d'au plus $2^{poly(n)}$ disques normaux. En particulier, il intersecte la reliure au plus $2^{poly(n)}$ fois.*

Si L est un entrelacs séparé, décrit par un diagramme en grille d'indice d'arcs n, il existe une surface normale qui est une sphère séparant les deux composantes de L, et qui est constitué d'au plus $2^{poly(n)}$ disques normaux. En particulier, il intersecte la reliure au plus $2^{poly(n)}$ fois.

3.3 – Vers une borne polynomiale

Le lecteur qui a suivi attentivement jusque-là est certainement circonspect, et à raison : alors que l'objectif depuis le début est d'obtenir des bornes polynomiales, les valeurs fournies par le théorème 4 sont exponentielles. Pire encore, des exemples existent, dus à Hass, Snoeyink et Thurston [13] de nœuds triviaux constitués de $O(n)$ segments, mais pour lesquels tout disque caractéristique linéaire par morceaux et triangulé a au moins 2^{n-1} faces. Cela suggère qu'on ne peut pas, en général, améliorer les valeurs fournies par le théorème 4 en des bornes polynomiales.

Figure 10 – Un nombre exponentiel de disques normaux parallèle de même type



L'observation-clé de Lackenby pour sortir de cette ornière est que l'on travaille avec une triangulation ayant un nombre polynomial de tétraèdres, et donc s'il y a un nombre exponentiel de disques normaux, une grande fraction d'entre eux seront *parallèles* (c'est-à-dire de même type), voir figure 10. Et lorsqu'on opère un mouvement de simplification, on observe qu'il permet de simplifier non seulement la singularité en question, mais également toutes celles sur des morceaux de la surface caractéristique qui sont parallèles. On peut donc s'attendre à ce que chaque mouvement de simplification diminue le nombre d'intersections avec la reliure d'un nombre exponentiel. Ainsi, un nombre polynomial de mouvements pourrait suffire à simplifier la surface caractéristique de complexité exponentielle en une surface triviale.

De nombreux obstacles apparaissent lorsqu'on essaye de formaliser cette intuition. Peut-être le plus important est que l'argument de caractéristique d'Euler évoqué en Section 3.1 ne fournit pas directement de sous-structures exponentiellement parallèles et qui seraient simplifiables en un seul mouvement. En effet, d'autres cas de figures peuvent a priori se produire. Ceux-ci sont exclus par Lackenby par un argument extrêmement technique exploitant toute la puissance de la théorie des surfaces normales (dont le Théorème 4 n'est que la partie émergée de l'iceberg). Pour plus de détails, nous renvoyons à l'article de Lackenby [16].

Références

[1] J. S. Birman et W. W. Menasco. « Special positions for essential tori in link complements ». *Topology* **33**, n° 3 (1994), p. 525–556.

[2] M. Bousquet-Mélou. « Counting planar maps, coloured or uncoloured ». In : *23rd British Combinatorial Conference*. Vol. 392. 2011, p. 1–50.

[3] B. A. Burton et M. Ozlen. « A fast branching algorithm for unknot recognition with experimental polynomial-time behaviour ». *Mathematical Programming* (2012). À paraître. arXiv: 1211.1079.

[4] B. A. Burton, R. Budney, W. Pettersson et al. *Regina: Software for low-dimensional topology*. `http://regina-normal.github.io/`. 1999–2017.

[5] P. R. Cromwell. « Embedding knots and links in an open book I: Basic properties ». *Topology and its Applications* **64**, n° 1 (1995), p. 37–58.

[6] M. Culler et al. *SnapPy, a computer program for studying the geometry and topology of* 3*-manifolds*. Disponible sur `http://snappy.computop.org`.

[7] I. A. Dynnikov. « Arc-presentations of links: Monotonic simplification ». eng. *Fundamenta Mathematicae* **190**, n° 1 (2006), p. 29–76. url : `http://eudml.org/doc/283163`.

[8] C. M. Gordon et J. Luecke. « Knots are determined by their complements ». *Journal of the American Mathematical Society* **2**, n° 2 (1989), p. 371–415.

[9] W. Haken. « Theorie der Normalflachen, ein Isotopiekriterium für den Kreisnoten ». *Acta Mathematica* **105** (1961), p. 245–375.

[10] J. Hass et J. Lagarias. « The number of Reidemeister moves needed for unknotting ». *Journal of the American Mathematical Society* **14**, n° 2 (2001), p. 399–428.

[11] J. Hass, J. Lagarias et N. Pippenger. « The computational complexity of knot and link problems ». *Journal of the ACM* **46**, n° 2 (1999), p. 185–211.

[12] J. Hass et T. Nowik. « Unknot diagrams requiring a quadratic number of Reidemeister moves to untangle ». *Discrete & Computational Geometry* **44**, nº 1 (2010), p. 91–95.

[13] J. Hass, J. Snoeyink et W. P. Thurston. « The size of spanning disks for polygonal curves ». *Discrete and Computational Geometry* **29**, nº 1 (2003), p. 1–18.

[14] L. H. Kauffman et S. Lambropoulou. « Hard unknots and collapsing tangles ». In : *Introductory Lectures on Knot Theory*. 2014.

[15] H. Kneser. « Geschlossene Flächen in Dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten ». *Jahresbericht Math. Verein.* **28** (1929), p. 248–260.

[16] M. Lackenby. « A polynomial upper bound on Reidemeister moves. » *Ann. Math. (2)* **182**, nº 2 (2015), p. 491–564.

[17] M. Lackenby. « Elementary Knot Theory ». In : *Lectures on Geometry*. Oxford University Press, 2017.

[18] MathOverflow. *Are there any very hard unknots?* http://mathoverflow.net/questions/53471/are-there-any-very-hard-unknots. 2011.

[19] A. de Mesmay. « Nœuds, mouvements de Reidemeister et algorithmes (d'après Lackenby) ». *Séminaire Bourbaki* (2018). À paraître.

[20] F. Waldhausen. « On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large ». *Annals of Mathematics* (1968), p. 56–88.

Arnaud de Mesmay

Université Grenoble Alpes, cnrs, Grenoble inp, gipsa-lab, 38000 Grenoble, France

arnaud.de-mesmay@gipsa-lab.fr

Arnaud de Mesmay est chargé de recherche au cnrs, au laboratoire gipsa. Il s'intéresse aux aspects algorithmiques et combinatoires de la topologie de basse dimension.

L'auteur remercie Grégoire Montcouquiol pour sa relecture attentive et ses suggestions.

Entretien

Lors du dernier Congrès International des Mathématiciens, qui a eu lieu à Rio de Janeiro en août dernier, Gaël Octavia et Sébastien Gouëzel ont interviewé les nouveaux lauréats de la médaille Fields. Voici les entretiens réalisés avec Akshay Venkatesh et Peter Scholze.

… avec Akshay Venkatesh

Propos recueillis par G. Octavia, Fondation Sciences Mathématiques de Paris et S. Gouëzel, université de Nantes.

Akshay Venkatesh, bonjour. Qu'avez-vous ressenti en préparant votre conférence, sachant que vous deviez parler pour un public plus large que les spécialistes de votre sujet ?

C'était assez difficile. J'ai pensé parler de sujets faciles à expliquer, mais finalement ce dont j'ai parlé, c'est ce à quoi j'ai réfléchi la plupart du temps ces dernières années. J'ai pensé à plusieurs façons de présenter les choses, le résultat c'est que j'ai donné très peu de détails. J'ai fait des essais avant, avec des détails, mais j'ai pensé que ça n'était pas possible sans perdre une grande partie du public.

Vous êtes à la croisée de différents domaines...

Je me considère uniquement comme théoricien des nombres. Je me sens à l'aise en théorie des nombres, et les problèmes que j'essaie de résoudre appartiennent à la théorie des nombres, mais j'utilise des outils de nombreux autres domaines.

À la fin de votre conférence, vous avez dit que de la correspondance de Langlands, on pouvait déduire des conséquences concrètes, qu'on peut vérifier et démontrer, pouvez-vous en dire plus ?

J'ai des énoncés conjecturaux dont la formulation dépend elle-même d'autres conjectures, donc il faut faire attention à ne pas dire des absurdités. Ce que vous essayez de faire, c'est d'extraire des conséquences [de conjectures] qui ne sont pas rattachées à une conjecture.

Un moment très heureux pour moi, ça a été les premiers calculs numériques que j'ai faits avec Michael Harris. Pendant longtemps j'ai eu l'impression que ces calculs ne marchaient pas. Ces calculs étaient modulo p pour différents nombres premiers p, et je m'attendais à ce qu'on trouve un nombre simple, comme 2 ou 3. En fait il s'est avéré que le résultat était... $-1/72$. Pendant quelques jours j'ai pensé que c'était n'importe quoi, j'étais déprimé, jusqu'à ce que j'essaie des nombres rationnels plus compliqués. Ce genre de calculs m'a rendu la situation moins tendue.

Parlons de vos débuts. Vous étiez un enfant précoce en mathématiques. Comment les mathématiques sont entrées dans votre vie ?

J'ai toujours été intéressé par les mathématiques, autant que je puisse m 'en souvenir, donc je n'ai pas de réponse claire.

Est-ce que quelqu'un dans votre famille fait des mathématiques ?

Mon père est ingénieur, ma mère est informaticienne. Je pense que j'ai appris des choses dans leurs livres de l'université, des livres sur l'ingénierie.

Quand et comment avez-vous découvert la théorie des nombres, et décidé que ça serait votre domaine ?

La théorie des nombres plaît facilement. Quand j'étais en licence, j'ai lu des livres sur ce sujet... ça n'était pas un choix formel, juste le résultat de mon ignorance des autres domaines... Et comme personne ne m'a poussé à faire autre chose, j'ai continué... Si j'avais été exposé à un autre domaine, peut-être... mais je suis très heureux de faire de la théorie des nombres. Vous pouvez utiliser et apprendre plein d'autres choses, vous pouvez faire de nombreux calculs...

En théorie des nombres, les énoncés peuvent être très simples à comprendre, mais les démonstrations très difficiles...

C'est très simple de trouver des problèmes que vous pouvez résoudre, mais le truc c'est qu'il vous faut aussi en trouver qui possèdent des structures mathématiques intéressantes.

Vous avez obtenu une médaille aux Olympiades à 12 ans. Pouvez-vous parler de ces Olympiades ? Qu'est-ce qu'elles vous ont apporté ?

Le point positif des Olympiades pour moi, c'est d'avoir rencontré d'autres enfants passionnés par les mathématiques. Et j'ai encore des amis proches de ces Olympiades. D'un autre côté, je suis content que les mathématiques ne soient pas ça... Je veux dire, qu'elles ne soient pas ce genre de petits problèmes isolés, et qu'elles ne soient pas aussi compétitives.

Vous êtes rentré à l'université très jeune...

Ça été une expérience très heureuse. J'avais des amis, je ne me suis pas senti extraordinaire... Ça m'a paru normal...

Passons à votre travail de mathématicien. Qu'est-ce qui vous plaît dans ce métier ?

J'aime beaucoup faire de la recherche en maths, c'est un processus lent, en tout cas pour moi, mais c'est très satisfaisant à long terme... je n'aime pas seulement progresser, j'aime aussi travailler avec les objets mathématiques, c'est comme avoir un ensemble de jouets avec lesquels vous pouvez jouer tout le temps.

Quelle est selon vous la qualité première pour être mathématicien ?

Des personnes différentes auront des qualités différentes... mais je pense que la persévérance est importante.

Et la créativité ?

Gaël m'a demandé « une » qualité ! (rires). Une chose que j'ai apprise en travaillant avec de nombreux étudiants et collaborateurs, c'est que des gens différents sont bons en maths pour des raisons différentes.

Retournons à vos mathématiques. Pourriez-vous m'énoncer une question à laquelle vous réfléchissez en ce moment ?

J'ai un collègue qui fait de la cryptographie. Il utilise beaucoup la théorie des nombres et les structures algébriques pour construire des cryptages. Il me pose des questions qui m'intéressent. Depuis un moment, lui, moi, et d'autres mathématiciens, on essaie de voir si on peut réaliser les structures algébriques dont il a besoin.

Y a-t-il un problème, une conjecture que vous rêvez de résoudre, comme Andrew Wiles rêvait de la conjecture de Fermat ?

Je ne pense pas avoir de ce type de Grand Œuvre... les problèmes qui m'intéressent ne sont pas vraiment populaires. Ils sont très importants, mais ce sont des trous dans notre compréhension de la théorie des nombres, des sortes de chaînons manquants.

Avez-vous des héros en mathématiques ?

Oh j'en ai plein (rires) !

Par exemple ?

Quand j'étais en master, Deligne était, et pas seulement pour moi, un héros. Une autre personne, avec qui j'ai appris des mathématiques, c'est Joseph Berstein. J'ai eu beaucoup de chance de discuter avec lui. Il y en a plein d'autres...

J'ai vu un grand nombre d'étudiants indiens et de chercheurs qui sont venus vers vous pour se faire prendre en photo en votre compagnie... Pensez-vous que vous devenez une sorte de héros pour les autres ?

Cette idée me rend nerveux, j'espère que non ! Mais il faut que je réfléchisse à la façon dont je peux aider les chercheurs d'autres pays...

Recevoir une médaille Fields ouvre de nombreuses perspectives... Vous voulez continuer les mathématiques, parce que c'est ce que vous aimez ?

Oui, tout à fait, et je ressens une forme de responsabilité à continuer à faire de la recherche en maths... En gros j'espère continuer à faire la même chose.

Pensiez-vous obtenir la médaille ? Nous, on avait entendu votre nom il y a quatre ans, j'avais parié du champagne sur vous !

Non je n'y pensais pas vraiment, c'était une surprise.

Voulez-vous ajouter quelque chose ?

Non, mais c'était une interview agréable !

Merci beaucoup !

Akshay Venkatesh a utilisé des méthodes issues notamment des systèmes dynamiques, de la théorie ergodique, et de la théorie des représentations, pour résoudre de nombreuses questions en théorie des nombres et formes automorphes.

Nous remercions Damien Gayet qui a assuré la retranscription et la traduction de cet entretien.

… avec Peter Scholze

Propos recueillis par G. Octavia, Fondation Sciences Mathématiques de Paris.

Bonjour. Je m'appelle Peter Scholze, et je travaille à Bonn.

Bonjour. Pourriez-vous nous parler pour commencer de vos travaux liés à ceux de Harris et Taylor ?

Dans mon mémoire de master, j'ai trouvé une nouvelle manière de calculer les fonctions L de courbes modulaires aux mauvais nombres premiers. Un peu plus tard, je me suis rendu compte qu'on pouvait utiliser ces techniques pour simplifier une étape clé dans la preuve de la correspondance de Langlands locale. Cela m'a permis d'écrire une version simplifiée de la preuve originale de Harris et Taylor.

Que pourriez-vous nous dire des perfectoïdes ?

C'est dans une autre direction. J'essayais de m'attaquer à une conjecture, appelée conjecture de monodromie-poids, qui a des versions à la fois sur des corps p-adiques et sur des corps de caractéristique positive. J'essayais de déduire le cas p-adique du cas déjà connu de la caractéristique positive. Pour cela, j'ai introduit la théorie des perfectoïdes, qu'on peut définir sur les deux types de corps. Leur intérêt, c'est qu'on a des suites d'équivalences qui permettent parfois de transférer les questions du côté p-adique au côté caractéristique positive, et donc de les résoudre.

Avez-vous toujours su que vous vouliez faire des mathématiques ?

Mes parents sont tous deux scientifiques. Je suis allé dans un lycée spécialement aménagé en direction des mathématiques et des sciences. Cela m'a amené à participer aux Olympiades mathématiques, qui se sont bien passées pour moi. C'est venu naturellement, comme cela. À côté de ça, j'ai toujours été fasciné par la théorie des nombres. À un moment, quand j'étais jeune, j'ai entendu que le grand théorème de Fermat avait été démontré, et que sa résolution faisait intervenir des mathématiques fascinantes. C'est ce qui m'a vraiment attiré vers la géométrie arithmétique.

Sauriez-vous nous expliquer comment vous avez été amené à voir des relations entre objets mathématiques qui avaient échappé à vos prédécesseurs ?

Ce n'est pas vraiment ça qui se passe, en réalité. Par exemple, la théorie des perfectoïdes avait des précurseurs très clairs dans la littérature. Je pense à un théorème de Fontaine et Wintenberger d'il y a 15 ans environ, essentiel. Et il y avait aussi un théorème de Faltings. J'ai simplement essayé de bien les comprendre, de trouver un langage pour les unifier, et de les réécrire avec mes mots.

Demain, vous allez donner un exposé plénier devant une assistance généraliste. Est-ce un exposé spécial pour vous ?

Oui, je trouve que c'est un exercice difficile. Il s'agit à la fois d'expliquer mes propres recherches, mais aussi de les rendre accessibles pour des non-spécialistes. C'est un exposé très spécial, avec beaucoup de pression. Je verrai bien comment je m'en sors !

Que pensez-vous que la médaille Fields va changer dans votre carrière ?

C'est à la fois un grand honneur et une grande reconnaissance. J'espère que cela ne va pas créer trop de distractions par rapport à ma recherche. J'ai vraiment envie de m'y remettre, dès que possible !

Peter Scholze est un spécialiste de la théorie des nombres et de la géométrie algébrique. À 30 ans à peine, il a déjà accumulé une exceptionnelle moisson de résultats parmi lesquels une nouvelle preuve de la conjecture de Langlands locale, la résolution de la conjecture « monodromie-poids » proposée par Pierre Deligne en 1971 grâce à la notion révolutionnaire de perfectoïde (la *Gazette* [154, avril 2017] a publié un article présentant cette notion aux mathématiciens non-spécialistes du sujet). Ces travaux profonds lui avaient déjà valu d'être nommé professeur à Bonn avant ses 25 ans ainsi que nombre de prix prestigieux.

Nous remercions Sébastien Gouëzel qui a assuré la retranscription et la traduction de cet entretien.

Mickaël LAUNAY, montreur de mathématiques

Il adore picorer dans les mathématiques et en parler librement à des publics différents. Il fait des animations dans les classes primaires et secondaires, gère une chaîne youtube, a écrit un succès de librairie « Le grand roman des maths »... Mickaël LAUNAY a reçu le Prix d'Alembert 2018 pour l'ensemble de son œuvre lors du Congrès national de la SMF à Lille en juin dernier. La *Gazette* profite de la remise du prix pour découvrir un peu Mickaël Launay, montreur de mathématiques parfois expert, parfois rêveur mais toujours souriant. Nous avons demandé à Roger MANSUY, enseignant en CPGE, de l'interviewer.

Avant d'accéder à la notoriété avec ta chaîne *MicMath*, tu étais Mickaël Launay, étudiant en mathématiques. Peux-tu nous dire quelques mots de ta formation initiale ?

J'ai toujours bien aimé les sciences et les mathématiques. Quand j'étais plus petit, j'étais surtout passionné d'astronomie. Jusqu'au début du lycée, je voulais être astrophysicien. J'adorais observer et comprendre le ciel, les étoiles, l'univers. Au lycée, je me suis passionné pour les mathématiques et j'ai commencé à me rendre compte à quel point cette discipline était fascinante. Avant je considérais juste ça comme des outils pour les autres sciences. Puis j'ai rencontré un professeur assez extraordinaire, Dominique Souder, qui tenait un club de jeux mathématiques et qui nous faisait des tours de magie mathématiques. Il nous proposait des énigmes toutes les semaines, il nous faisait lire des livres, qu'il commandait pour le CDI. Avec ces livres et ce professeur, j'ai découvert mon goût pour les mathématiques, et j'ai compris que j'avais envie d'en faire très longtemps. J'ai donc continué... J'ai eu mon bac S, suivi de classes préparatoires MPSI, MP (deux fois) au lycée Montaigne de Bordeaux, je suis rentré à l'ÉNS Ulm en 2005 où je suis resté 4 ans puis j'ai fait une thèse en probabilités, sur les processus de hasard renforcé sous la direction de Vlada Limic à l'université d'Aix-Marseille, soutenue en 2012.

En parallèle de ce parcours d'étudiant, j'ai fait partie d'associations où je faisais de la diffusion de culture mathématique. Après ma thèse, je me suis lancé dans la médiation. J'ai beaucoup hésité car la recherche me tentait bien : jusque-là, j'avais toujours voulu être chercheur et dans les derniers mois, au moment de choisir, je me suis dit que finalement la médiation scientifique me tentait bien aussi et j'ai pris cette décision.

Dans ton profil sur différents réseaux sociaux, tu te dis « Montreur de mathématiques ». Tu sembles réfuter l'utilisation (pour toi) de termes comme « mathématicien » ou « vulgarisateur ». Est-ce une posture ? Une conviction ?

Un peu des deux, peut-être un peu une provocation. J'ai pas mal hésité sur le mot. Quand je me suis lancé dans la vulgarisation, je ne savais pas trop comment me définir : vulgarisateur, médiateur scientifique, mathématicien.

Le mot mathématicien me plaît beaucoup et j'ai voulu l'utiliser mais il y a un côté imposteur, car beaucoup de gens entendent ce mot comme « chercheur en mathématiques », ce que je ne suis plus. Même si pour moi, mathématicien peut englober plein d'autres situations, il y a une incompréhension quand j'utilise ce terme devant le grand public. Les mots vulgarisateur/médiateur sont intéressants aussi mais ils indiquent une intention derrière ; quand on vulgarise, on agit sur les mathématiques. Faire de la vulgarisation, ça me plaît mais ce que j'aime vraiment c'est parler de mathématiques avec les gens de toutes les façons possibles, vulgarisées ou non. Il est sûr qu'avec du grand public, on vulgarise naturellement car il faut que les gens en face comprennent, c'est ce qui est intéressant dans l'échange. Quand on parle de vulgarisation, on sous-entend souvent les questions « à quel public s'adresse-t-on ? », « quelle méthode utiliser ? »... j'ai tendance à ne pas trop me poser ces questions, j'ai envie de parler de mathématiques, que ça fasse plaisir et c'est tout. Que les gens retiennent quelque chose ou non, ce n'est pas important. S'ils ont appris quelque chose, tant mieux, mais ce n'est pas ce que je recherche.

Le mot montreur de mathématiques est très descriptif, neutre en terme d'intention. On montre les mathématiques comme autrefois on montrait les ours dans les cirques ; les ours comme les mathématiques font un peu peur aux gens et il y a donc un côté Monsieur Loyal du cirque : « approchez, je vais vous montrer des équations et des figures mathématiques et vous allez aimer cela ». J'adore cette liberté de pouvoir parler de mathématiques comme je veux sans avoir à me soucier de contraintes quelles qu'elles soient.

La chaîne youtube avait au début un sous-titre « bric-à-brac mathématique » et j'aime bien ce côté un peu fouillis avec plein de choses qui partent dans tous les sens, très colorées avec des objets qu'on va montrer...

Justement, tu es collectionneur de « curiosités mathématiques », notamment de vieilles machines à calculer. Est-ce un goût personnel ou seulement un autre moyen pour de la diffusion ?

Un peu les deux en fait. J'ai des objets mathématiques depuis très longtemps, j'adore les gadgets à collectionner, les objets de geek... au début, je m'en suis servi pour faire de la vulgarisation et, à mesure que je les utilisais, j'ai découvert de nouveaux objets et je me suis mis à les collectionner sérieusement, notamment les machines à calculer. Je me suis pris au jeu, démonter ces machines, regarder comment ça marche à l'intérieur... Je m'amuse beaucoup.

Des pièces favorites ?

Ma toute première machine à calculer d'Ohdner à manivelle. Jusqu'à 28-29 ans, je ne savais même pas que ce genre d'outils existait. Quand je suis tombé dessus, j'ai trouvé cela génial. C'était assez émouvant. Mais chacune a sa particularité et dans le fond, j'aime bien toutes mes machines.

Dans ta pratique des mathématiques, est-ce que tu lis des articles des ouvrages ? Est-ce que tu utilises d'autres sources ?

Forcément, quand on aime un sujet et quand on veut en parler, il faut toujours se renseigner, être soi-même dans la posture de celui qui apprend, découvrir de nouvelles mathématiques qui nous émerveillent avant de pouvoir émerveiller les autres.

Après, je dois avouer que je suis assez décousu, assez chaotique dans ma façon d'apprendre des mathématiques, je crois que jamais je ne lis un livre de mathématiques du début jusqu'à la fin de manière linéaire. Je vais piocher des petites choses dedans, et puis ça va me faire penser à autre chose, je saute du coq à l'âne.

Aujourd'hui, on trouve plein d'articles sur internet : articles de vulgarisation mais aussi de recherche et je continue par exemple à suivre le sujet sur lequel j'ai fait de la recherche pendant ma thèse. Je continue aussi à me renseigner sur des sujets sur lesquels je n'ai pas fait de recherche mais qui me fascinent. Cela fait partie des raisons pour lesquelles je suis content de m'être lancé dans la médiation : je peux un peu toucher à tout, bien sûr sans être à la pointe d'un sujet, et me promener dans les mathématiques. Lire de la vulgarisation, de la recherche, de l'histoire des mathématiques, des textes anciens... En ce moment, je lis le dernier livre de Lê de la chaîne *Science4All*, la formule du savoir, qui est passionnant.

En pratique, est-ce que Montreur de mathématiques, c'est un métier ? Comment peut-on en vivre ?

Aujourd'hui c'est devenu mon métier et j'espère que cela va le rester longtemps ! Quand je me suis lancé, ce n'était pas facile. Pendant mes études, j'avais commencé sur mon temps libre avec différentes associations. Quand en 2012, j'ai voulu faire cela à temps plein, ce n'était pas facile de trouver des opportunités, des occasions de parler de mathématiques, de trouver des médias pour le faire... Petit à petit, j'ai essayé pas mal de choses, certaines ont raté, d'autres ont réussi, notamment la chaîne youtube qui est probablement ce qui a marché le plus rapidement alors que ce n'était pas vraiment ce sur quoi je comptais le plus au départ. À l'époque, il n'y avait encore que peu de sciences sur youtube.

Aujourd'hui, par le biais de la chaîne, je me retrouve être invité de plus en plus souvent dans des établissements pour faire des conférences, pour parler de mathématiques. Depuis 2-3 ans, c'est mon métier à temps plein, j'en vis complètement et je peux m'y adonner sans me soucier de faire une activité alimentaire à côté.

Pour être un peu trivial et parler d'argent, c'est seulement quand tu as été connu que tu as commencé à recevoir des invitations rémunérées ?

C'est à peu près ça. D'ailleurs, cela a été un peu frustrant qu'il n'y ait pas d'état « entre-deux ». En 4-5 semaines, je suis passé de l'état « je ne trouve pas assez de choses, je ne gagne pas ma vie et je suis en galère » à « je suis obligé de refuser des trucs super cools car on m'en propose trop ». Je n'ai pas eu cette période équilibrée. Mon livre *Le grand roman des mathématiques* a bien marché et grâce aux droits d'auteurs, je suis aujourd'hui libre de choisir mes autres activités sans trop me soucier d'argent. Je considère depuis deux ans que mon métier rémunérateur c'est auteur. Sur YouTube, je ne monétise pas mes vidéos donc leur diffusion ne me rapporte pas d'argent via la publicité mais j'ai deux « à-côtés » : un financement participatif *Tipeee* et des revenus via la Société Civile des Auteurs Multimedia qui gère les intérêts des auteurs vidéastes en ligne.

Qui sont tes partenaires, employeurs ?

Au début, j'ai travaillé avec la Fédération Française des Jeux Mathématiques pour des jurys, de la conceptions d'énigmes. J'ai été animateur de colonies de vacances mathématiques toujours avec la FFJM. Ensuite, j'ai rencontré le CIJM où j'ai passé du temps à monter des chasses au trésor, à m'investir pour le salon de la Culture et des Jeux Mathématiques de la place St-Sulpice et puis j'ai travaillé aussi avec l'association Science Ouverte à Drancy et Bobigny, notamment lors du club explorations mathématiques du samedi matin pour les collégiens. Je travaille aussi avec le Kangourou et de manière dispersée avec d'autres gens au fil des rencontres.

As-tu déjà connu des actions qui échouaient ? Peux-tu nous dire pourquoi afin que l'on évite des mésaventures analogues ?

Il y a eu pas mal de choses qui ont raté et je pense que c'est assez naturel quand on se lance dans quelque chose de nouveau, c'est normal de tâtonner et donc normal que certains essais ratent parmi tout ce que l'on tente.

Après ma thèse, j'avais monté une petite société pour proposer des activités périscolaires de mathématiques ; j'avais mon site web, j'ai démarché tout Paris, j'ai distribué des flyers un peu partout pour dire aux gens que le mercredi après-midi, le samedi matin, après les cours, vous pouvez venir faire des mathématiques ludiques et… flop monumental : j'ai monté seulement 3 ou 4 séances. Au bout de plusieurs mois à y mettre toute mon énergie, je me suis dit que ce n'était pas raisonnable et que ce n'était pas ça qu'il fallait que je fasse.

Il y a plusieurs raisons à cet échec : d'une part, les gens potentiellement intéressés devaient se demander ce que c'était car ça n'existait pas encore ces séances « non scolaires » ; j'aurais dû davantage préciser ce que je comptais faire ; d'autre part, j'étais mauvais dans la communication, le marketing. Peut-être qu'aujourd'hui, ce format pourrait être adapté pour plaire aux jeunes et inspirer la confiance aux parents.

Il y a aussi beaucoup de petits flops : des fois, on prépare soigneusement une conférence ou une animation devant une classe et ça ne marche pas contrairement à d'autres plus improvisées où l'on rebondit sur des remarques du public, où l'on a une inspiration soudaine… Ce côté imprévisible apporte une forme d'excitation dans ce métier. On apprend toujours et il faut savoir tirer les leçons.

Les échecs apprennent aussi à improviser. On commence quelque chose et on réalise que ça ne prend pas au bout de 15 minutes, alors il faut lâcher prise, abandonner le projet initial : interroger les gens et reconstruire. Cette aptitude vient avec l'expérience.

En pratique, quel est le temps de préparation du contenu, de tournage et de montage pour une vidéo sur ta chaîne ? Quelles sont les compétences techniques à maitriser ?

Le temps est très variable : pour la dernière vidéo sur le taquin de Llyod, on a commencé vers 14h ; le tournage a duré une heure ou deux ; ensuite on est passé aux graphismes, incrustations, effets spéciaux lors du montage et la vidéo était en ligne vers 1h30 (ndlr : du matin). Moins de 12 heures entre le début et la fin pour une vidéo de 11 minutes. Il m'est déjà arrivé de faire une vidéo tous les trois jours : cela me demandait d'être beaucoup plus réactif et de faire des vidéos plus courtes (3-4 minutes seulement). Les vidéos qui m'ont demandé le plus de temps sont celles sur la quatrième dimension : il y a des animations en 3D que j'ai réalisées moi-même en apprenant à me servir du logiciel ; pour le coup, l'épisode le plus long m'a pris 3-4 semaines à temps plein (dont une journée d'écriture et une demi-journée de tournage).

Tu apprends la technique (montage, incrustation, animation) sur le tas ?

Oui, d'ailleurs mes premières vidéos sont uniquement des plans séquences car je ne savais pas couper. Si je bafouillais, je reprenais tout depuis le début. Les gens m'ont donné des conseils sur le regard, la voix, le cadrage, des logiciels de montage. J'ai tâtonné en essayant les fonctionnalités du logiciel. Cela reste ludique pour moi.

Tu te dis complémentaire d'actions de vulgarisation par des chercheurs/enseignants-chercheurs. Comment peut-on organiser l'interconnexion ?

Il y a plein de façons différentes de parler et de vivre les mathématiques : notre écosystème est très riche et foisonnant ; les chercheurs, les enseignants-chercheurs, les enseignants, les médiateurs, les amateurs passionnés ont des expériences différentes. Il faut discuter entre nous, apporter nos différents points de vue devant le public ! Les médiateurs ont un rôle particulier : ils ont peut-être plus de liens avec les chercheurs que la plupart des enseignants, plus de liens avec les enseignants que la plupart des chercheurs. Il faut savoir établir les contacts et faire se rencontrer les gens.

Tu contredis les gens qui disent qu'ils auraient aimé t'avoir comme professeur.

Pas tout-à-fait, en fait je n'en sais rien, j'ose espérer qu'ils auraient peut-être effectivement aimé m'avoir comme professeur (rires). Ce que je nie, c'est l'implication « j'aime tes vidéos donc j'aurais aimé t'avoir comme professeur ». Dans mes vidéos, je parle de sujets agréables, jolis, plaisants voire poétiques mais je ne rentre pas dans les détails techniques : je n'apprends pas à faire des mathématiques. Quand on me dit « si seulement mon professeur expliquait comme ça », je réponds que les professeurs ne peuvent pas car leurs cours ont davantage l'objectif de former. Encore une fois, les deux professions peuvent interagir : les professeurs ont des retours, peuvent aider à localiser les difficultés car ils ont une expérience du contact avec les élèves. De mon côté, je peux proposer des ouvertures vers autre chose qu'un programme et fournir des motivations. Je suis toujours content quand un professeur utilise mes vidéos en classe et j'adore aller en classe devant des élèves.

Comme dans ta vidéo de juillet sur le taquin de Sam Loyd, tu utilises le prétexte du jeu pour faire passer des notions mathématiques. Est-ce une figure imposée par la diffusion envers les jeunes ?

Je ne sais pas si c'est un passage obligé mais c'est un moyen motivant et efficace. En général, il est difficile de faire passer le plaisir de pratiquer les mathématiques. Pour une personne intéressée par la pratique musicale, il y a obligatoirement un côté technique (le solfège, les gammes), mais comme elle a déjà écouté de la musique, elle garde un objectif clair : elle sait pourquoi cela sera agréable et pourquoi les efforts valent le coup. En mathématiques, lorsque l'on arrive en cours, on fait directement face aux aspects techniques (apprendre tel théorème, savoir faire tel calcul, comprendre telle figure...). Le jeu peut être une « surcouche » qui révèle le plaisir qui se cache derrière cette technique. L'envie de jouer va motiver l'apprentissage des mathématiques puis le plaisir du jeu va petit à petit laisser place aux plaisirs mathématiques.

Tu es très impliqué pour le salon du CIJM (comité international des jeux mathématiques). Pourquoi ces manifestations au budget précaire te semblent-elles essentielles ?

Tout ce qui permet de donner une autre image aux mathématiques que celle plutôt austère habituellement véhiculée dans le grand public est le bienvenu. Le salon de la culture et des jeux mathématiques du CIJM fait partie des initiatives précurseuses dans ce domaine puisqu'il existe depuis l'an 2000 à Paris. Il y a beaucoup de gens qui viennent sur ce salon par hasard et qui voient des enfants qui s'amusent, des tours de magie, des constructions géantes, des spectacles et ils sont interpellés quand ils réalisent que c'est un salon de mathématiques. On voit apparaître de plus en plus d'initiatives de ce genre : Maths en ville depuis l'an dernier en octobre à St-Denis, Les Maths dans tous leurs états en mars au Castanet-Tolosan, la tournée du Pi-Day... Ces dernières années, il y a un bourgeonnement d'activités et le public est au rendez-vous. On espère que cette dynamique va être entretenue et soutenue !

Le succès sur youtube t'a fait connaître de nombreuses personnes. Est-ce que cela change ton quotidien ? Ton rapport aux publics ?

Cela a changé mon quotidien puisque cela m'a permis d'en vivre ! Les gens pensent désormais davantage à moi et j'ai beaucoup d'opportunités qui me permettent de m'éclater en faisant ce que j'aime.

Cela a également changé mon rapport au public. Je m'en suis rendu compte il y a 4-5 ans. Avec différentes associations, quand j'annonçais sur les réseaux sociaux ma participation sur un stand ou un salon, mais qu'il m'arrivait de ne pas être présent en continu toute la journée s'il y avait assez d'autres médiateurs pour animer, on me rapportait que des gens étaient repartis déçus de ne pas m'avoir vu. Les animations étaient les mêmes indépendamment de ma personne, mais j'ai réalisé que des gens venaient pour me voir et j'ai mis un certain temps à accepter qu'il était normal que des gens qui m'ont connu par les vidéos veuillent me rencontrer. J'ai la chance d'avoir une audience respectueuse et sympa (par rapport à d'autres youtubers) : peu de gens viennent seulement pour prendre un selfie ou demander un autographe. C'est toujours le contenu qui les motive.

En revanche, je ne pense pas avoir pris volontairement davantage de distance ; aujourd'hui, je ne peux pas répondre ni même lire tous les messages qu'on m'envoie et cela peut être vu comme une prise de distance. Il est clair que j'ai aussi beaucoup évolué dans ma façon de présenter les mathématiques grâce à toutes les remarques que l'on m'a faites, mais dans le fond, je ne pense pas vraiment avoir changé dans le contact que j'ai avec les gens.

Ton livre « Le grand roman des mathématiques » [1] est un véritable phénomène d'édition. Tu as été beaucoup invité dans des salons du livre. Est-ce que le public rencontré te connaissait déjà par tes autres activités ?

Il y a des deux : je savais en écrivant qu'une partie du public qui suit ma chaîne allait vouloir lire le livre. Puis le bouche-à-oreille a bien fonctionné et j'ai commencé à voir des gens qui venaient sur la chaîne en disant qu'ils m'avaient connu par le livre. Sur les salons, on doit être pas loin du 50-50 entre ces deux groupes.

J'adore aller dans les salons du livre car on y croise des gens qui ne sont pas venus pour les math et qui sont surpris de pouvoir discuter avec un mathématicien dans un lieu où l'on ne s'attend pas à le trouver. Il y a certes ceux qui tournent la tête de l'autre côté ; je vois régulièrement ceux qui hésitent et renoncent... et ceux qui qui finalement sont suffisamment intrigués pour venir me parler.

Fait amusant, c'est à partir du moment où j'ai parcouru les salons du livre que j'ai commencé à recevoir des lettres manuscrites et plus uniquement des messages sur les réseaux sociaux. Je vais peut-être me répéter, mais plus je traverse et rencontre des mondes différents, plus je peux créer du lien entre des gens différents et plus cela me fait plaisir.

1. Flammarion 2017 puis J'ai lu 2018 pour l'édition poche.

Que change pour toi l'obtention du prestigieux prix D'Alembert ? La reconnaissance officielle d'une institution comme la SMF te change-t-elle ?

C'est un honneur qu'une institution prestigieuse comme la SMF apporte une forme de reconnaissance à ce que je fais. J'ai quelquefois ressenti une forme de mépris surtout dans les médias notamment parce qu'on est sur internet (même si je suis relativement protégé par mes études ; dire que je suis passé par l'École normale change un peu le regard que l'on me porte). Le choix de la SMF permet vraiment de soutenir les vulgarisateurs en mathématiques face à ces réticences. Après ces succès (ndlr : il y a les bonnes ventes du livre mais aussi le prix Tangente), il y a aussi une pression sur ce qui vient après, des attentes. Je m'interroge toujours sur ce que je vais pouvoir faire pour que les gens ne soient pas déçus ou disent « il a eu sa période vers 2015-2017 mais ce n'est plus ce que c'était ! » (rires) Je vais toutefois essayer que cela ne me change pas radicalement.

Après 10 ans de vulgarisation sur différents médias et un très gros succès de librairie, qu'est-ce qui réveille ton enthousiasme ?

Le simple fait de rencontrer les gens, de continuer à découvrir des mathématiques qui m'amusent, de savoir que ce que je fais peut être utile... Il n'y a pas besoin de beaucoup quand on est passionné. Les moments de doutes sont vite balayés par l'excitation de nouvelles idées. Par ailleurs, j'ai la chance d'arriver dans un domaine, la diffusion des sciences, où il reste tant de choses à faire et qui semble bien loin de la saturation. On voit apparaître de nouveaux protagonistes dans la diffusion des mathématiques et c'est enthousiasmant de s'enrichir mutuellement dans un contexte sans trop de concurrence.

Tu sembles créer sans arrêt de nouveaux projets afin d'éviter la routine. Quels sont ceux sur lesquels tu travailles aujourd'hui ?

Je ne sais pas car ils sont nombreux et je ne sais pas ceux qui émergeront bientôt et ceux qui tomberont à l'eau. Il y a des projets sur des formats que je connais et d'autres plus différents. Je vais continuer à écrire des livres ; je suis d'ailleurs sur un projet enthousiasmant avec André Deledicq, le créateur du concours Kangourou : le dictionnaire amoureux des mathématiques chez Plon. J'ai également un projet de jeu de plateau qui me tient à coeur sur l'histoire de l'astronomie avec Chloé Bouchaour. Je ferai encore des vidéos bien sûr mais peut-être davantage en extérieur et avec des collaborations… Et puis, pourquoi ne pas faire un spectacle mathématique ? Je sais que quand je fais des conférences, je glisse de plus en plus souvent des séquences qui ressemblent à du spectacle. L'idée d'un spectacle mathématique avec de la poésie, de l'humour absurde me plairait assez. Je ne sais pas ce que je peux valoir dans ce contexte, mais je crois que j'aimerais bien essayer monter sur scène…

Tu parles de collaborations. Envisages-tu de travailler avec des mathématiciens ? avec d'autres vidéastes ? Dans le cadre d'un projet vidéo de classes ? Pour des institutions sponsor comme un musée ou le CNRS ?

Tout cela peut m'intéresser et je reste ouvert : travailler avec un musée ou le CNRS serait excitant mais il faut trouver le temps pour bien mener de tels projets. J'ai récemment fait une vidéo en commun avec Lê de *Science4All* sur mon sujet de thèse, une conférence à deux voix avec Florence Porcel pour le PlayAzur Festival à Nice, des vidéos au Palais de la Découverte avec Robin Jamet…

J'envisage depuis un certain temps de faire ce que fait Numberphile dans le monde anglophone : aller rencontrer des chercheurs pour leur faire raconter leurs mathématiques.

Un projet fou, un rêve ou une collaboration à réaliser dans les 10 prochaines années ?

C'est difficile à dire car je suis assez instable dans mes envies et ça peut changer assez rapidement. Mais je crois que monter un beau spectacle autour des mathématiques, sans savoir encore vraiment comment ni avec qui, fait tout de même partie des choses que j'ai vraiment envie de faire un jour !

Mickaël Launay est un vidéaste et mathématicien français. Il est spécialiste de vulgarisation mathématique.

M@ths en-vie, un dispositif pour ancrer les mathématiques au réel

- C. Cortay
- C. Gilger

La Société Mathématique de France, a décerné le prix Jacqueline Ferrand 2018 au projet « M@ths en-vie », porté par Carole Cortay et Christophe Gilger. Selon la SMF, « le jury a particulièrement apprécié ce projet et notamment l'accent mis sur les premiers cycles de l'apprentissage, dont l'importance est fondamentale, et l'utilisation parcimonieuse mais extrêmement pertinente des outils numériques. Le dispositif est suffisamment simple dans sa mise en œuvre pour que tous les enseignants puissent s'en saisir, ce que nous ne pouvons qu'encourager, d'autant plus qu'il est accompagné d'éléments de formation. » Mais qu'est-ce au juste M@ths en-vie ?

M@ths en-vie en quelques mots

M@ths en-vie est un projet interdisciplinaire en français et mathématiques avec utilisation d'outils et ressources numériques. Il a pour objectif d'ancrer les mathématiques au réel au travers de l'utilisation de photos numériques afin d'améliorer la compréhension des élèves lors de la résolution de problèmes.

La résolution de problèmes est une tâche complexe qui peut dérouter les élèves quand ils n'y sont confrontés que ponctuellement. Alors en quoi ce dispositif diffère-t-il des pratiques actuelles et des problèmes présents dans les différents manuels ?

Afin d'aider nos élèves, nous essayons tous de proposer des problèmes de la vie courante. Mais notre représentation est-elle la même que celle de nos élèves ? Ont-ils déjà vécu la situation ou correspond-elle vraiment à celle qu'ils ont vécue ?

La représentation qu'ils se font de la situation est parfois très éloignée de celle qui est effectivement visée. La dénomination même de l'activité proposée (« problème ») est déjà anxiogène. La photo simplifie la tâche en donnant un élément concret d'aide à la compréhension qui rassure l'élève. De plus, cette démarche se rapproche du monde d'images dans lequel évoluent les élèves.

La photo numérique va alors se révéler comme une aide à la transition entre une situation réelle et l'abstraction nécessaire à la résolution du problème.

De ce fait, les supports numériques utilisés ne sauraient être que de simples illustrations ; ils contiennent un ou des éléments mathématiques (données, données nombrables, formes, propriétés géométriques...) qu'il est nécessaire de prélever pour pouvoir résoudre un problème ou répondre à une consigne. Différentes activités permettent de mettre en œuvre ce dispositif à l'école maternelle et élémentaire, voire en 6e dans le cadre de la liaison école-collège.

L'idée est également d'amener les élèves à percevoir leur environnement proche sous un angle mathématique. On peut espérer qu'à plus ou moins long terme, les différentes situations mises en œuvre en classe vont amener les élèves à se poser des questions mathématiques sur le monde qui les entoure.

- Les ordres de grandeurs et les mesures que l'on peut lire sur des étiquettes, des affichages...
- Les formes géométriques, les parallèles, les perpendiculaires, la symétrie...
- Les nombres, les prix, les mesures, les unités... qui font partie de notre quotidien.

Un exemple de problème

Quelle en est l'origine ?

Nous sommes partis d'un échange entre deux classes du Québec qui s'envoyaient des photos de leur environnement proche. Les élèves devaient alors retrouver des éléments ou des propriétés géométriques : parallèles sur un parking, formes d'objets divers, perpendiculaires sur le marquage au sol de la cour... Nous avons trouvé cette initiative très intéressante. Notre souhait était alors d'en faire un dispositif couvrant tous les autres champs des mathématiques avec les grandeurs et mesures ainsi que les nombres et calculs. Nous voulions aller au-delà d'un simple défi ponctuel entre classes en créant des activités diversifiées de la maternelle au CM2, notamment autour de la résolution de problèmes.

D'un constat

L'enquête TIMMS 2016[1] et la dernière enquête PISA pointent le manque d'ancrage au réel de l'enseignement des mathématiques, notamment pour la résolution de problèmes.

Stella Baruk, professeure de mathématiques et chercheuse en pédagogie, a déjà dénoncé largement l'absence de sens donné par un grand nombre d'élèves en mathématiques.

Dans l'expérience menée à l'IREM de Grenoble au problème suivant : « Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ? » sur 97 élèves, 76 ont donné une réponse en utilisant les nombres figurant dans l'énoncé : 26 ans ou 10 ans !

Nous avons tous vécu ce type d'expérience déconcertante qui nous questionne : mais comment les élèves peuvent-ils arriver à de tels résultats ? Les nouveaux programmes en maternelle mettent l'accent sur l'importance d'ancrer les apprentissages dans le vécu des élèves parce que justement, le sens est construit par l'expérience. Le domaine des grandeurs et mesures illustre bien l'importance d'avoir vécu les situations concrètes avant d'utiliser les unités consensuelles puis de les intégrer à des situations abstraites de calcul dans les problèmes.

Comment donner du sens à des calculs sur des distances sans se représenter ce qu'est une longueur, un centimètre, un mètre ? Comment calculer le temps nécessaire pour se rendre d'un lieu à un autre si on n'a jamais éprouvé la différence entre une seconde et une heure ?

L'accès au sens passe donc par le vécu d'abord, puis une représentation de la situation (dessin, schéma, scénario...) pour aller vers une abstraction complète.

Quels sont les enjeux ?

À travers ce projet autour des photos, nous faisons les hypothèses suivantes :

- qu'en exerçant les élèves à repérer des situations réelles pouvant faire l'objet d'un investissement mathématique, ils se créent un panel de représentations qu'ils pourront ensuite remobiliser dans d'autres situations similaires ;
- qu'ils construisent l'intérêt d'apprendre les mathématiques parce que cette discipline s'inscrit dans leur réalité de tous les jours ;
- qu'ils mettent du sens afin de mettre en œuvre des procédures de résolution cohérentes.

L'utilisation de la photo permet de construire ce temps intermédiaire entre une situation vécue, réelle et une abstraction complète. Elle donne un appui pour construire le cheminement intellectuel d'une situation.

La progression proposée permet également d'exercer les élèves à chercher les informations implicites dans des documents (photos ou sites). Cette chasse aux indices, ludique pour les élèves, les invite à jouer, à chercher, comprendre, confronter, valider... C'est une auto-analyse des erreurs qui est proposée, soutenue par une démarche d'échanges entre pairs pour valider ou non les propositions.

1. L'étude internationale TIMSS mesure les performances en mathématiques et en sciences des élèves à la fin de la quatrième année de scolarité obligatoire (cours moyen 1re année pour la France). Note d'information de la DEPP (Direction de l'Évaluation de la Prospective et de la Performance) : `http://cache.media.education.gouv.fr/file/2016/81/9/depp-ni-2016-33-TIMSS-2015-mathematiques-sciences-evaluation-internationale-eleves-CM1_672819.pdf`

Pour quels effets sur les élèves et les pratiques enseignantes ?

Témoignage d'un enseignant : « De se retrouver assis sur des bancs devant l'écran les motive particulièrement. Le fait de quitter leur table, d'être dans une recherche vraiment collective. Le fait aussi, je pense, de partir d'un support photo. J'étais assez sceptique sur l'intérêt de la démarche mais là, je vois tous les élèves en situation de recherche, ce que je ne voyais pas forcément avec des supports écrits. »

On a pu remarquer que des élèves qui habituellement n'entamaient pas de recherche en résolution de problèmes mettaient en œuvre des procédures pertinentes et mettaient du sens dans leur activité. Les résolutions « mécaniques » (j'ajoute toutes les données proposées dans l'énoncé) disparaissent totalement au profit d'une vraie réflexion. La non-présence de toutes les données dans l'énoncé et l'amorce de représentation amenée par la photo permettent aux élèves d'entrer dans une phase de recherche active.

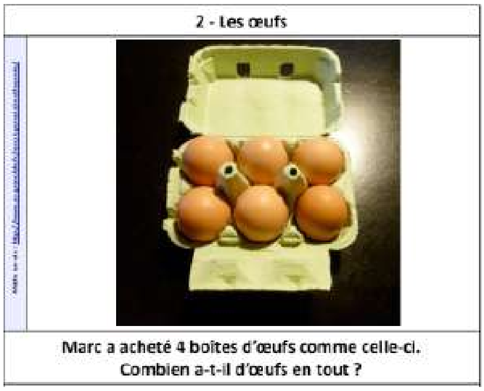
Le dispositif permet de mettre facilement en place des différenciations au sein de chaque activité. L'élève devient acteur en mathématiques et non plus simple exécutant. Il produit des consignes, des énoncés, argumente, justifie, teste, valide...

Les activités de groupe sont favorisées et les échanges permettent aux élèves de mobiliser du vocabulaire spécifique et les concepts mathématiques.

Enfin, le dispositif a permis aux enseignants s'étant engagés, d'envisager la résolution de problèmes sous un autre angle et notamment de mettre en place des travaux de groupes ; cela nécessite une réflexion sur les consignes, les supports et les obstacles didactiques.

Un exemple de résolution par les élèves

Nous avons soumis deux problèmes à 179 élèves de 9 classes différentes de CP, CE1 (en grande majorité) et CE2, au sein de 4 écoles avec des profils très différents.



Dans le premier problème, classique, les deux données sont présentes dans l'énoncé et la photo n'est qu'une simple illustration du problème, n'apportant aucune information ou représentation. Dans le deuxième, une seule donnée nécessaire à la résolution du problème est présente dans l'énoncé, mais la photo permet d'apporter l'autre donnée manquante et offre une représentation de la situation (œufs organisés en deux rangées de trois).

Sur les 179 élèves concernés par cette évaluation, 160 ont mis en œuvre une démarche de résolution correcte pour les deux problèmes (multiplication, addition réitérée, schématisation et comptage des unités, sur-comptage...), soit 89 % de réussite.

Sur les 19 élèves n'ayant pas réussi ou réalisé le premier problème :

- 13 ont entamé une procédure de résolution correcte pour le second ;
- 2 ont donné comme réponse 6 et se sont semble-t-il contentés de compter le nombre d'œufs dans la boîte (problème de compréhension de consigne ?) ;
- pour 4 élèves, les procédures des deux problèmes n'ont pu être interprétées.

Le faible échantillon de cette expérimentation et notamment de ceux qui n'ont pas réussi le premier problème, ne nous permet pas de conclure avec certitude sur l'efficacité réelle de l'aide apportée par la photo.

Nous notons cependant que :

- les élèves en difficulté ou en échec sur le premier problème ont entamé une procédure de résolution correcte pour le deuxième ;
- les élèves ayant ajouté les deux données (4 et 5) sur le premier problème, n'ont pas reproduit cette erreur sur le deuxième ;
- la représentation proposée sur le deuxième problème a amené les élèves qui n'avaient pas fait ou pas su se représenter la situation à réaliser

un schéma conforme à la situation.

Si l'utilisation de la photographie n'est pas nécessaire pour tous, elle a néanmoins permis d'engager tous les élèves et notamment les plus en difficulté dans une réflexion mathématique.

Mais quelles photos utiliser ?

Les manuels de mathématiques contiennent bien souvent des photos mais qui ne sont là que pour illustrer la situation.

Prenons par exemple le problème suivant :

La photo n'apporte aucune information. Des élèves en difficulté, ne se représentant pas la situation, vont avoir tendance à prendre les deux nombres de l'énoncé et à les ajouter, sans y mettre de sens, comme suit : 5+4=9.

Alors qu'on peut décliner le problème comme suit :

On remarquera qu'aucune donnée n'est présente dans l'énoncé, amenant l'élève à se poser des questions sur les données nécessaires à la résolution du problème : combien de roues a ma voiture ? Combien de boulons sont représentés sur la photo ? En recherchant les données, l'élève met donc du sens derrière celles qui lui seront utiles et les utilisera alors à bon escient. 4 représente le nombre de roues et 5 le nombre de boulons, on ne peut donc pas les ajouter !

M@ths en-vie, c'est aussi de nombreuses ressources pour aider les enseignants

Plusieurs outils sont disponibles pour débuter avec M@ths en-vie :

- une publication : 174 pages, 34 activités détaillées de la maternelle au CM2, 128 photos papier et numériques, 1 logiciel avec 3 applications, les enjeux, les outils, les démarches... À découvrir ici, sur le site de la communauté : `http://www.mathsenvie.fr/?page_id=2`;
- un site dédié permettant de découvrir les enjeux, des activités, des exemples de problèmes... : `http://www.ac-grenoble.fr/ien.st-gervais/mathsenvie/`;
- un site de la communauté avec notamment l'ensemble des comptes dédiés sur les réseaux sociaux (Twitter, page Facebook, Instagram) sur lesquels les enseignants peuvent échanger et collaborer : `http://www.mathsenvie.fr/`;
- un projet collaboratif permettant d'engager des classes dans des échanges ludiques et progressifs tout au long de l'année scolaire : `http://www.ac-grenoble.fr/ien.st-gervais/mathsenvie/spip.php?article125`.

Carole Cortay
carole.cortay@ac-grenoble.fr

Carole Cortay est Conseillère pédagogique dans la circonscription de Saint-Gervais/ Pays du Mont-Blanc et membre du groupe Sciences74

Christophe Gilger
christophe.gilger@ac-grenoble.fr

Christophe Gilger est enseignant référent pour les usages du numérique, maître formateur en mathématiques dans la circonscription de Saint-Gervais/ Pays du Mont-Blanc et à l'espe de Bonneville et membre du groupe Mathématiques74

« Women in Mathematics: Historical and Modern Perspectives ». Quelques notes autour d'un atelier sur les femmes en mathématiques

• J. Boucard
• I. Lémonon

Cet article [a] fait suite à l'atelier intitulé « Women in Mathematics: Historical and Modern Perspectives » organisé par Tinne Hoff Kjeldsen, Nicola Oswald et Renate Tobies en janvier 2017 au Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. L'objectif de cette rencontre était de croiser des perspectives historiques et sociologiques sur la situation des femmes en mathématiques du point de vue de l'enseignement et de la recherche, et de réfléchir à la façon dont ces perspectives peuvent alimenter les débats et réflexions sur la situation actuelle des femmes en mathématiques. Dans cet article, nous souhaitons rendre compte des différents travaux présentés. Après un rappel du contexte de l'atelier dans l'introduction, nous exposons les résultats issus des recherches présentées dans ce cadre, complétées par des travaux historiques et sociologiques récents, à travers deux prismes : les femmes mathématiciennes dans leurs itinéraires individuels, leurs réseaux sociaux et les institutions savantes d'une part ; les représentations associées aux femmes pratiquant des mathématiques d'autre part.

a. Une version plus longue de cet article sera disponible sur HAL à partir de novembre 2018.

1. Introduction

Les femmes ont longtemps été exclues des sciences institutionnalisées, que ce soit dans les universités, les académies ou encore les écoles d'ingénieurs. Des « pionnières » [1] ont investi ces sphères alors exclusivement masculines dès le XIXe siècle au moins, et c'est à partir de la fin de ce même siècle que sont créées des institutions d'enseignement supérieur réservées aux femmes, puis que les établissements d'enseignement et de recherche deviennent progressivement mixtes [3]. Mixité ne rime néanmoins pas avec parité : les femmes restent encore aujourd'hui minoritaires dans les hiérarchies académiques, voire marginales dans certains domaines comme les mathématiques. Cette marginalisation des femmes dans les postes de haut niveau dans l'enseignement supérieur et la recherche en général et

1. Nous entendons ici le terme « pionnière » dans le sens d'initiatrice, comme par exemple Marie-Louise Paris qui crée l'École polytechnique féminine en 1925 [3]. Depuis les années 1960, de nombreux travaux de sciences humaines et sociales traitent de cette question des femmes et des sciences. Une courte introduction est donnée dans [11] par exemple.

en mathématiques en particulier a été régulièrement analysée par les psychologues et les sociologues à travers les notions de *leaky pipeline*, de plafond de verre ou encore de *cooling out effect*, pour illustrer une situation qui ne manque pas d'interroger : malgré des modalités de recrutement théoriquement non genrées et appuyées par des efforts politiques réguliers, la plupart des femmes ne poursuit pas une carrière académique, et ce, même après un doctorat, et une infime minorité atteint les positions hiérarchiques les plus élevées (Comm. N. Oswald). Cette disparité est notamment expliquée par des facteurs structurels liés à l'organisation et au fonctionnement des institutions (nombre de postes disponibles, précarité des « débuts » de carrière...) et des facteurs sociaux et culturels (éducation et stratégies familiales, traditions), auxquels s'ajoutent des représentations multiples et changeantes des mathématiques et des mathématicien.ne.s. Une contextualisation historique permet également d'interroger la permanence ou la transformation de ces facteurs ainsi que l'évolution des rapports sociaux de sexe dans les institutions savantes. C'est à partir de ce constat qu'un atelier intitulé « Women in Mathematics: Historical and Modern Perspectives » a été organisé en janvier 2017 par Tinne Hoff Kjeldsen, Nicola Oswald et Renate Tobies au *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach* [2]. L'objectif de cet atelier était de rassembler des chercheur.e.s en sciences humaines et sociales (histoire et didactique des mathématiques, études sur les femmes principalement) afin de dresser un « pont entre les recherches sur la situation des femmes en mathématiques lors de la mise en place de l'enseignement mixte, et celle d'ajourd'hui dans les milieux universitaires » (*Oberwolfach Report*, p. 1) [3]. Le choix a été d'adopter une double perspective, historique et sociologique, fondée sur des comparaisons en diachronie et en synchronie. La diachronie s'est d'abord imposée puisque la période couverte est l'époque contemporaine (xix^e^-xxi^e^ siècles), permettant de pointer et d'interroger des éléments de comparaison sur des temps relativement longs : nous pensons par exemple aux facteurs expliquant la faible visibilité des femmes en mathématiques au tournant du xx^e^ siècle [16] ou aux jugements de valeurs esthétiques sur les femmes mathématiciennes, dont la similarité entre des cas passés et contemporains est frappante (Comm. N. Oswald). Il est également fructueux d'opérer en synchronie à partir de comparaisons d'itinéraires individuels et collectifs de femmes ou des développements de structures d'enseignement supérieur accessibles aux femmes. Les différents cas abordés sont issus du monde occidental en se centrant principalement sur l'Europe avec quelques mentions des États-Unis. L'hétérogénéité des approches méthodologiques (biographiques, prosopographiques, quantitatives, relevant de l'histoire des institutions ou des représentations...) était assumée, voire recherchée, afin de pouvoir questionner la place des femmes en mathématiques à travers différents prismes et d'alimenter les débats sur la place actuelle des femmes dans les mathématiques. L'objectif de cet article est de rendre compte des travaux présentés lors de cet atelier selon deux axes thématiques principaux : les femmes mathématiciennes [4] dans leurs itinéraires individuels, leurs réseaux sociaux et les institutions savantes ; les représentations associées aux femmes pratiquant des mathématiques.

2. Itinéraires individuels et collectifs

2.1 – Itinéraires individuels et heuristique de l'approche biographique

L'outil biographique a souvent été exploité en histoire des sciences pour analyser des stratégies de carrière, des réseaux sociaux, des pratiques savantes, des représentations des savoirs et des savants de manière complémentaire à des approches institutionnelles par exemple. Dans le cas des femmes, étudier des itinéraires individuels, de celles qui sont parfois qualifiées de « pionnières »

2. La liste des communications présentées lors de ce workshop ainsi qu'un résumé de chacune d'elles sont disponibles sur le site de l'institut : `https://www.mfo.de/occasion/1702a/www_view`. Dans la suite du texte, nous nous référons régulièrement au contenu de ces communications à l'aide de la mention « Comm. Nom de l'auteur.e ».

3. « bridge between research on the situation of women in mathematics at the beginning of coeducative studies and the current circumstances in academia. »

4. Par la suite, nous entendons par géomètre ou mathématicien.ne toute personne « [qui] publie dans [le] domaine [des mathématiques], [ou qui] tire principalement ses ressources d'une activité liée à la transmission de ce type de connaissances, ou bien [qui] a suivi une formation spécifique uniquement consacrée aux mathématiques » [7, p. 9], y compris domestique. Nous prendrons également en compte les femmes qui consacrent une partie de leur activité à la production de connaissances mathématiques, sans être rémunérées mais participant à l'activité rémunérée d'un membre de leur famille (mari, frère...) géomètre / mathématicien. L'adaptation de la définition initiale est en effet nécessaire ici. La prise en compte d'une formation domestique ou autodidacte et des formes d'activité mathématique invisibilisées car n'aboutissant pas à des publications en nom propre est particulièrement cruciale dans le cas des femmes.

car premières à intégrer telle institution ou obtenir tel grade, et des autres, permet de plus de rappeler l'absence de neutralité des espaces savants : leur constitution et leur transformation ont été opérées selon des normes de masculinité, alors que féminité et raison ont été progressivement constituées comme des qualités antinomiques [3].

Enfin, dans l'idée de construire un pont entre passé et présent évoqué dans l'introduction, plusieurs historien.ne.s soulignent l'importance de multiplier ces entreprises biographiques afin de mettre en lumière la présence des femmes dans les sciences depuis des siècles et de constituer ainsi des modèles permettant d'encourager l'intégration des femmes dans les sciences actuellement (Comm. P. Govoni). Les femmes mathématiciennes ont fait l'objet de nombreux travaux, tout particulièrement depuis la fin du xix^e^ siècle. Ces travaux ont d'ailleurs très souvent eu (au moins partiellement) pour objectif ou fonction de promouvoir ou au contraire de critiquer l'acceptation et l'intégration des femmes dans les institutions mathématiques [17].

Dans le cadre de l'atelier, plusieurs cas d'étude étaient centrés sur des femmes en tant qu'individus. L'analyse des parcours des célèbres Sophie Germain (1776-1831), Sofia Kovalevskaïa (1850-1891), Emmy Noether (1882-1935) selon des perspectives originales, ou de figures moins connues telles la hongroise Rózsa Péter (1905-1977) ou Hilda Geiringer (1893-1973), autrichienne issue d'une famille allemande et juive, ont permis de souligner la diversité des facteurs en jeu dans l'entrée ou non d'une femme dans une communauté mathématique et l'importance d'intégrer ou de constituer certains réseaux sociaux, masculins, féminins ou mixtes. Leurs itinéraires, souvent qualifiés d'exceptionnels en mathématiques, illustrent à la fois la difficulté à dissocier l'impact du contexte politique, économique et religieux ou du domaine des mathématiques étudié, de celui du genre sur la « carrière » de ces femmes, ainsi que l'influence des représentations associées aux mathématiciennes sur ces itinéraires. Ainsi, au tournant du xix^e^ siècle, Germain ne peut suivre les enseignements de la nouvelle École polytechnique mais parvient, de manière différenciée et partiellement grâce aux relations qu'elle établit avec certains géomètres, à faire reconnaître ses travaux sur les surfaces élastiques et en théorie des nombres (Comm. J. Boucard). Au début du xx^e^ siècle, l'ouverture aux femmes d'une pratique institutionnelle des mathématiques se double souvent d'une discrimination professionnelle, et donc d'une reconnaissance tardive voire inexistante. Par exemple, Noether n'accède en Allemagne qu'à une position de *außerordentliche Professur* [5], et n'y obtiendra jamais de chaire de mathématiques en partie en raison de son genre, mais aussi de sa religion et de son engagement politique [6]. Sa carrière se poursuit en 1933 aux États-Unis au Bryn Mawr College, réservé aux femmes, et les portes de l'*Institute for Advanced Study* ne lui sont entrouvertes que pour quelques conférences alors que celles de l'université de Princeton lui restent fermées (Comm. M. Koreuber). Son genre restreint ses fonctions institutionnelles à l'enseignement pour les femmes. De même, le parcours de Péter, pose de nombreuses questions en termes de genre, mais dépend également fortement de ses relations sociales, notamment avec son collègue László Kalmár qui l'a encouragée et soutenue dès ses études, et du contexte économique et politique de la Hongrie de l'entre-deux-guerres (Comm. K. Gosztonyi).

La période couverte ici, allant du tournant du xix^e^ siècle au second xx^e^ siècle, assure également la visibilité des évolutions sur les possibilités d'accès aux institutions d'enseignement et de recherche pour les femmes. Ainsi, la mise en regard des itinéraires des mathématiciennes Christine Ladd-Franklin (1847-1930), Hazel E. Schoonmaker (1888-1988) et Mary Petronia van Straten (1914-1987), qui ont toutes trois publié des travaux sur les configurations, témoigne d'une évolution des possibilités d'accès au doctorat en mathématiques en tant que femme aux États-Unis (Comm. S. Faghihi).

2.2 – Au-delà des parcours individuels : institutions savantes et enquêtes collectives

Un autre prisme pour étudier les mathématiciennes et les mathématiques qu'elles produisent

5. Titre universitaire indiquant le passage d'une habilitation, mais sans chaire d'enseignement. Ces enseignants peuvent donner des conférences à l'université qui ne les rémunère pas.

6. En 1933, c'est pour des raisons politiques et antisémites qu'elle est exclue de l'université de Göttingen et qu'elle est contrainte d'immigrer aux États-Unis. Mais avant cette date, elle n'obtient aucun poste officiel à l'université alors que son habilitation est acquise dès 1919. Encore une fois, on voit sur cet exemple combien de multiples facteurs influencent l'intégration/exclusion des mathématiciennes au sein du monde universitaire.

est de mener des recherches historiques et sociologiques sur des collaborations ou des groupes sociaux institutionnalisés ou non. Ainsi, depuis les années 1980, les historien.ne.s étudient les pratiques scientifiques au sein de sphères qualifiées de domestiques ou privées [9], ce qui permet de mettre en lumière des personnages, des lieux et des formes de mathématiques négligés voire oubliés (Comm. I. Lémonon). Dans le cadre de l'atelier, plusieurs « couples en mathématiques » ont justement été présentés dans leur organisation, privée et publique (voir partie 3.3).

Par ailleurs, c'est dans le second xixe siècle que les femmes peuvent progressivement intégrer certaines institutions d'enseignement supérieur pour y étudier [7]. Des institutions d'enseignement supérieur spécifiquement dédiées aux femmes sont également créées : c'est par exemple le cas du Girton College à Cambridge (Grande-Bretagne) créé en 1869, des cours Bestuzhev en Russie établis en 1878 ou du Bryn Mawr College près de Philadelphie fondé en 1885. Les premiers proposent un enseignement supérieur pour les femmes (Comm. A. Vogt) tandis que l'objectif du troisième est d'être un établissement d'enseignement supérieur et de recherche [10].

Les cas des universités de Göttingen et de Würzburg présentés au cours de l'atelier montrent toute la complexité de l'entrée des femmes au sein des universités au tournant du xxe siècle. Ainsi, la possibilité des femmes d'intégrer les universités déjà existantes dépend le plus souvent à la fois de cadres législatifs et de l'implication d'hommes universitaires, comme Felix Klein, qui ont joué un rôle prépondérant pour faire accepter des femmes, étrangères dans un premier temps, à l'université de Göttingen (Comm. R. Tobies).

Dans le cas de l'université de Würzburg (Bavière), l'association *Frauenheil* d'encouragement à une meilleure éducation des femmes a joué un rôle important à la fin du xixe siècle (Comm. K. Spiess). Mais si l'effectif de femmes étudiantes à Würzburg devient alors bien supérieur à celui de l'université de Munich par exemple, il faut attendre 1912 pour la première inscription féminine en mathématiques et 1938 pour le premier doctorat féminin en mathématiques dans cette ville. Plusieurs raisons peuvent expliquer ces faits : le nombre réduit d'écoles secondaires pour filles à Würzburg et donc des possibilités moindres de remplir les conditions nécessaires pour une inscription universitaire, l'attitude hostile des étudiants masculins à l'égard des étudiantes, le manque de prestige de Würzburg pour les mathématiques et le fait que les deux professeurs de mathématiques de l'université entre 1910 et 1930 ne se soient jamais prononcés en faveur des études supérieures féminines (et y soient potentiellement hostiles).

Par ailleurs, une chose est d'entrer à l'université, d'obtenir un diplôme ou encore de pouvoir publier dans des revues mathématiques, une autre de poursuivre une carrière dans le monde académique. Ce fait est une nouvelle fois illustré par l'étude de cas originale proposée par M. Bečvářová sur les universités allemande et tchèque de Prague entre 1900 et 1945 (Comm. M. Bečvářová). Trois doctorats en mathématiques (sur 43 au total) ont été attribués à des femmes inscrites à l'université allemande et 12 (sur 159 au total) ont été soutenus par des étudiantes de l'université tchèque. Aucune des onze étudiantes dont il a été possible de reconstituer le parcours ne semble avoir obtenu de poste dans un établissement d'enseignement supérieur [8]. Sur ce point, les institutions les plus excluantes sont certainement les académies des sciences, qui pour la plupart n'admettent leur première femme comme membre qu'après la seconde guerre mondiale.

Parallèlement à ces études historiques, des études sur la situation actuelle des femmes – élèves, étudiantes et universitaires – en mathématiques ont également été présentées , comme celle de L. Fajstrup, A. K. Gjerlöff et T. Hoff Kjeldsen sur quatre mathématiciennes danoises (Comm. L. Fajstrup et T. Hoff Kjeldsen). Au Danemark, les possibilités d'accès aux études supérieures sont les mêmes pour les femmes et les hommes depuis le début du xxe siècle mais le constat est semblable aux autres pays évoqués précédemment : il existe un écart important entre la proportion de femmes ayant suivi des études supérieures (50% contre un tiers des hommes) et la proportion très faible – tout particulièrement en mathématiques – de femmes ayant obtenu un poste académique. Les premiers résultats des entretiens suggèrent l'importance du contexte familial – classe moyenne supérieure, où les filles sont encouragées à poursuivre des études supérieures et/ou scientifiques –, des possibilités personnelles ou institutionnelles pour la garde des enfants et plus généralement de la bienveillance des collègues par rapport aux obligations familiales. Cette étude, fondée sur

7. Voir par exemple [14, 2, 13, 5]
8. Il faudrait pouvoir comparer ces chiffres avec les statistiques des docteurs en mathématiques masculins pour les mêmes universités.

un échantillon très réduit, permet ainsi d'énoncer des hypothèses à tester à plus grande échelle.

Les différents cas abordés dans cette partie suggèrent la complexité et la multiplicité des facteurs en jeu pour l'intégration des femmes dans les institutions mathématiques ainsi que la reconnaissance de leurs activités mathématiques. Les différents itinéraires étudiés dépendent de contextes situés localement et temporellement mais aussi de contingences individuelles. Jusqu'au xx^e^ siècle, les femmes en tant qu'individus ont dû déployer des stratégies et contourner les obstacles et traditions pour intégrer ou tenter d'intégrer des institutions d'enseignement supérieur et de recherche. Dans tous les cas, le rôle d'un ou plusieurs savants a été fondamental pour l'introduction de ces femmes dans les réseaux académiques, en tant qu'étudiantes ou paires (Comm. P. Govoni). Pour les hommes comme pour les femmes, intégrer un réseau personnel, institutionnel, politique est le plus souvent crucial pour produire de la science et pour entrer dans les institutions savantes. Ces études rappellent également que les facteurs en jeu ne se limitent bien sûr pas au genre mais peuvent être politiques, sociaux, religieux, disciplinaires. Pendant les années 1930 et 1940, nombre de mathématicien.ne.s ont dû émigrer pour des raisons politiques et religieuses. De manière générale, les enseignements secondaire et supérieur concernent les classes sociales supérieures et sont de fait discriminants au-delà des questions de genre.

3. Représentations associées aux femmes pratiquant des mathématiques aux XIX^e^ et XX^e^ siècles

L'approche des itinéraires de ces femmes, qu'ils soient individuels ou collectifs, est indissociable des représentations et des discours qui leur sont associés. Dans le cadre de l'atelier, plusieurs interventions ont évoqué l'évolution de ces représentations, qui mettent en lumière les contextes sociaux et culturels dans lesquels œuvrent les femmes et dans lesquels les mathématiques sont produites. En effet, les femmes doivent composer avec les conditions qu'imposent ces contextes pour concilier pratiques savantes et respect des règles sociales.

3.1 – Catégoriser les femmes pratiquant ou produisant des mathématiques ou des sciences

Nous avons ici choisi de considérer une définition très large de la notion de mathématicienne pour toute la période considérée. Néanmoins, les représentations de ce qu'est un.e mathématicien.ne évoluent selon le temps et le milieu. Ainsi, les enseignant.e.s et ingénieur.e.s peuvent être ou non considéré.e.s comme mathématicien.ne.s, comme le suggère la communication d'A. Blunck sur l'image des mathématiques et des mathématicien.ne.s (Comm. A. Blunck). Suivre l'évolution historique de ces représentations permet de dégager des récurrences et des transformations indicatrices des normes de genre en mathématiques. Une façon d'opérer est d'identifier les catégories utilisées au cours de l'histoire, pour nommer les femmes considérées *a posteriori* comme des mathématiciennes. Un des outils proposé par I. Lémonon dans sa communication est la *persona*, à savoir une identité culturelle qui caractérise un collectif aux traits (intellectuels et comportementaux) distinctifs [15].

La *persona* mathématicien.ne, facilement identifiable à une profession dès le xx^e^ siècle, est rarement citée dans la littérature avant le XIX^e^ siècle pour les hommes, et encore plus rarement pour les femmes. Au XVIII^e^ siècle par exemple, le mathématicien est en général identifié par le substantif géomètre, et de manière encore plus répandue par le terme savant. Pour les femmes, en France, le substantif géomètre n'est alors jamais employé : elles sont plutôt qualifiées de (femmes) savantes, à l'instar des femmes lettrées par exemple. De plus, l'expression « femme savante » est porteuse d'une ambivalence : pour les uns, elle est un personnage remarquable par son intellect, et pour les autres un être ridicule qui fait honte à son sexe. Les correspondances privées laissent entrevoir une richesse plus importante du vocabulaire utilisé par les savants pour décrire leurs *alter ego* femmes : logarithmière, calculatrice, collègue, collaboratrice, compagnon ou compagne d'étude ou de calculs, assistante, ou encore académicienne. La *persona* femme savante recouvre donc une pluralité de réalités de femmes investies dans des pratiques mathématiques, qui restent principalement visibles au niveau privé, familial ou domestique. Dans le premier XIX^e^ siècle, l'expression « femme savante » continue d'être utilisée pour désigner les femmes produisant des sciences exactes et naturelles mais est progressivement supplantée par d'autres expressions comme celle de philosophe (pour Émilie du Châtelet) ou celle de mathématicienne (dans le cas de Germain). La fin du siècle est marquée par l'émergence de nouvelles *personae* identifiées par la dénomination de leurs professions, telles que les ingénieures, les astronomes, les mathématiciennes, etc., ayant reçu un diplôme universitaire marquant leur intégration potentielle aux institutions scientifiques. La mathématicienne, en tant que créatrice en mathématiques au sein d'une institution n'apparaît donc en France qu'à la toute fin du XIXe siècle du point de vue de sa représentation, et plutôt dans la première moitié du XXe siècle de manière concrète, avec par exemple Marie Louise Dubreil-Jacotin (1905-1972), qui après sa thèse soutenue en 1934, devient chargée de recherche au sein de la Caisse Nationale de la Recherche Scientifique en 1935, et développe ses travaux en algèbre.

3.2 – L'image des femmes mathématiciennes dans les récits biographiques

À ces catégories passées utilisées pour évoquer la mathématicienne, se juxtapose, notamment dans les récits biographiques, un discours récurrent autour de deux thématiques majeures : la monstruosité et la masculinité. En effet, ces récits concernant les femmes mathématiciennes (ou de sciences) s'accompagnent quasi-systématiquement (pour les biographies écrites avant les années 1970) et assez régulièrement (pour les biographies plus récentes) d'un statut d'exceptionnalité, et donc de monstruosité [9]. Ces « monstres » que sont, par exemple, du Châtelet ou Germain sont régulièrement présentés par leurs contemporains et par les nôtres, comme des femmes hors normes, inégalables et donc implicitement, hors d'atteinte pour une femme qui souhaiterait s'investir dans le domaine scientifique. La remise en question de la féminité, voire de l'humanité des mathématiciennes aux XVIIIe et XIXe siècles, est récurrente dans les discours de leurs détracteurs, voire parfois de leurs soutiens. Les mathématiques sont considérées comme un domaine masculin, où les femmes ne sauraient briller que de manière exceptionnelle, souvent au risque de mettre en péril leur intégrité physique et leur santé [10]. Ainsi Germain qui revendique le statut de mathématicienne, au début du XIXe siècle, dépeinte par Biot (1774-1862) comme « la seule personne de son sexe qui ait pénétré le plus profondément dans les mathématiques » [11], recherche d'ailleurs à rompre avec toutes les représentations féminines des savantes de l'époque (Comm. J. Boucard). On retrouve cette association de la mathématicienne, à un monstre (exception) ou à une figure masculine également dans le cas de Kovalevskaïa, plus d'un siècle plus tard (Comm. E. Kaufholz-Soldat). Au début du XXe siècle siècle, Noether n'échappe pas à cette représentation, elle que les mathématiciens de Göttingen appelaient « Der Noether » (avec l'article masculin) [12], respectueux de sa puissante créativité qui semble avoir surmonté la barrière de son sexe (Comm. E. Kaufholz Soldat), identifiant ainsi la création en mathématiques comme masculine. L'apparence physique et esthétique des mathématiciennes, considérée comme qualité féminine, est d'ailleurs le plus souvent abordée dans leur description, alors que c'est plus rarement le cas pour les mathématiciens. Aux XIXe et XXe siècles, cette incompatibilité énoncée entre féminité et pratique des mathématiques (voire des sciences en général) est renforcée par l'idée que le rôle social des femmes est avant tout celui de mère et d'épouse. On retrouve encore aujourd'hui ce stéréotype de genre : en 2014, certains commentaires postés sur les réseaux sociaux à la suite de la remise de la médaille Fields à la mathématicienne iranienne Maryam Mirzakhami (1977-2017) associent son apparence physique à celle d'un homme (Comm. N. Oswald). De même, des études en sociologie montrent les multiples représentations que peuvent véhiculer les femmes mathématiciennes ou scientifiques dans les milieux universitaires et académiques [4].

3.3 – Les couples en mathématiques

Il apparaît également qu'au tournant du XXe siècle, l'intégration des mathématiciennes par leurs pairs masculins est facilitée lorsqu'elles sont mariées à l'un d'eux, associant ainsi à la mathémati-

9. Ici, le terme de monstre est compris dans son sens étymologique, à savoir un être hors de la norme, qui n'est pas conforme à son espèce, aussi bien dans un sens à valeur positive que négative.

10. Dès le XVIIe siècle, au moins et jusqu'au début du XXe siècle, des traités de physiologie exposent l'incapacité physique du corps de la femme à pratiquer des sciences abstraites. Cet exercice « contre nature » entraîne troubles, agitations du comportement et dessèchement interne des organes.

11. *Journal des savants*, mars 1817.

12. Cette habitude est par exemple relatée dans une lettre datée du 19 mars 1944 de Bartel Leendert van der Waerden à Marie-Louise et Paul Dubreil : « wir Göttinger nannten sie meistens "der Noether" » (fonds van der Waerden, ETH-Bibliothek, Hs 652 : 10718). Nous remercions Christophe Eckes d'avoir attiré notre attention sur cette citation.

cienne, la représentation d'épouse d'un mathématicien [13]. Cette intégration facilitée des femmes par le couple, a néanmoins également souvent pour conséquence une invisibilisation de la mathématicienne et de ses travaux aux dépens de la carrière de son mari.

Le couple Woytinsky (russes) en est une parfaite illustration (Comm. A.Vogt). La très grande collaboration en statistiques, comme en politique [14], des époux Woytinsky, s'est concrétisée par la publication de nombreux ouvrages en statistiques, dont une grande partie publiée sous le nom de Wladimir (1885-1960) seul, mais dédicacée à sa femme, collaboratrice et « camarade ». Le statisticien présente dans son autobiographie sa femme comme sa secrétaire, sa traductrice et son « ange gardien », contribuant ainsi à renforcer l'image genrée de la mathématicienne, épouse du mathématicien de la première moitié du xx^e^ siècle, dont la carrière est avant tout destinée à soutenir son mari. Cette représentation du couple, l'époux mathématicien et sa femme assistante, est d'autant plus frappante que c'est Emma (1893-1968) qui possède un diplôme universitaire, alors que lui n'en détient aucun. Si les financements, les voyages de recherche et les séminaires sont partagés par les deux conjoints sur un mode égalitaire, et si le mode de collaboration du couple a évolué, après leur immigration aux États-Unis, faisant d'Emma la co-auteure de tous les ouvrages de Wladimir, c'est toujours le mathématicien qui reçoit une reconnaissance institutionnelle. Il devient en effet directeur à Berlin du département de statistiques de l'*Allgemeiner Deutscher Gewerkschaftsbund*, puis aux États-Unis employé au *Central Statistical Board*, au *Social Security Board*, puis au sein d'institutions gouvernementales à Washington.

Dans cette première moitié du xx^e^ siècle, le couple de mathématiciens anglais Grace Chisholm (1868-1944) et William Henry Young (1863-1942) vient enrichir la représentation de l'épouse mathématicienne assistante de son conjoint mathématicien (Com. E. Mühlhausen). Chisholm, titulaire d'un doctorat de l'université de Göttingen [15] en 1895, où elle étudie aux côtés de Felix Klein, mène ses propres recherches jusqu'en 1901 où elle commence à publier conjointement avec son mari sur la théorie des ensembles. À partir de 1908, la mathématicienne s'installe à Genève avec leurs enfants pendant que son époux occupe divers postes de recherche dans différentes parties du globe. La mathématicienne joue un rôle très actif dans le programme de recherche et les publications du couple, et en reçoit une certaine reconnaissance [16], mais institutionnellement elle demeure l'épouse assistante de son conjoint mathématicien. Les époux Nikodym offrent au début de leurs carrières une image très différente : tous deux détenteurs d'un doctorat en mathématiques de l'université de Varsovie en 1925, ils avaient des pratiques plus disjointes même s'ils publiaient également ensemble. Otton (1887-1974) était le plus grand producteur d'articles et d'ouvrages du couple [17], mais Stanislawa (1897-1988) participait à part entière aux congrès internationaux et enseignait à l 'université de Varsovie, comme son époux (Com. D. Ciesielska). Cependant, après l'exil imposé par la seconde guerre mondiale, cette configuration du couple en mathématiques est bouleversée : Otton obtient un poste au Kenyon College (USA) en 1948, où il poursuit sa carrière universitaire, alors que sa femme, aussi mathématicienne, l'aide pour la mise en page et la dactylographie de ses ouvrages et la relecture des épreuves [18]. Cet exemple montre que la carrière de la mathématicienne est bien davantage dépendante du contexte que celle du mathématicien.

La trajectoire de Hilda Geiringer (1893-1973), docteure en mathématiques en 1918 à Vienne, d'origine juive, se distingue de celle des mathématiciennes précédemment évoquées (Comm. R. Siegmund-Schultze). La mathématicienne a durant toute sa carrière occupé un poste en mathématiques dans des institutions d'enseignement supérieur (souvent réservées aux femmes), malgré l'exil, la guerre et les persécutions religieuses. Elle a mené ses propres recherches en parallèle de sa carrière officielle d'enseignante, exclue des institutions de recherche par son genre, sans être réduite à la fonction d'assistante de son époux mathématicien, Richard von Mises (1883-1953), si ce n'est au début de sa carrière.

Les communications de cette seconde partie mettent en exergue la complexité et la diversité des facteurs qui influencent l'intégration et la reconnais-

13. Cette notion a été explorée en 1996 dans [12] et développée en 2012 dans [6].
14. Les époux Woytinsky étaient des juifs socialistes très actifs en Russie, puis en Allemagne, d'où ils durent s'exiler pour les États-Unis en 1935.
15. Grace Chisholm est la première femme à obtenir un doctorat en Allemagne.
16. En 1915, elle reçoit le *Gamble prize for mathematics* par le Girton College.
17. Stanislawa est la première femme à obtenir un doctorat en mathématiques en Pologne.
18. Cette description est issue de la dédicace de Otton à son épouse de son ouvrage [8].

sance des femmes dans et par les institutions mathématiques. L'impact de leur genre se mêle à celui de leur origine sociale et/ou religieuse, de leurs positions politiques ou encore du domaine étudié dans les mathématiques, rendant leurs itinéraires professionnels d'autant plus sensibles au contexte économique, politique et historique. Leur statut marital a également limité institutionnellement leur accès à une carrière en mathématiques pendant plusieurs siècles, réduisant certaines d'entre elles au statut d'assistantes de leur conjoint mathématicien, et contribuant ainsi à les invisibiliser. La permanence de ce phénomène au travers des siècles tend à montrer la sensibilité des carrières de mathématiciennes à leur contexte conjugal et familial. Il ressort également des cas étudiés que les représentations de la mathématicienne, issues d'un long héritage de catégories multiformes, présentent des récurrences observées depuis au moins le XVII^{e} siècle, comme par exemple l'association entre mathématiques et masculinité. Cette association, toujours présente aujourd'hui, participe aux stéréotypes de genre associés aux mathématiques et à la mathématicienne, et est susceptible d'exclure les femmes des carrières mathématiques.

4. Conclusion

Ces études de cas, centrées pour une grande majorité sur l'époque contemporaine, montrent les transformations progressives des institutions d'enseignement supérieur et de recherche en Occident, dans le cas des mathématiques, ayant abouti à l'acceptation officielle des femmes dans ces institutions et à la reconnaissance de leurs travaux mathématiques. Au-delà de l'évolution des règlements institutionnels, elles montrent toute l'importance d'autres éléments favorisant ou freinant l'accès des femmes à ces établissements et honneurs académiques, comme les représentations sociales et culturelles des femmes et des mathématiques dans la société, la concurrence et les tensions au sein du marché du travail, le rôle des réseaux sociaux et savants, plus difficiles à constituer par les femmes à des périodes où les rapports avec les hommes sont fortement contraints, la valeur associée à certains postes d'enseignement ou de recherche, en fonction des lieux, des moments, des disciplines. Ces études suggèrent également toutes les stratégies individuelles et collectives mises en place pour contourner une domination masculine parfois exclusive de sphères scientifiques et sociales, et un effacement des pratiques et des acteurs considérés comme mineurs, invisibles. Bien entendu, il serait particulièrement enrichissant de compléter les travaux présentés et discutés durant cet atelier, par des études centrées sur d'autres aires géographiques et culturelles, comme la Chine, l'Inde, l'Afrique ou les Amériques afin d'identifier les récurrences et divergences dans les contraintes sociales, institutionnelles, les stéréotypes..., auxquels les mathématiciennes doivent faire face dans leurs itinéraires professionnels. De plus, une analyse plus systématique de la parole des femmes serait probablement révélatrice de l'effet de ces stéréotypes sur leur itinéraire en mathématiques (auto-censure, choix familiaux...).

Avec la question des femmes et des mathématiques, il est important de revenir sur deux points. D'une part, il nous semble fondamental de garder en tête que traiter cette question, d'un point de vue historique ou sociologique, impose d'éviter une lecture exclusivement genrée ou de sur-interpréter les productions ou influences de certaines mathématiciennes. Comme cela a déjà été souligné à plusieurs reprises dans le cas des femmes de sciences [19], les discriminations se déploient selon des critères multiples, et les facteurs intervenant dans les itinéraires de femmes en mathématiques ou dans la transformation des institutions sont là aussi nombreux. D'autre part, la spécificité des mathématiques est importante à analyser, du point de vue de leur nature et de leur place dans la société en général et dans l'enseignement en particulier. Dans le cas de la France par exemple, depuis la Révolution au moins, les mathématiques sont progressivement devenues une discipline de sélection, notamment pour l'entrée dans les grandes écoles, au sein d'un système d'enseignement le plus souvent présenté comme méritocratique. Cette méritocratie affichée a-t-elle des conséquences sur la place de certaines catégories de la population dont les femmes dans les institutions mathématiques en gommant de fait tous les mécanismes de discrimination et d'exclusion [11] ? Par ailleurs, quel(s) rôle(s) jouent les hiérarchies disciplinaires au sein des mathématiques dans les possibilités qu'ont les femmes d'obtenir des postes académiques ? Ce point a déjà été évoqué dans le cas de la théorie des nombres au XIX^{e} siècle ou des statistiques au XX^{e} siècle. De même, P. Govoni rappelle la simultanéité entre d'une part, la diminution importante de l'implication des femmes dans l'informatique et d'autre part, l'essor de ce domaine comme

19. Nous renvoyons à [1, 11] par exemple.

discipline universitaire et le développement d'une culture « nerd », masculine.

Bien sûr, si cela a été peu abordé dans ce qui précède, la question des sources est centrale dans les études sur les femmes en mathématiques. Tout d'abord, nous l'avons souligné, jusqu'à récemment, les femmes pratiquant les mathématiques évoluaient pour la plupart dans des sphères privées, anonymes, peu officielles. Dans ces cas, les sources se distinguent le plus souvent par leur invisibilité et l'historien.ne doit le plus souvent ne compter que sur l'aubaine d'archives privées conservées. Ensuite, dans les cas d'études biographiques, il est souvent plus difficile de reconstituer la production des femmes, qui publient généralement moins ou dans certains cas, publient sous un nom masculin. Enfin, dans le cas d'études prosopographiques, l'historien.ne est confronté.e à une difficulté supplémentaire pour suivre les itinéraires de femmes peu connues, dont le patronyme change souvent suite à un mariage. Ce constat rejoint plus généralement les difficultés rencontrées pour étudier historiquement les pratiques populaires ou les savoirs de certaines corporations de métiers dont la transmission s'appuie sur l'oral ou sur des écrits non publiés ou anonymes.

Pour finir, ces études sont fondamentales pour penser les sciences et les techniques dans nos sociétés actuelles. Elles donnent à voir des permanences et récurrences historiques et montrent qu'il est important de prendre en considération l'ensemble des facteurs en jeu, plus ou moins visibles, lorsqu'il s'agit de discuter la place des femmes dans les institutions actuelles d'enseignement et de recherche. Ces études permettent également de déconstruire les arguments de « naturalité » ou d'objectivité scientifique régulièrement proposés dans les débats actuels sur les capacités mathématiques des femmes : la question des biais dans la mise en place de dispositifs expérimentaux et de la flexibilité interprétative des résultats d'expériences a largement été discutée par les historiens et les sociologues de manière générale ou dans le cas des femmes en particulier. On ne peut en effet s'empêcher de dresser des parallèles entre certaines interprétations des travaux sur la phrénologie au XIX^{e} siècle et ceux sur les neurosciences aux XX^{e} et XXI^{e} siècles, lorsqu'il s'agit d'argumenter en faveur ou contre des compétences naturellement féminines ou masculines. Les possibilités d'utilisations concrètes de ces travaux pour agir sur la situation actuelle doivent encore être développées puisque, comme le souligne la tribune d'Indira Chatterji parue dans le volume de janvier 2018 de la *Gazette des Mathématiciens*, le plafond de verre ne semble pas sur le point de céder...

Références

[1] P. Bret. « Conclusion. Réintégrer les femmes dans la République des Sciences ». In : *Femmes de sciences de l'Antiquité au XIX^{e} siècle. Réalités et représentations*. Sous la dir. d'A. Gargnan et P. Bret. Dijon : Éditions universitaires de Dijon, 2014, p. 309–317.

[2] G. Fraisse et M. Perrot, éds. *Histoire des femmes en Occident. Tome 4 : Le XIX^{e} siècle*. Paris : Plon, 1991.

[3] D. Gardey. « Histoires de pionnières ». *Travail, genre et sociétés* **2**, n° 4 (2000), p. 29–34.

[4] E. Houzé-Robert. « La mémoire n'est pas neutre. Souvenirs de femmes à la Faculté des sciences et techniques de Nantes ». *Travail, genre et sociétés* **14**, n° 2 (2005), p. 109–128.

[5] N. Hulin. *Les Femmes, l'Enseignement et les Sciences. Un long cheminement (XIX^{e}-XX^{e} siècle)*. Paris : L'Harmattan, 2008.

[6] D. L. Lykknes Annette & Opitz and B. van Tiggelen, eds. *For Better or for Worse ? Collaborative Couples in the Sciences*. Heidelberg, New York & London: Birkhaüser, 2012.

[7] T. Morel. « Mathématiques et politiques scientifiques en Saxe (1765-1851). Institutions, acteurs, enseignements ». Thèse de doct. Université Bordeaux 1, 2013.

[8] O. M. Nikodym. *The Mathematical Apparatus for Quantum-Theories: Based on the Theory of Boolean Lattices*. New York: Springer-Verlag, 1966.

[9] D. L. Opitz, S. Bergwik, and B. van Tiggelen, eds. *Domesticity in the Making of Modern Science*. New York: Palgrave Macmillan, 2016.

[10] K. H. Parshall. "Training Women in Mathematical Research: The First Fifty Years of Bryn Mawr College (1885-1935)". *The Mathematical Intelligencer* **37**, no.2 (2015), pp. 71–83.

[11] D. Pestre. *Introduction aux Sciences Studies*. Paris : La Découverte, 2006.

[12] H. M. Pycior, N. G. Slack, and P. G. Abir-Am, eds. *Creative Couples in the Sciences*. New Brunswick (New Jersey): Rutgers University Press, 1996.

[13] R. Rogers, éd. *La Mixité dans l'éducation. Enjeux passés et présents*. Paris : ENS Éditions, 2004.

[14] M. W. Rossiter, ed. *Women Scientists in America. Struggles and Strategies to 1940*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1984.

[15] H. O. Sibum and L. Daston. "Introduction: Scientific *Personae* and Their Histories". *Science in Context* **16**, no.1-2 (2003), pp. 1–8.

[16] R. Tobies. *Aller Männerkultur zum Trotz*. 2e éd. Frankfurt : Campus Verlag, 2008.

[17] R. Tobies et H. (e. c. Gispert. « Femmes et mathématiques dans le monde occidental, un panorama historiographique ». *Gazette des mathématiciens* **90** (2001), p. 26–35.

Jenny Boucard

Centre François Viète d'épistémologie et d'histoire des sciences et des techniques (EA 1161), université de Nantes.

Jenny.Boucard@univ-nantes.fr

Jenny Boucard est maître de conférences en histoire des mathématiques à l'université de Nantes. Ses recherches portent principalement sur l'histoire de la théorie des nombres et la circulation des savoirs mathématiques via les journaux à l'époque contemporaine, et sur la notion d'ordre en sciences, philosophie et art au XIXe siècle.

Isabelle Lémonon

École des Hautes Études en Sciences Sociales & Centre Alexandre Koyré, Paris.

ilemonon@gmail.com

Isabelle Lémonon est doctorante de l'EHESS en histoire des sciences au Centre Alexandre Koyré. Ses recherches portent sur les représentations et les pratiques des femmes en science au XVIIIe siècle.

Nous remercions chaleureusement Caroline Ehrhardt et Jeanne Peiffer pour leurs remarques constructives sur la première version de notre travail ainsi que Christophe Eckes pour sa relecture finale.

… l'arbre modulaire de $SL_2(\mathbb{Z})$

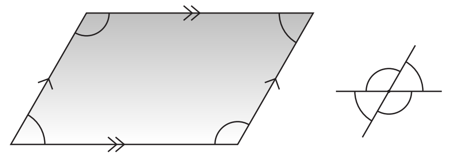
• F. DAHMANI

1. Les tores plats et leur espace

Dans un jeu de Pac-Man le joueur contrôle un personnage qui se déplace dans un écran rectangulaire. Dès qu'il atteint le côté haut, il se retrouve en bas, à la même abscisse, et dès qu'il atteint le côté droit, il se retrouve à gauche, à la même ordonnée. Autrement dit, il se déplace dans un rectangle dont les côtés opposés ont été identifiés. C'est un tore, qui de plus est plat : en tout point, localement, le personnage voit la géométrie euclidienne du plan (par exemple, la somme des angles d'un triangle y vaut π), y compris quand il se trouve en l'un des coins de l'écran, car ceux-ci se recollent en quatre quadrants dont la somme des angles donne bien 2π. Sur un écran parallélogramme, le résultat est similaire, l'espace de vie de Pac-Man est encore un tore plat (Fig. 1).

Peut-on, en changeant d'écran, décrire des mondes vraiment différents? Différents, cela signifie non isométriques. Pour que la question soit intéressante, il nous faut calibrer : l'aire du tore plat devra être égale à 1. La réponse est oui, le tore obtenu par identification des côtés d'un carré unité est bien différent de celui obtenu d'un rectangle de largeur $\frac{1}{100}$ (et longueur 100). Dans ce dernier, il existe un chemin droit qui revient à son départ après n'avoir parcouru qu'une distance de $\frac{1}{100}$.

FIGURE 1 – Un parallélogramme aux côtés identifiés. À droite, une vue des quatre secteurs angulaires qui se recollent.



Comment alors décrire l'espace de ces mondes? D'abord éclaircissons les correspondances. À un parallélogramme donné, on associe un tore plat, ce dernier ne dépend que de la classe d'isométrie du premier. Le parallélogramme donne un repère particulier sur le tore : l'image de ses côtés. On dit que le tore est marqué. Au parallélogramme, on peut aussi associer un réseau euclidien, le sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ engendré par ses vecteurs côtés. La classe d'isométrie du parallélogramme détermine le réseau à isométrie vectorielle près. Ces réseaux sont munis d'une base, ce qui est plus d'information que le seul réseau. On dit que les réseaux, eux aussi, sont marqués. Maintenant, étant donné un réseau marqué, sa base nous indique un parallélogramme. Finalement, grâce à son revêtement universel, un tore plat marqué permet de retrouver un réseau, par l'action duquel il est le quotient de $\mathbb{R}^2$.

On a donc une correspondance entre les trois espaces :

les parallélogrammes de $\mathbb{R}^2$ à isométrie près;
les tores plats marqués à isométrie près;
les réseaux marqués de $\mathbb{R}^2$ à isométrie de $\mathbb{R}^2$ près.

2. Le plan hyperbolique

D'un parallélogramme (non dégénéré), retenons les deux vecteurs côtés, sous la forme de deux nombres complexes ω_1, et ω_2, dans l'ordre qui fait que le rapport $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ soit de partie imaginaire strictement positive. Déformons le parallélogramme, et ce rapport change continûment. Réciproquement, si $Im(z) > 0$, nous pouvons créer des parallélogrammes réalisant z comme rapport, et d'aire 1 : par exemple celui donné par le couple $(\frac{z}{\sqrt{Im(z)}}, \frac{1}{\sqrt{Im(z)}})$. Les autres lui sont similaires, donc isométriques si leur aire vaut 1.

Pour $z = i$ nous avons un carré, mais pour

$z = 10000 \times i$, nous avons un rectangle très effilé. Pour z de module 1 nous avons un losange. Par cette application, qui à un parallélogramme associe un nombre complexe, l'espace des parallélogrammes d'aire 1, à isométrie près, est ainsi homéomorphe au demi-plan des complexes de partie imaginaire strictement positive. Ce dernier espace est le célèbre demi-plan supérieur de Poincaré, je vais le noter $\mathbb{H}^2$.

Il est muni d'une action de $SL_2(\mathbb{R})$, une action donc sur l'espace des parallélogrammes, ou sur l'espace des réseaux, que l'on va décrire.

Zoom sur l'action de $SL_2(\mathbb{R})$.

Prenons, comme avant, un parallélogramme dont les vecteurs côtés sont les nombres complexes ω_1, ω_2. Formons le vecteur complexe $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$. Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ permet d'envoyer ce vecteur sur $\begin{pmatrix} a\omega_1 + b\omega_2 \\ c\omega_1 + d\omega_2 \end{pmatrix}$, qui définit un autre parallélogramme. Le rapport des deux nombres vaut

$$\frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2} + b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d}$$

et ne dépend que de la classe de similitude du premier parallélogramme et de la matrice. Cela définit en fait une action de $SL_2(\mathbb{R})$.

Traduite dans le demi-plan $\mathbb{H}^2$, cette action s'exprime simplement par la formule des homographies. Il suffit de prendre le parallélogramme ($\omega_1 = z, \omega_2 = 1$) comme repésentant de z, pour voir que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Le sous-groupe SO_2 des rotations de $SL_2(\mathbb{R})$ préserve la classe de similitude du carré, et donc fixe $i \in \mathbb{H}^2$. Mais il ne fixe pas $i+1$, qui lui est fixé par le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ préservant une autre forme quadratique.

Par ailleurs, deux nombres complexes ω_1, ω_2 définissant un parallélogramme non dégénéré permettent d'engendrer un réseau $\{n\omega_1 + k\omega_2, n, k \in \mathbb{Z}\}$ qui est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$. Changer de base de ce réseau ne change pas le réseau. Autrement dit, si $M \in SL_2(\mathbb{Z})$, l'image de $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ par M donne $\begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}$ qui définit un parallélogramme (ω'_1, ω'_2), qui est peut-être non similaire au premier, mais qui engendre bien le même réseau.

Long story short, la bonne action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}^2$ est par homographies $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z = \frac{az+b}{cz+d}$.

Cette action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}^2$ préserve la métrique de Poincaré : la longueur des chemins en est l'intégrale de la forme de longueur

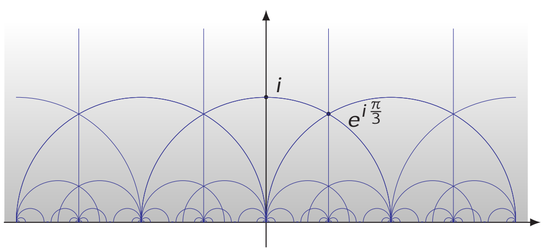
$$ds(z)_{z=x+iy} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

On pourrait dire que plus on est haut, en partie imaginaire, plus il est facile de se mouvoir dans $\mathbb{H}^2$ (Fig. 2).

Cette métrique est formidable : sa courbure de Gauss est constante égale à -1, l'aire des triangles, et la somme de leurs angles, y sont toujours strictement inférieures à π, ce qui fait de $\mathbb{H}^2$ un modèle de plan non euclidien, de plan hyperbolique. Particularité, si l'on voyage dans ce plan, sans faire de demi-tour radical, on s'éloigne résolument de son point de départ. Voici un énoncé vrai dans $\mathbb{H}^2$ mais faux dans le plan eucliden : tout chemin polygonal dont les côtés sont assez longs (d'au moins $\ln(3)$), et les angles supérieurs à $2\pi/3$, est injectif.

Dans cette géométrie, les classes familières de matrices prennent un sens agréable. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ préserve les lignes horizontales, en translatant par $(z \mapsto z+1)$. Les lignes horizontales ne sont pas droites pour la métrique hyperbolique, cette transformation est plutôt une rotation dont le centre est à l'infini, tout là-haut. Une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$, quant à elle, préservera une vraie ligne géodésique, en induisant une translation dessus.

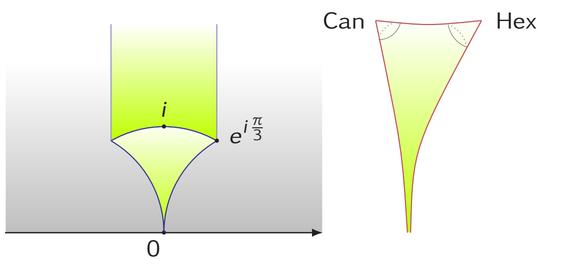
Figure 2 – Des géodésiques dans le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$. Toutes celles-ci sont dans la même orbite pour l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$.



3. La courbe modulaire

Mais ce n'était pas notre objectif : nous voulions paramétrer l'espace des tores plats, et pas l'espace des tores plats marqués d'un repère. Il nous faut quotienter $\mathbb{H}^2$ par l'opération de changement de base du réseau $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, c'est-à-dire, il nous faut considérer $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^2$. Ce quotient est aussi suffisant : deux tores plats marqués, s'ils sont isométriques en oubliant le marquage, sont images l'un de l'autre par un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$. Ce quotient, c'est ce qu'on appelle la courbe (ou surface) modulaire (Fig. 3).

Figure 3 – À gauche, un domaine fondamental de l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}^2$, et son image par la rotation hyperbolique d'angle π autour de i (d'expression $(z\mapsto -1/z)$). Les deux arcs de longueur (euclidienne) $\pi/6$ autour de i sont identifiés au quotient. Les deux arcs partant vers 0 dans le domaine fondamental sont aussi identifiés, par $(z\mapsto z/(1+z))$. À droite, le quotient de $\mathbb{H}^2$ par l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$, avec une pointe partant à l'infini (correspondant à des réseaux de plus en plus éffilés) et deux points singuliers correspondant au réseau carré canonique (c'est l'image de i, l'angle autour de ce point vaut π) et au réseau hexagonal (c'est l'image de $e^{i\pi/3}$, l'angle autour de ce point est $2\pi/3$).



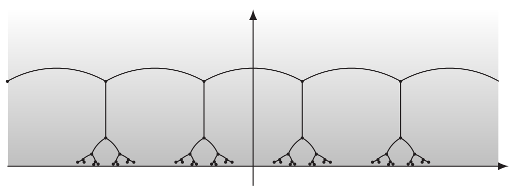
Riemann avait montré dès 1857 [4] que l'espace des tores plats était de dimension complexe 1. L'identification plus fine de Poincaré date de 1884 [2] (voir les notes historiques de [3, §9.9]).

Cette surface courbe possède deux points particuliers, images de i et de $e^{i\pi/3}$. En effet ces deux points ont des stabilisateurs dans $SL_2(\mathbb{Z})$ strictement plus grands que le noyau de l'action (qui vaut $\{\pm Id\}$), et qui sont respectivement engendrés par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ils correspondent à des réseaux avec symétries intéressantes : un réseau carré, et un réseau hexagonal. La surface modulaire possède aussi une pointe s'affinant à l'infini, qui correspond à une suite de parallélogrammes de plus en plus effilés.

4. L'arbre modulaire

L'arc entre les deux points singuliers retient l'attention. Sa longueur (hyperbolique) vaut $\ln(3)/2$. C'est l'image de l'arc du cercle unité, entre i et $e^{i\pi/3}$. Mais lorsqu'on prend sa préimage totale dans $\mathbb{H}^2$, c'est une famille d'arcs de longueur $\ln(3)/2$, formant un graphe dont les angles consécutifs sont soit π, soit $\pm 2\pi/3$. Comme ces angles ne permettent pas de revenir en arrière à cause de la géométrie hyperbolique, c'est un arbre : un graphe connexe qui n'a pas de cycle. $SL_2(\mathbb{Z})$ agit sur cet arbre, qu'on veut alors appeler l'arbre modulaire. Lorsqu'on se promène dessus, on parcourt un chemin parmi des réseaux qui restent toujours épais, sans « petit » vecteur.

Figure 4 – L'arbre de $SL_2(\mathbb{Z})$ dans le demi-plan de Poincaré (quelques arêtes).



Comme J.-P. Serre nous l'a enseigné [5], une telle observation, qu'il agit dans un arbre, a des conséquences éclairantes pour $SL_2(\mathbb{Z})$! Il s'agit presque d'un groupe libre, car la topologie, répondant en une ligne à une question philosophique profonde, nous dit qu'être libre c'est agir sur un arbre sans qu'aucun point n'ait de stabilisateur. Ici, les points ont des stabilisateurs, mais ils sont finis (d'ordre 2, 4, ou 6) Il s'agit en fait d'un produit amalgamé

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

qui possède un sous-groupe libre d'indice fini.

Les éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$, que bien sûr l'on comprend sans peine au sein de $SL_2(\mathbb{R})$, prennent une signification géométrique nouvelle : certains fixent un point de l'arbre (ils sont conjugués à une symétrie du réseau carré ou de celui hexagonal), d'autres non, ils préservent alors une unique ligne de l'arbre, déterminée par, disons, un point et une suite périodique d'instructions de virages (gauche/droite). Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ préserve la ligne presqu'horizontale des arcs de cercles (tous ses virages sont à gauche). Quant à elle, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ préserve une ligne dont les virages sont alternativement gauche et droite.

Il devient facile de savoir quand deux éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$ sont conjugués au sein de ce groupe (alors qu'on ne réduit pas les matrices dans $\mathbb{Z}$ comme dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), avec malgré tout l'ambiguïté du noyau de l'action, le sous groupe $\{\pm Id\}$ qui est central. Les seules classes de conjugaison d'éléments d'ordres finis sont celles des six éléments fixant $e^{i\pi/3}$ et des quatre fixant i. Pour les éléments d'ordre infini, leur classe de conjugaison (modulo $\{\pm Id\}$) est déterminée par la suite cyclique d'orientations de virages de sa ligne préservée, entre deux points consécutifs de leur orbite. (Cette suite est d'ailleurs donnée par la suite d'opérations dans le pivot de Gauss pour réduire la matrice).

Par exemple, bien que conjuguées dans $SL_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ne le sont pas dans $SL_2(\mathbb{Z})$, leurs axes ont des suites de virages différents (six fois gauche puis droite, contre trois fois droite puis deux fois gauche).

4.1 – D'autres situations

Il est bien légitime d'envisager des situations analogues. Plusieurs pistes s'ouvrent à nous. N'en choisissons qu'une, que nous suggère la classification des surfaces topologiques compactes : restons en dimension 2, et remplaçons le tore par une surface (compacte orientable) Σ de genre $g \geqslant 2$, une sphère chirurgisée de g anses.

L'ecran du jeu de Pac-Man est alors $(4g)$-gonal avec un système d'identification des côtés, deux par deux. Coup de théâtre, la géométrie du plan hyperbolique ici encore nous aide, mais bien différemment cette fois. Elle nous permet de trouver de tels $(4g)$-gones adaptés en son sein, dont la somme des angles internes vaut 2π. Ceux-là permettent d'uniformiser notre surface de sorte que, localement, sa géométrie soit celle du plan hyperbolique.

Σ est alors un quotient du demi-plan $\mathbb{H}^2$ par un réseau d'isométries hyperbolique, qui dessine un pavage par des $4g$-gones. Ce réseau est un sous-groupe discret d'isométries de $\mathbb{H}^2$, isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(\Sigma)$.

Comme avant, on veut comprendre l'espace de ces réseaux, l'espace des déformations de la surface. Nous avons des générateurs privilégiés du groupe fondamental de Σ, et l'espace de ces réseaux hyperboliques marqués par ces générateurs est alors un modèle de l'espace de Teichmüller.

Quelle est sa dimension ? Si l'on découpe Σ en « pantalons » on a $(3g-3)$ courbes d'ourlet, dont on peut prescrire la longueur, et autant de mesures de « twists » pour décrire les recollements entre ces ourlets. Ce sont les coordonnées de Fenchel-Nielsen. Cela témoigne de $6g-6$ degrés de liberté, et en effet, l'espace de Teichmüller est homéomorphe à un boule ouverte de dimension $6g-6$.

Riemann déjà avait compris en 1857 que l'espace des surfaces homéomorphes à Σ et ainsi uniformisées pouvait être localement paramétré par $(3g-3)$ coordonnées complexes, qu'il appelait *modules* [4]. La terminologie du groupe modulaire, de la courbe modulaire, vient de là.

Le groupe modulaire de Σ, $Mod(\Sigma)$, justement, analogue de $SL_2(\mathbb{Z})$, est le groupe d'automorphismes extérieurs du réseau $\pi_1(\Sigma)$ qui préserve l'orientation du bord du $4g$-gone. Il agit sur l'espace des déformations de la surface, et transforme les marquages par pré-composition. Il est isomorphe au groupe des composantes connexes du groupe des difféomorphismes de Σ. Pour obtenir l'espace des surfaces hyperboliques de genre g, il s'agit de quotienter l'espace de Teichmüller par ce groupe modulaire de Σ. C'est la courbe modulaire, celle de Σ cette fois. Pour le géomètre, l'espace de Teichmüller n'est pas juste une boule, mais, comme le demi-plan de Poincaré, doit être muni d'une métrique invariante pour l'action du groupe modulaire. Et là, c'est l'embarras du choix ! Teichmüller, Thurston, Weil-Petersson...

Quoi qu'on choisisse, l'espace de Teichmüller ne procure pas directement de géométrie à courbure négative, si utile à l'étude des groupes. Il en porte pourtant certains signes. Si, comme dans l'arbre modulaire de $SL_2(\mathbb{Z})$, on ne parcourt que la région de l'espace de Teichmüller correspondant aux seules surfaces sans petite courbe fermée, on peut attentivement percevoir ces signes. Un espace est souvent évoqué par les géomètres des groupes comme l'analogue de l'arbre modulaire, ou plutôt d'une construction dite d'électrification sur celui-ci, c'est le complexe des courbes de Σ. Lui est hyperbolique ! Au sens de Gromov toutefois, c'est-à-dire dans un sens adapté à la géométrie des graphes, qui doit être vue à grande échelle, et grossièrement, plutôt que localement, et finement. Cela, on le sait depuis les années 2000, par les travaux de Masur et Minsky, et depuis bien d'autres. Cette hyperbolicité nous renseigne sur la dynamique et la géométrie des éléments pseudo-Anosov du groupe modulaire (cf.

« *Raconte-moi un pseudo-Anosov* » d'E. Lanneau [1]). Bien plus récemment, M. Bestvina, K. Bromberg et K. Fujiwara ont trouvé qu'il existait plusieurs espaces hyperboliques similaires dont le produit cartésien contient toute la géométrie du groupe modulaire de Σ et non plus seulement une seule partie dite épaisse. Ils les construisent à l'aide de « quasi-arbres ».

Si les actions de groupes sur les arbres donnent une structure et des outils épatants, les quasi-arbres sont plus délicats à manipuler. On peut, dans de bonnes circonstances, en tirer bien des choses, y compris, selon des travaux récents, au sujet du problème de conjugaison, mais il existe d'étranges groupes qui agissent sur des quasi-arbres.

Références

[1] E. Lanneau. « Raconte moi un pseudo-Anosov ». *Gazette des Mathématiciens*, nº 151 (2017).

[2] H. Poincaré. « Sur les groupes des équations linéaires ». *Acta mathematica* **4**, nº 1 (1884), p. 201–312.

[3] J. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*. **149**. Springer Science, 2006.

[4] B. Riemann. *Theorie der Abel'schen Functionen*. **4**. J. Reine Angew. Math, 1857, p. 115–155.

[5] J.-P. Serre. *Arbres, amalgames, SL_2*. **46**. Société Mathématique de France, 1983.

François Dahmani

Université Grenoble Alpes

francois.dahmani@univ-grenoble-alpes.fr

François Dahmani est professeur à l'université Grenoble Alpes, à l'Institut Fourier. Ses travaux portent sur la théorie géométrique des groupes.

L'auteur remercie Roland Bacher, Anne Parreau, Pierre Will, et le relecteur anonyme.

À propos de la candidature de la France (Paris) à l'ICM 2022

• M. Ledoux

Dans son vote du 29 juillet 2018 à São Paulo, quelques jours avant le congrès de Rio, l'Assemblée Générale des délégués nationaux de l'International Mathematical Union (IMU) a retenu la candidature de la ville de Saint-Pétersbourg, devant celle de Paris, pour l'organisation de l'International Congress of Mathematicians (ICM) 2022.

Les délégués français de l'assemblée générale de l'IMU sont désignés parmi le Comité National Français de Mathématiciens (CNFM), qui représente la France au sein de l'IMU et a été porteur de la candidature française à l'ICM. Le dossier de candidature lui-même a été élaboré par le comité d'organisation de la candidature ICM Paris 2022 (composé en partie de membres du CNFM), qui, après de longs mois de préparation, l'a déposé auprès de l'IMU en novembre 2016 (dossier rendu public plus tard sur le site ICM Paris 2022), un bel et enthousiasmant projet porté par l'ensemble de la communauté mathématique française. Dans le même temps, la Russie a présenté la candidature de Saint-Pétersbourg. La France avait déclaré son intention de se présenter dès le congrès de Séoul en 2014, aucune autre nation n'ayant à ce moment-là fait acte de candidature (le projet russe n'a émergé qu'à l'automne 2014).

Le Comité Exécutif de l'IMU [1] a entrepris l'étude des dossiers. En particulier, un comité de visite de site, sous-commission du comité exécutif, s'est rendu dans les deux villes en mars 2017 pour examiner et évaluer les candidatures. Cette visite étudie notamment les aspects techniques liés à l'organisation d'un congrès de cette importance. À l'issue de cet examen, le comité exécutif de l'IMU s'est réuni début avril 2017 et a recommandé le choix de Saint-Pétersbourg pour l'ICM 2022. Cette décision s'est faite à l'unanimité du comité moins deux abstentions motivées pour cause de conflit d'intérêt (S. Mori et W. Werner qui n'ont pas pris part à la discussion).

À la demande d'informations quant aux critères ayant présidé à cette recommandation, le comité a précisé que la décision a été prise après une longue discussion basée sur les dossiers de candidatures et les conclusions des visites de sites. Parmi les critères utilisés :

- le professionnalisme du dossier et du comité d'organisation du congrès et de l'assemblée générale ;
- la communauté mathématique soutenant la candidature ;
- l'impact à long terme sur la communauté mathématique nationale hébergeant le congrès ;
- le soutien aux mathématiciens des pays émergeants ;
- l'impact potentiel sur la communauté mathématique internationale ;
- l'organisation pratique du congrès et de l'assemblée générale, en particulier le centre de conférence, l'hébergement des participants, les transports, les questions de visa, les activités culturelles et sociales.

Le comité a mentionné en outre que les dossiers de candidature de la France et de la Russie avaient plusieurs traits de ressemblance, avec dans les deux cas une longue et forte tradition mathématique et un soutien indéfectible de la communauté nationale. Les deux projets étaient de grande qualité, et l'accueil du comité de visite dans les deux villes a eu lieu dans les meilleures conditions. Il a aussi été noté

1. Le comité exécutif de l'IMU, pour la période 2015-2018, est composé de S. Mori (Président), H. Holden (Secrétaire Général), A. Dickenstein, V. Jones (Vice-Présidents), B. Gross, H. Park, C. Rousseau, V. Srinivas, J. Toland, W. Werner.

que 2022 constituerait pour la France un quatrième congrès, fait sans précédent [2], contre un seul pour la Russie (Moscou 1966), et que la choix de Saint-Pétersbourg aurait un impact significatif sur les mathématiques russes. En conclusion, le choix de la Russie ne devait pas être vu comme un désaveu de la candidature française, mais comme une preuve que l'IMU avait reçu deux excellentes candidatures.

Le travail du comité exécutif de l'IMU, composé de personnalités scientifiques incontestables, a pour but de préparer et d'éclairer le choix de l'assemblée générale en analysant les critères et la faisabilité d'un ICM de manière la plus sérieuse et éthique possible, au service de la communauté. Le comité ne fait que proposer une recommandation, la décision finale relevant du vote souverain de l'assemblée générale de l'IMU (qui a donc eu lieu pour cette édition à São Paulo le 29 juillet 2018) ; une discussion de fond sur les critères et la faisabilité d'un ICM lors d'une assemblée générale apparaissant toutefois comme difficile et peu réaliste.

Suivant une tradition bien établie depuis 1994, toutes les candidatures qui n'ont pas été recommandées au préalable par le comité exécutif de l'IMU se sont retirées (ainsi qu'il en est fait état dans les comptes rendus des assemblées générales des congrès passés, en ligne sur le site de l'IMU), afin, d'une part, de donner une année supplémentaire au pays organisateur dans ses préparatifs, nécessaire pour un événement de cette ampleur (M. Viana, président du comité d'organisation de l'ICM 2018 à Rio, a indiqué que les préparatifs avaient duré six ans), et, d'autre part, d'éviter une compétition inutile et préjudiciable à la communauté mathématique internationale. Le comité exécutif de l'IMU a ainsi demandé à la France, suite à la recommandation d'avril 2017, de retirer sa candidature.

Le comité ICM Paris 2022 a souhaité maintenir la candidature française. J'ai quitté, dans les semaines qui ont suivi, le comité, convaincu que la poursuite du projet français, voulue par le comité, était une erreur et un déni de réalité. Engageant un rapport de force avec les instances de l'IMU pour essayer ensuite d'en sortir par le haut, elle risquait d'être mal perçue par la communauté mathématique internationale, un vote des délégués à l'encontre de l'avis du comité exécutif de l'IMU apparaissant par ailleurs comme fort peu probable. Dans ses propositions et initiatives, le comité de candidature a aussi eu tendance à confondre le rôle de l'organisation matérielle avec celui du comité de programme, qui doit concevoir le contenu du congrès et est souverain pour décider de toutes les activités qui ont lieu dans le cadre de l'ICM.

Afin d'assurer la gestion de la logistique d'un tel événement, le comité de candidature ICM Paris 2022 a signé, au nom du CNFM et en date du 22 janvier 2015, un contrat de prestation avec un organisateur de congrès professionnel pour, à la fois, la préparation de la candidature dans ses divers aspects, médiatiques notamment, en amont de la décision de l'IMU, et l'organisation matérielle et technique une fois le projet retenu. Dans cette démarche, le comité (j'en faisais alors partie) s'est engagé de façon quelque peu imprudente, sans un examen approfondi des processus décisionnels passés de l'IMU et sans garanties financières très assurées, sur une clause résiliatoire du contrat en cas d'abandon à hauteur de 150 k€. Cet élément a joué dans le maintien de la candidature française.

Si des voix éminentes ont exprimé leur solidarité avec la candidature de Paris, plusieurs personnalités de tout premier plan, en France et de par le monde, dont certains membres du conseil scientifique de ICM Paris 2022, ont préconisé de suivre l'invitation du comité exécutif de l'IMU et de retirer le dossier. Des aménagements financiers, comme par exemple une répartition de la charge entre les tutelles et les soutiens institutionnels, voire un accord implicite avec le comité exécutif de l'IMU, auraient pu être envisagés.

Dans un communiqué du 3 juillet 2017 [3], les sociétés savantes, l'INSMI du CNRS, l'INRIA et les fondations et LabEx mathématiques parisiens ont déclaré « être persuadés du bien-fondé de la démarche du comité ICM Paris 2022 et soutenir la candidature » (en recommandant au comité l'élargissement de sa collaboration à l'ensemble des acteurs du projet et le « développement d'une communication permettant, dans un esprit de saine compétition et de retenue, d'emporter l'adhésion lors de l'assemblée générale, et offrant la meilleure perception des ambitions scientifiques et organisationnelles de la candidature

2. Le calcul de l'IMU est maladroit, puisqu'il comptabilise, outre 1900 (Paris) et 1970 (Nice), le congrès de Strasbourg en 1920 qui a exclu, pour des raisons politiques faisant suite à la Première Guerre Mondiale, les communautés mathématiques des « empires centraux » d'Europe, dont l'Allemagne.

3. http://smf.emath.fr/sites/smf.emath.fr/files/communique-3-7-17.pdf

de Paris »). Le cnfm ne figure pas officiellement parmi les signataires de cette déclaration.

La candidature française a ainsi été présentée, et comme cela était prévisible défaite (83 votes contre 63), lors de l'assemblée générale de São Paulo. Cette élection entre deux nations concurrentes a constitué une première dans les annales des icm.

Précisions et excuses d'Anne Bertrand au sujet de son témoignage publié dans la *Gazette* 157

J'ai écrit un petit texte dans le numéro 157 de la *Gazette* au sujet des classes préparatoires dans lequel figurait un passage sur une collègue professeure en classes préparatoires qui venait d'obtenir une math spé pour laquelle elle était tout à fait qualifiée. L'un de ses collègues lui a aussitôt déclaré : « tu as eu une math spé parce que tu as couché avec l'inspecteur général » ; et mon commentaire était : « l'inspecteur général c'était Jean Moussa, quelle hypothèse absurde ! ». L'un de mes collègues m'a fait remarquer que ce dernier pourrait se sentir blessé par cette remarque et, hélas, il a eu raison, Jean Moussa s'est ému de cette phrase. Alors soyons très clairs : Jean Moussa n'a jamais, jamais, eu le moindre comportement déplacé vis-à-vis d'une femme (ou de qui que ce soit d'ailleurs) et je lui présente toutes mes excuses ainsi qu'à ses proches ! J'ajoute que j'ai évoqué son nom pour la raison suivante : les femmes professeures en classes préparatoires se sont très souvent vu vilipendées par leurs collègues masculins, certains allant jusqu'à les dénigrer devant des élèves, et l'idée qu'ils promouvaient était qu'évidemment elles n'avaient pas les qualités nécessaires pour le job. Parler de Jean Moussa c'était dans mon esprit démontrer mathématiquement que la proposition « tu as eu une spé parce que tu as couché avec l'Inspecteur » était fausse, parce que, voyez-vous, j'ai bien connu Jean lorsqu'il présidait le concours du Capès – un très remarquable Président, très soucieux de l'équité entre les candidats – et tous ceux qui le connaissent savent qu'il n'a jamais eu la moindre attitude équivoque avec les femmes. Le collègue précité m'a fait remarquer qu'il y a sans doute des gens qui ne connaissent pas Jean Moussa, peut être a-t-il raison, aussi j'espère qu'il voudra bien me pardonner !

Un bilan de la candidature de Paris à l'organisation d'ICM 2022 après le vote de l'assemblée générale de l'IMU

Par 83 voix contre 63 et 4 abstentions, l'assemblée générale de l'IMU réunie à São Paulo le 29 juillet 2018 a décidé d'attribuer l'organisation d'ICM 2022 à la ville de Saint-Pétersbourg plutôt qu'à Paris.

La présentation orale du projet français avait été effectuée par Maria J. Esteban et François Loeser. Le projet russe avait été présenté par Stanislas Smirnov et Arkady Dvorkovich (vice-premier ministre de Russie de 2012 à mai 2018 et président du comité d'organisation de la dernière Coupe du monde de football).

En préalable au vote, le comité exécutif de l'IMU a salué le professionnalisme et la grande qualité des deux candidatures. Il a également rappelé sa recommandation d'avril 2017 en faveur de Saint-Pétersbourg suite à l'avis du comité de visite des deux sites. Les principales raisons invoquées ont été les suivantes :

– la France avait déjà accueilli trois ICM par le passé, contre une seule édition en Russie/URSS ;
– l'ICM en Russie devrait avoir un impact positif fort pour l'école mathématique russe ;
– le budget russe de 9 millions de dollars permettrait d'offrir de meilleures prestations aux participants et davantage de bourses aux jeunes chercheurs de pays en développement que le budget français de 3,4 millions d'euros ;
– l'implication directe du pouvoir politique russe dans le comité d'organisation devrait garantir le succès du congrès.

En juillet 2017, en connaissance de la recommandation du comité exécutif de l'IMU, nos soutiens institutionnels nous ont donné mission de poursuivre la candidature de Paris jusqu'à son terme comme les statuts de l'IMU en laissent la possibilité : on trouvera aux adresses

`smai.emath.fr/IMG/pdf/communique-3-7-17.pdf`

`smf.emath.fr/files/communique-3-7-17.pdf`

le compte rendu de la réunion à laquelle ont participé le directeur de l'INSMI, le PDG d'INRIA, les directeurs des Labex Bézout et Carmin, les présidents de la SFdS, de la SMF et de la SMAI, les directeurs d'AMIES, de la FMJH et de la FSMP, et le comité de candidature.

Début 2018 nous avons également reçu sous formes écrite et vidéo un soutien appuyé du Président de la République.

Il a paru important à tous ces acteurs de continuer de porter un projet d'ICM ouvert sur les nouveaux horizons des mathématiques, les autres sciences, la société, l'industrie, avec un budget raisonnable qui ne limite pas les futures candidatures aux très grandes puissances économiques.

Nous sommes donc fiers d'avoir soumis notre projet au vote démocratique de nos collègues de l'Assemblée Générale de l'IMU. Nous sommes convaincus que nos idées-phare d'actions originales en direction des collègues des pays en voie de développement, du grand public, des chercheurs et ingénieurs travaillant dans l'industrie et les nouvelles technologies, ainsi que les valeurs d'échange et d'ouverture que nous avons mises en avant seront reprises par d'autres.

L'ensemble du dossier de candidature reste consultable sur le site `https://www.icm2022-paris.com/`

Nous remercions vivement l'ensemble de nos soutiens et partenaires qui nous ont encouragés et aidés à développer un projet fort, rassembleur et novateur pendant ces cinq dernières années :

– les soutiens institutionnels : le Président de la République, la Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, la Présidente de la région Île-de-France, la Maire de Paris, le président du MEDEF ;
– nos grands organismes de recherche : CNRS, INRIA ;
– nos sociétés savantes : SFdS, SMAI, SMF ;

– les nombreuses sociétés savantes mathématiques étrangères qui ont soutenu la candidature de Paris jusqu'au vote final ;
– le ministre de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation du Sénégal ;
– les membres de notre comité de parrainage international ;
– les grandes entreprises qui ont constitué notre premier cercle de futurs sponsors du congrès : Bentley, Dassault Systèmes, EDF, Gemalto, General Electric, Natixis, RTE, Saint–Gobain, Scor, Total ;
– les fondations et labex FSMP, FMJH, AMIES, Bézout, Carmin ;
– l'IHP ;
– l'université de Strasbourg qui était volontaire pour accueillir la prochaine assemblée générale de l'IMU.

Enfin, nous remercions chaleureusement Philippe Fournier et Bruna Bertolini de la société MCI France qui nous ont fait bénéficier de leur expérience d'organisation d'événements et ont partagé notre enthousiasme.

Le comité de candidature : Sylvie Benzoni-Gavage, Stéphane Cordier, Maria J. Esteban, Étienne Gouin, Philippe Helluy, François Loeser (président du comité), Roger Mansuy, Ariane Mézard, Anne Philippe, Bertrand Rémy, Denis Talay.

Rapport sur les sessions du CNU 25 pour l'année 2017

Préambule

Le Bureau de la section 25 du CNU est composé comme suit.

– Président : Philippe Briet, université de Toulon.
– 1er vice-président : David Hernandez, université Paris Diderot.
– Assesseur : Caroline Gruson, université de Lorraine.
– 2e vice-président : Olivier Ruatta, université de Limoges.
– Assesseurs : Isabelle Liousse, université Lille 1 ; Gioia Vago, université de Dijon.

1. Le suivi de carrière

On rappelle que la section 25 avait adopté la position suivante pour l'année 2016 : « *La section 25 du CNU se joint à la CP-CNU pour demander à ce que la "session suivi de carrière" inscrite au calendrier 2016 du CNU soit repoussée, tant que les objectifs de cette session ne sont pas explicités. La 25e section du CNU s'oppose à ce que soit instauré un examen systématique des dossiers de suivi de carrière des enseignants-chercheurs dont les buts ne seraient pas précis.* »

Les bureaux des sections 25 et 26 se sont réunis le 12 janvier 2017 pour définir une position commune des sections de Mathématiques sur le suivi de carrière. Il est ressorti de cette discussion que l'ensemble des deux sections 25 et 26 (titulaires et suppléants) serait consulté par voie électronique de manière anonyme sous la forme d'un scrutin majoritaire à deux tours sur les propositions suivantes.

– Option 0 : les sections CNU 25 et 26 mettent en place le SDC sans réserve.
– Option 1 : les sections CNU 25 et 26 acceptent d'expérimenter le SDC en 2017 sur la base du texte voté par l'AG de la CP-CNU en juin 2016 et dresseront un bilan à l'issue de cette expérimentation.
– Option 2 : les sections CNU 25 et 26 acceptent de mettre en place le SDC pour les collègues explicitement volontaires. Les autres collègues recevront un avis neutre. Les avis transmis aux établissements seront identiques et neutres pour tous les collègues.
– Option 3 : les sections CNU 25 et 26 ne feront pas le SDC tant que ses objectifs ne seront pas précisés et que des garanties suffisantes, sur la non-utilisation pour la modulation de service notamment, ne seront pas données.

Le 1er tour a eu lieu du 10 février au 20 février. 175 collègues se sont exprimés sur 191. Les résultats du vote sont :

– Option 0 : 4 voix ; Option 1 : 22 voix ; Option 2 : 18 voix ; Option 3 : 130 voix.

La proposition 3 ayant obtenu 130 voix, soit environ 75% des voix, dès le premier tour, les sections du CNU 25 et 26 n'ont pas mis en place le suivi de carrière en 2017. Cette position sera revue en 2018 en fonction des évolutions futures.

2. Les qualifications

Pour 2017 la procédure de qualification est la même que celle des années antérieures, des modifications importantes se feront en 2018 avec l'introduction de la dématérialisation. Les critères de qualification 2017 utilisés par la section sont identiques à ceux de 2016 [1].

2.1 – Qualifications aux fonctions de Maître de conférences

Il y avait 259 candidats à la qualification aux fonctions de MCF, dont 37 femmes. Nous avons examiné 230 dossiers. 203 candidats ont été qualifiés, 22 candidats ont été déclarés hors section, et 5 n'ont pas été qualifiés.

Il faut noter une baisse significative du nombre de candidats à la qualification MCF par rapport à 2016 : 259 candidats à la qualification MCF en 2017, contre 345 en 2016. Le nombre de candidates était de 58 en 2016, soit 17% environ de l'effectif total, et de 37 en 2017, soit 15%.

2.2 – Qualification aux fonctions de Professeur

Le nombre de candidats à la qualification aux fonctions de Professeur était de 98, dont 17 femmes. Le nombre de dossiers examinés était de 88. 82 candidats ont été qualifiés, 3 candidats ont été jugés hors section et 3 candidats n'ont pas été qualifiés.

Nous constatons une légère augmentation du nombre de candidats à la qualification Professeur par rapport à 2016 : 98 en 2017, contre 88 en 2016. Le nombre de candidates évolue dans le même sens : 8 candidates sur 88 candidats soit environ 10%, alors qu'en 2017 ce rapport passe à 17%.

3. Les promotions

3.1 – Échelon exceptionnel pour la hors classe du corps des Maîtres de Conférences

Le décret du 9 mai 2017 modifie le statut des Maîtres de conférences en procédant à la création d'un échelon terminal – appelé « échelon exceptionnel ». Les règles, ainsi que les critères d'évaluation pour l'accès à cet échelon, sont précisés par exemple dans le *Bulletin Officiel* 12 du 22 mars 2018. À titre exceptionnel le décret prévoit que les avancements au titre de l'année 2017 soient prononcés en 2018. La campagne d'attribution de l'échelon exceptionnel au titre de 2017 se fera dans un même temps que celle de 2018, avec rattrapage de salaire pour les collègues qui seront nommés au 1er septembre 2017.

Dans ces conditions la procédure d'attribution des promotions est inchangée par rapport à celle de 2016. Les critères 2017 utilisés par la Section 25 pour l'attribution des promotions restent globalement inchangés par rapport à ceux utilisés en 2016 [2].

Le nombre de promotions possibles est constant par rapport à 2016. Il est à souligner que le nombre de passages PRC2/PRC1 possibles reste toujours très faible au regard du nombre de candidats, soit 16%.

3.2 – Promotion à la Hors Classe des Maîtres de conférences

Le nombre de candidats était de 59, dont 10 femmes. 19 candidats ont été proposés à la promotion, dont 3 candidates.

Liste des candidats retenus : Bellingeri Paolo, Boubel Charles, Cuny Christophe, Dogbe Christian, Dutertre Nicolas, Fournier Hervé, Frecon Olivier, Golenia Sylvain, Guillo Philippe, Jager Lisette, Maucourant François, Mazzilli Emmanuel, Pankrashkin Konstantin, Quarez Ronan, Quatrini Myriam, Ricotta Guillaume, Taillefer Rachel, Texier Benjamin, Vergnioux Roland.

3.3 – Promotion à la Première Classe des Professeurs

Le nombre de candidats était de 76, dont 6 femmes. 12 candidats ont été proposés à la Première Classe des Professeurs, dont 2 candidates.

Liste des candidats retenus : Chaudouard Pierre

1. Cf. rapport d'activité 2016 http://cnu25.emath.fr/comptes-rendus/rapport-2016-7.pdf
2. Cf. rapport d'activité 2016 http://cnu25.emath.fr/comptes-rendus/rapport-2016-7.pdf

Henri, Dos Santos Ferreira David, Fricain Emmanuel, Gaussent Stéphane, Gayet Damien, Nonnenmacher Stéphane, Oancea Alexandru, Pene Françoise, Perrin Nicolas, Roesch Pascale, Rousseau Erwan, Vallette Bruno.

3.4 – Promotion au premier échelon de la Classe Exceptionnelle des Professeurs

Le nombre de candidats était de 44, dont 6 femmes. 10 candidats ont été proposés à la promotion, dont 3 candidates.

Liste des candidats retenus : Bennequin Daniel, Berger Laurent, Eyssidieux Philippe, Kammerer-Fermanian Clotilde, Huisman Johannes, Lancien Gilles, Mézard Ariane, Nistor Victor, Petermichl Stéphanie, Zemor Gilles.

3.5 – Promotion au deuxième échelon de la Classe Exceptionnelle des Professeurs

Le nombre de candidats était de 36, dont 2 femmes. 7 candidats ont été retenus, dont aucune candidate.

Liste des candidats retenus : Desvillettes Laurent, El Kacimi Alaoui Aziz, Fiedler Rudolf Thomas, Pantchichkine Aleksei, Roubtsov Vladimir, Sebbar Ahmed, Zeriahi Ahmed.

4. Attribution des congés pour recherche ou conversion thématique

La procédure de demande de CRCT 2017 reste la même que celle de 2016. La section a considéré de manière prioritaire les retours de maternité. À ce propos, la motion suivante a été adoptée à l'unanimité :

> La section CNU 25 demande que l'obtention d'un semestre sabbatique par tou-te-s les collègues revenant de congé maternité, congé d'adoption, congé parental ou congé longue maladie devienne un droit systématique. La section insiste pour que ces semestres s'ajoutent et n'amputent pas le nombre de CRCT dont peuvent bénéficier statutairement tous les enseignants-chercheurs une fois tous les six ans et accordé par le CNU ou les universités.

Il faut noter que pour l'année 2018 le dépôt de candidature est avancé au 27 septembre 2017, l'examen des demandes d'attribution de CRCT se faisant en même temps que les qualifications 2018 [3].

Le nombre de candidats était de 51 (dont 3 candidates MCF et 14 candidates PR). La section disposait de 7 semestres CRCT au titre du CNU, soit moins de 10% de la demande (compte tenu du nombre de semestres demandé par candidat). Il s'agit là encore d'un nombre de possibilités trop faible par rapport à la demande.

Semestres CRCT attribués.

MCF : Legendre Evelyne, Jager Lisette, Fu Lie, Rouleux Michel.

PR : Ramero Lorenzo, Pittet Christophe, Kitanine Nikolai.

5. Session PEDR

Le nombre de candidatures à la PEDR a encore augmenté cette année, ce dont l'ensemble de la section se félicite, puisque le nombre de primes est calculé au prorata du nombre total de candidatures :

- 2017 : 102 candidatures Professeur et 133 candidatures MCF ;
- 2016 : 107 candidatures Professeur et 111 candidatures MCF ;
- 2015 : 86 candidatures Professeur et 88 candidatures MCF.

Rappelons que nous devons attribuer à chaque candidature 4 notes intermédiaires et une note globale, choisies parmi les notes A, B ou C. Les 4 notes intermédiaires correspondent aux activités suivantes dans les 4 dernières années : P-Publications ; E-Encadrement ; D-Diffusion ; R-Responsabilités.

Les périodes d'arrêt de travail (congé maternité, de maladie...) ne sont pas prises en compte dans la période de référence d'évaluation.

La note générale est la seule pour laquelle le Ministère impose les quotas suivants : au plus 20% de A, et au plus 30% de B.

La section s'est basée sur les critères qu'elle avait déjà utilisés en 2016 [4]. En particulier, nous avons attribué les notes globales suivantes :

47 A : 26 MCF (dont 4 femmes) et 21 PR (dont 2 femmes).

3. `http://www.cpcnu.fr/web/section-25/crct`
4. Cf. rapport d'activité 2016 `http://cnu25.emath.fr/comptes-rendus/rapport-2016-7.pdf`

71 B : 41 MCF (dont 8 femmes) et 30 PR (dont 1 femme).

117 C : 66 MCF (dont 9 femmes) et 51 PR (dont 1 femme).

D'autre part il faut aussi rappeler que la section du CNU ne donne qu'une évaluation des dossiers, les primes sont attribuées par les établissements. Un des problèmes pour la section, c'est qu'en général nous n'avons peu (ou pas) de retour de la part des établissements sur les attributions.

Le Bureau de la Section 25

Un prix en optimisation : le prix Jean-Jacques Moreau

Nous avons le plaisir de vous annoncer la création d'un prix en optimisation. Il récompensera tous les deux ans des mathématiciennes et mathématiciens de l'optimisation et de la décision, de moins de 45 ans, exerçant une activité de recherche en France depuis au moins 3 ans. Ce prix porte le nom de Jean-Jacques Moreau, disparu en 2014, mathématicien et mécanicien français ayant apporté des contributions exceptionnelles en mécanique non régulière et en analyse convexe. Ce prix, porté par la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI) et la Société Mathématique de France (SMF), parrainé par l'Académie des sciences, sera décerné à partir de 2019. L'optimisation est à l'intersection de plusieurs disciplines en mathématiques ; l'analyse convexe et non-linéaire, le calcul des variations, le contrôle optimal, les mathématiques discrètes ou encore la théorie des jeux avec des applications diverses : mécanique, traitement du signal, imagerie, apprentissage statistique, économie, finance et la recherche opérationnelle. L'utilisation massive des algorithmes d'optimisation dans l'intelligence artificielle démontre à elle seule l'utilité sociale du domaine et souligne l'importance de soutenir l'excellence de la recherche mathématique en optimisation. Il semblait important qu'un prix mette en avant les avancées remarquables dans ce domaine.

Ainsi, en avril 2016, Rida Laraki responsable du groupe SMAI-MODE (Mathématique de l'optimisation et de la Décision), après une suggestion de Didier Aussel, responsable du GDR MOA (Mathématique de l'Optimisation et Applications) a soumis à l'ordre du jour le projet de créer un prix en optimisation, joint entre la SMAI, la SMF et l'académie des sciences. Rida Laraki a ensuite coordonné la réalisation du projet en liaison permanente avec les présidents de la SMAI (Thierry Horsin) et de la SMF (Stéphane Seuret), et l'aide primordiale du comité de liaison MODE, de Jean-Baptiste Caillau, Émmanuel Gobet, Cyril Imbert, Jean-Baptiste Hiriart-Urruty et Michel Thérat et des secrétaires de l'Académie des sciences Patrick Flandrin (mécanique) et Jean-François Le Gall (mathématiques).

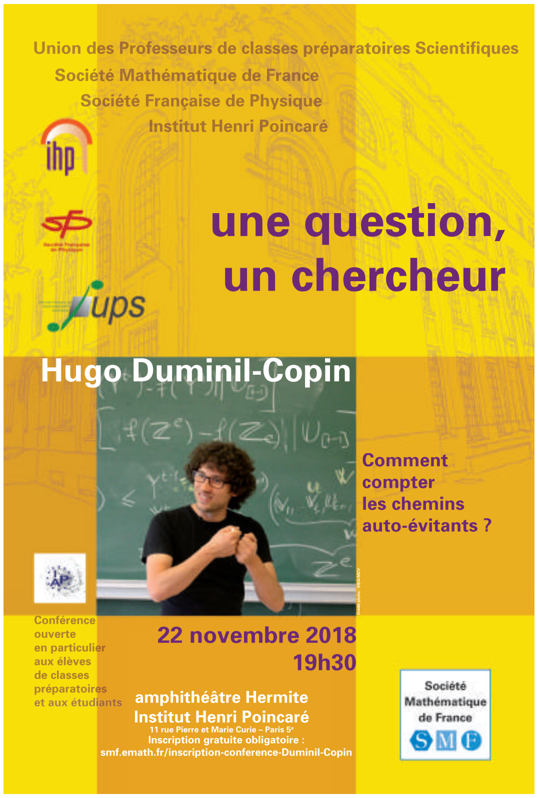
Après une large consultation, notamment des anciens responsables du groupes SMAI-MODE, et validation par les conseils de la SMAI et de la SMF, le nom de Jean-Jacques Moreau a fait l'unanimité. Jean-Jacques Moreau est un des pères fondateurs de l'analyse convexe avec Tyrrell Rockafellar et Werner Fenchel. Aussi, il incarne parfaitement cette relation étroite entre la théorie mathématique et ses applications. Selon ses propres termes, Jean-Jacques Moreau voulait appliquer la mécanique aux mathématiques.

Les membres du jury 2019 sont :

- SMAI : Tyrrell Rockafellar, Ivar Ekeland, et Claudia Sagastizabal ;
- SMF : Hélène Frankowska, Didier Henrion, Marc Teboulle ;
- Académie des Sciences : Gilles Lebeau (mathématiques), Éric Moulines (mécanique).

Le dossier de candidature peut être déposé, soit par la candidate ou le candidat, soit par des collègues. Il devra contenir un CV détaillé, incluant une présentation succincte des travaux ainsi qu'une liste de publications. L'ensemble du document, rédigé en français, ne devra pas excéder 10 pages et devra être envoyé avant le **31 mars 2019** à l'adresse : prix-Jean-Jacques-Moreau@emath.fr
Le règlement, les modalités pratiques et l'affiche du prix sont disponibles sur les sites de la SMF et de la SMAI :

`http://smf.emath.fr/prix-jean-jacques-moreau`
ou
`http://smai.emath.fr/spip.php?article746`



Michel Mendès France

1936 - 2018

• J.-P. Allouche
• J. Shallit

Notre ami et collègue Michel Mendès France est décédé le 30 janvier 2018, à l'âge de 82 ans. Il a écrit plus de 130 articles de recherche en mathématiques (et en physique), ainsi que plusieurs livres ou chapitres de livres dont *Les nombres premiers* (W. J. Ellison, M. Mendès France) et *Les nombres premiers, entre l'ordre et le chaos* (G. Tenenbaum, M. Mendès France).

Michel était un mathématicien (même s'il aimait dire qu'il était plus physicien que mathématicien) d'une créativité et d'une envergure rares. Ses publications qui vont de la théorie des nombres (nombres normaux, nombres transcendants, fractions continues, approximation diophantienne), à la théorie des automates, de la physique théorique (entropie, thermodynamique, modèle d'Ising) à l'histoire des mathématiques et à l'art, pour ne citer que quelques-uns des domaines qu'il a abordés, sont parues entre 1962 et 2018.

Le plus cité de ses articles, « Suites algébriques, automates et substitutions » parut au *Bulletin de la Société Mathématique de France* en 1980. Michel et ses co-auteurs G. Christol, T. Kamae, et G. Rauzy, développant un résultat de Christol de 1979, y établirent des liens inattendus entre les automates finis, les séries formelles algébriques à coefficients dans un corps fini et les morphismes itérés définis sur un alphabet fini, et illustrèrent ces liens de plusieurs exemples éclairants. Cet article a été cité plus de 300 fois dans la littérature scientifique. Son article en trois parties intitulé « Folds ! » avec M. Dekking et A. van der Poorten, paru dans la revue *Mathematical Intelligencer*, a aussi été cité de très nombreuses fois et a eu une très grande influence. Plus récemment, Michel a repris des questions entre géométrie et physique qu'il avait abordées avec Y. Dupain et T. Kamae, développant une notion d'entropie et de température pour les courbes planes : les définitions qu'il propose (dont la pression et le volume), impliquent qu'à température infinie, les courbes planes se comportent comme... des gaz parfaits ! Michel avait l'habitude de consulter chaque jour les sommaires et/ou les articles des revues arrivées au département de mathématiques (c'était encore le temps des revues papier) et – peut-être en partie grâce à cela – il pouvait indiquer à la volée de nombreuses références précieuses sur une foule de sujets mathématiques. En plus de la dichotomie classique entre ceux qui posent des problèmes et ceux qui résolvent des problèmes (Michel faisait plutôt partie de la première catégorie), il y a une autre dichotomie, celle qui existe entre les scientifiques qui creusent un sujet (ou ajoutent des briques sur les constructions existantes) et ceux qui préfèrent trouver des liens inattendus et (tenter de) jeter des ponts entre des questions en apparence parfaitement disjointes : Michel faisait partie de cette dernière catégorie, et il a ainsi eu une forte influence sur plusieurs mathématiciens dont les auteurs seraient flattés de faire partie.

Michel a encadré plusieurs thèses, nous avons retrouvé, par ordre alphabétique, celles d'Anne Bertrand, d'Emmanuel Cateland (co-direction avec J.-P. Allouche), de Michel Olivier, de Jia-yan Yao.

Michel est né le 1er janvier 1936, fils de Pierre Mendès France (futur président du Conseil) et Lily Cicurel. Enfant il fut obligé de quitter la France pendant la seconde guerre mondiale et il suivit une partie de sa formation à New York où il acquit une parfaite connaissance de l'anglais. Il intégra l'École polytechnique en 1957, et sortit dans le corps de l'armement. Il soutint en 1966 à la Faculté des sciences de Paris sa thèse de doctorat « Nombres normaux, fonctions pseudo-aléatoires » sous la direction de Charles Pisot et Jean Bass. Les résultats de cette thèse sont publiés dans le volume 20 du Journal d'Analyse Mathématique (1967). Il fut post-doctorant à l'université de Californie à Berkeley. Après avoir été en poste à l'université de Paris, il fut professeur (puis professeur émérite) à l'université de Bordeaux. Il a eu en 1999 avec Gérald Tenenbaum le Prix Paul Doistau-Émile Blutet de l'information scientifique de l'Académie des sciences pour leur ouvrage *Les nombres premiers* dans la collection *Que Sais-je*.

En l'an 2000 il y eut une conférence en son honneur à l'université de Bordeaux. Parmi les participants citons, en plus des auteurs, Didier Nordon, Jacques Peyrière, Andrzej Schinzel, Hédi Daboussi, Gérald Tenenbaum, Martine Queffélec, Alan Baker, Vitaly Bergelson, Michel Dekking, Anne Bertrand-Mathis, Michael Keane, Zhi-Ying Wen, Bernard Derrida, Imre Ruzsa, Georges Rhin, Vera Sós, Alf van der Poorten, Wladyslaw Narkiewicz, Andrew Pollington, Étienne Fouvry, Bahman Saffari...

Travailler avec Michel était toujours divertissant, cela contenait des mathématiques, de la philosophie, une histoire vécue (le plus souvent hilarante et ponctuée de son interjection préférée « Schlak ! »), des jeux de mots dans au moins deux langues, et des commentaires sur des questions d'actualité, le tout accompagné d'espresso ou de vin rouge à la terrasse de la « Fac. » de Bordeaux. Pour donner une petite idée de son esprit, citons l'un de ses aphorismes préférés : « Un bon exposé de recherche en math. doit être beau, profond, surprenant, ou ... court ». Ses exposés étaient d'ailleurs souvent gentiment provocateurs comme quand il affirmait démontrer un théorème par une récurrence *descendante* : « on montre que si le résultat est vrai pour $(n+1)$ alors il est vrai pour n ; il ne reste donc plus qu'à le démontrer pour l'infini. Or il n'y a pas d'entier infini d'où le résultat ». Il y avait bien sûr toujours un représentant de la bien-pensance bourbachique qui s'agitait sur son siège et finissait par intervenir en disant que cela ne lui paraissait pas une démonstration rigoureuse, mais cela amusait Michel qui savait bien (comme le bourbachisant d'ailleurs !) qu'on pouvait remettre tout cela à l'endroit pour satisfaire les gardiens du temple.

Le soir nous étions souvent invités à dîner dans la maison de Michel et Joan à Gradignan (dans la banlieue de Bordeaux) où Michel adorait se comporter en hôte, montrant par exemple sa superbe collection d'affiches « vintage » de ses années 60 à Berkeley ou découvrant des œufs récemment pondus par les poules qui picoraient dans ce qu'on pourrait appeler un domaine mais qu'il appelait son jardin. Il y avait aussi des moutons, dont l'un ou l'autre s'évadait parfois et était ramené par un voisin sur le siège arrière de sa voiture. L'un de nous laissa un jour entrer accidentellement un mouton dans la cuisine et il fallut appeler Michel pour le forcer à sortir. Michel faisait parfois la cuisine, sa spécialité était le *poulet gros sel* (l'un de nous se souvient avoir invité Michel et deux amies dans un restaurant rue Saint-Jacques à Paris : le poulet gros sel proposé par le restaurateur ce jour-là avait eu un problème, la croûte de sel imbibée de liquide avait transformé le plat en un OESNI – objet extrêmement salé non identifié – mais Michel avait très diplomatiquement indiqué qu'il y avait juste un peu trop de sel). La conversation se prolongeait tard dans la nuit. Michel avait aussi une incroyable collection de livres sur tous les sujets, qui s'empilaient sur des étagères allant jusque aux hauts plafonds.

Michel était aussi un artiste doué. Ses dessins et collages étaient fréquemment liés à des thèmes humoristiques ou mathématiques. Il a par exemple illustré le livre de Didier Nordon *Les mathématiques pures n'existent pas !* (1981), et une exposition de ses dessins intitulée « Petits croquis en prose » eut lieu au Musée des Beaux-Arts d'Angoulême en 1992.

Dessin de Michel Mendès France pour l'affiche de la Journée Annuelle 2012 de la SMF repris de la couverture du livre *Les mathématiques pures n'existent pas !* (D. Nordon 1981)

Les auteurs ont eu le grand privilège d'être des amis et des collaborateurs de Michel pendant plus de 35 ans, c'est d'ailleurs grâce à lui qu'ils se sont rencontrés, puisque Michel avait invité J. S. à Bordeaux dans les années 80. Michel avait un frère plus âgé, Bernard Mendès France, décédé en 1991. Les auteurs adressent à son épouse Joan (née Horsley) et à ses enfants Tristan et Margot leur amitié affectueuse.

Les auteurs remercient A. Bertrand et J.-M. Deshouillers pour leur aide.

Bernard Morin

1931 - 2018

• D. Foata

Bernard Morin nous a quittés le 12 mars 2018. La majeure partie de sa carrière universitaire s'est faite au département de mathématique de l'université Louis Pasteur de Strasbourg, de 1974 à 1999, en qualité de professeur des universités. Il a cependant fréquenté d'autres institutions, notamment l'Institute for Advanced Studies de Princeton, l'université Kyushu au Japon, ainsi que les universités de Marseille et Metz.

Bernard Morin est né le 3 mars 1931 à Shanghai (Chine). À l'âge de six ans, il est devenu aveugle, à la suite d'un glaucome. Revenu en France, il a pu faire toute sa scolarité à l'Institut des jeunes aveugles à Paris. Son handicap ne l'a pas empêché d'entrer à l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, après avoir passé le concours d'entrée des littéraires. Après ses études de philosophie et l'obtention d'un diplôme d'études supérieures dans cette discipline, il s'est orienté vers les mathématiques sous la gouverne d'Henri Cartan.

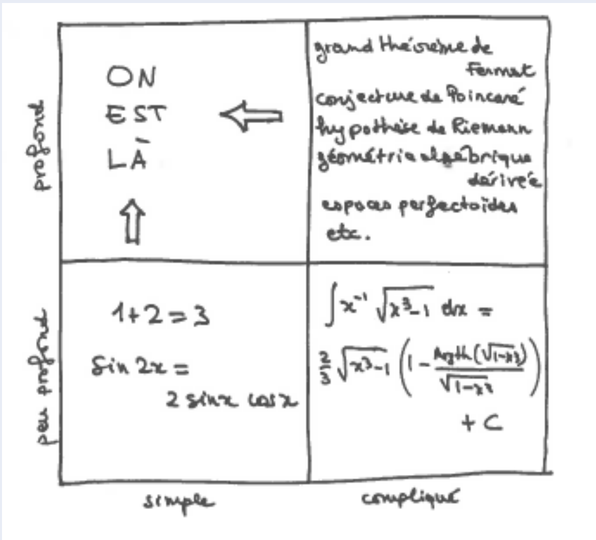
Entré au CNRS en 1957, il est très vite devenu un pionnier de la théorie des singularités des applications différentiables et obtint une renommée mondiale lorsqu'il montra le retournement de la sphère, c'est-à-dire l'homotopie consistant à échanger les faces interne et externe d'une sphère dans notre espace euclidien.

Les géomètres strasbourgeois, notamment les regrettés Claude Godbillon et Jean Martinet, avaient beaucoup insisté pour qu'on le « rapatrie » à Strasbourg. Ce fut fait en 1974. Chacun était impressionné par son sens – il faudrait dire sa vision – géométrique extraordinaire. Chaque échange d'idées avec lui était enrichissante ; il savait parfaitement illustrer son discours par sa culture mathématique, certes, mais aussi littéraire, philosophique et musicale. Naturellement, il prenait beaucoup de notes en braille, mais savait aussi intégrer rapidement toute idée perçue au cours d'une conversation ou d'une lecture à haute voix, pour l'expliquer ensuite à autrui, dans sa hiérarchie des concepts, comme il disait. Du fait de son handicap, son intégration dans un enseignement de premier cycle était difficile ; en revanche, son magistère dans un cours de fin de second, ou de troisième cycle, suivant le cursus d'alors, était inégalable.

C'est un être exceptionnel qui nous quitte. On ne pouvait qu'être ébloui par la fulgurance de sa pensée et l'excellence de son expression orale.

L'art de ne pas dire n'importe quoi
Jordan Ellenberg
Cassini, 2017. 544 p. ISBN : 978-2842252236

Jordan Ellenberg est professeur à l'université du Wisconsin-Madison, spécialiste de géométrie arithmétique, mais il est également habitué des chroniques dans de grands journaux américains. Au-delà du titre accrocheur, ce qu'il propose dans ce livre est très bien décrit par son sous-titre : « Ce que le bon sens doit aux mathématiques »[a]. Il y décortique nombre de nos absurdités de la vie courante. S'appuyant sur de nombreux exemples très variés et bien documentés, l'auteur isole la structure mathématique sous-jacente de ces erreurs, jusqu'à les rendre évidentes au lecteur. Le livre s'adresse à tous, mathématiciens ou non.
Les sources de ces exemples sont diverses : débats politiques, codes cachés dans la Bible, subtilités de la loterie, résultats sportifs, méthodes d'escroquerie, élections... Toujours exemples à l'appui, l'auteur aborde aussi le problème de la validité des expériences scientifiques ainsi que les questions éthiques et politiques afférentes. On trouve également ici et là un peu d'histoire des idées mathématiques et philosophiques. L'ensemble est très riche et même le mathématicien y apprend beaucoup. Pour ne donner qu'un exemple, j'ai été surpris d'apprendre que l'on peut optimiser ses gains à la loterie en utilisant l'espace projectif[b].
Le livre est organisé en quatre grands thèmes : linéarité, inférence, régression, existence. Chacun d'entre eux constitue une partie du livre dans laquelle un certain type d'erreur est analysé. Par exemple, la première partie « linéarité » met en évidence notre propension à raisonner comme si les phénomènes qui nous entourent se comportaient de manière linéaire. Celle-ci conduit à lire parfois dans la presse des affirmations du type « les américains seront tous obèses en 2048 »[c].
J'ai trouvé particulièrement parlant le schéma ci-dessous, qui figure dans l'introduction du livre :



Comme ce schéma l'indique, il y a des mathématiques à la fois faciles et peu profondes, des mathématiques difficiles bien que peu profondes, il y a aussi bien sûr des mathématiques difficiles et profondes, mais les mathématiques présentes dans ce livre sont à la fois faciles et profondes. Ce livre ne contient pas de vulgarisation de grandes théories mathématiques, on n'y trouve quasiment pas de démonstration, encore moins de calcul.

Le ton n'est ni prétentieux, ni professoral. La quatrième de couverture le décrit comme :« facile, intelligent, hilarant ». « Facile et intelligent », oui, je crois. « Hilarant » est peut-être un peu exagéré, mais le ton est léger et guilleret et l'on se prend souvent à sourire. Les sujets discutés et les exemples choisis sont organisés de manière cohérente mais les chapitres dépendent peu les uns des autres, ce qui fait que le livre peut être lu de manière linéaire, ou non.

Le dernier chapitre « Être dans le vrai » est une sorte de conclusion, où l'auteur énonce ses choix personnels. Là où politiciens et médias valorisent avant tout l'action instinctive, lui défend la réflexion en support de l'action. Là où il est souvent demandé un avis tranché sur tout problème, il préfère que, par honnêteté intellectuelle, l'on puisse affirmer qu'il est impossible de trancher. Après les presque 500 pages qui précèdent, difficile de ne pas adhérer !

Ce livre montre à quel point les mathématiques sont essentielles dans l'éducation du citoyen. En effet, à la fameuse question de l'élève à son professeur de mathématiques « À quoi ça va me servir ? », il offre une réponse nette : à ne pas dire n'importe quoi !

Vincent Humilière
Sorbonne Université

---

a. Le titre original du livre est « How Not to Be Wrong : The Power of Mathematical Thinking » (Penguin, 2014).

b. Si tout à coup vous ressentez l'appât du gain, allez directement au chapitre 13 (mais soyons honnêtes, ça ne marche pas avec n'importe quelle loterie)

c. Américain lui-même, l'auteur ne manque pas d'ironiser sur cette affirmation !

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@dma.ens.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.