Séminaire de Théorie des Nombres
Paris 1986-87

La méthode du col en théorie analytique des nombres

Gérald TENENBAUM

1. Introduction

Un des problèmes centraux de la théorie analytique des nombres consiste à déduire des propriétés analytiques d'une série de Dirichlet

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \qquad (s=\sigma+i\tau)$$

une évaluation asymptotique de la fonction sommatoire des coefficients

$$A(x)=\sum_{n\leq x} a_n \qquad (x\to\infty).$$

Un des outils privilégiés dans ce contexte est la formule de Perron

$$(1) \qquad A(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^s \frac{f(s)}{s}\, ds$$

valable pour $x\in\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{N}$, et $\sigma>\max(0,\sigma_c)$, où σ_c désigne l'abscisse de convergence de f.

La méthode classique d'estimation du second membre de (1) consiste à prolonger f analytiquement et à déformer le contour d'intégration de façon à mettre en évidence une contribution essentielle à l'intégrale provenant de la (ou des) singularité(s) de f de plus grande partie réelle. Lorsque, par exemple, f est prolongeable en une fonction méromorphe, on fait appel au théorème des résidus. La difficulté principale réside alors dans la majoration de l'intégrale sur le contour déformé. Ce schéma est en particulier celui des preuves classiques du théorème des nombres premiers, où la série de Dirichlet en cause est

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s}\qquad(\sigma>1)$$

($\zeta(s)$ désignant la fonction zêta de Riemann et $\Lambda(n)$ la fonction de von Mangoldt) qui peut effectivement être prolongée en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

La méthode du col (ou du point–selle) ne nécessite pas l'existence d'un prolongement analytique pour f. Elle repose sur l'idée d'exploiter la liberté de choix du paramètre σ dans (1). Il est en effet souvent possible d'optimiser cette abscisse d'intégration de façon que l'intégrale soit dominée par la contribution d'un petit voisinage de $s=\sigma$. Une fois cette réduction capitale opérée, il reste à estimer l'intégrande par la formule de Taylor et à évaluer cette contribution principale par la méthode de Laplace.

Cette technique classique a connu récemment des applications dans des problèmes connus, avec des résultats surprenants. Nous nous proposons d'exposer la spécificité de son emploi en théorie analytique des nombres et de détailler les principaux théorèmes obtenus dans quelques cas particuliers représentatifs.

2. Le principe explicité

Dans cette section, notre but est d'illustrer plus précisément le champ d'application de la méthode du col et le type de résultats qu'elle est susceptible de fournir. Soucieux d'écarter ici toute complication technique, nous avons volontairement restreint la généralité au profit de la simplicité de l'argument, afin de dégager le type d'hypothèses et la nature des outils nécessaires. Le lecteur intéressé par des développements plus approfondis pourra consulter les articles, cités en références, dévolus aux applications qui font l'objet des sections suivantes.

Soit, donc, $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$ une série de Dirichlet à coefficients positifs, d'abscisse de convergence $\sigma_c\geq 0$, et telle que $a_1=1$. Alors il existe un demi–plan $\sigma>c_1$ dans lequel $f(s)$ ne s'annule pas et nous supposerons que l'on peut choisir $c_1=\sigma_c$, de sorte que f admet la représentation

(2) $$f(s)=\exp\varphi(s)\qquad(\sigma>\sigma_c).$$

On sait qu'alors φ est elle–même une série de Dirichlet. Notons $\varphi_k(s)$ sa k–ième dérivée. Il sera agréable par la suite de supposer que l'on a

(3) $$1\ll\sup_{\tau}|\varphi_k(s)|\ll(-1)^k\varphi_k(\sigma)\qquad(s=\sigma+i\tau,\sigma>\sigma_c).$$

Cette condition est en particulier réalisée lorsque $\varphi(s)$ est à coefficients positifs.

L'hypothèse fondamentale est :

(H1) *L'équation* $\varphi_1(\alpha)+\log x=0$ *possède, pour* x *assez grand, au moins une solution* $\alpha=\alpha(x)$ *telle que* $\sigma_c<\alpha\ll 1$.

Dans toute la suite, nous supposons fixée une solution $\alpha=\alpha(x)$. Nous posons $\sigma_k:=|\varphi_k(\alpha)|$, k= 1,2,... . Les deux hypothèses suivantes sont également importantes, quoique non essentielles en théorie.

(H2) $$\alpha^2\sigma_2\longrightarrow\infty\qquad(x\longrightarrow\infty)$$

(H3) $$\alpha_2^3\sigma_3^{-2}\longrightarrow\infty\qquad(x\longrightarrow\infty).$$

Enfin, il est indispensable d'introduire une condition permettant de majorer convenablement la contribution à l'intégrale de Perron (1) des valeurs "intermédiaires" de $|\tau|$. Ce pourrait être une spécification des oscillations de l'intégrande $x^s f(s)s^{-1}$. Nous nous contenterons d'un renforcement de l'inégalité

(4) $$|f(\alpha+i\tau)|\leq f(\alpha)\qquad(\tau\in\mathbb{R})$$

qui découle immédiatement de l'hypothèse $a_n\geq 0$, n=1,2,... . Nous imposons donc

(H4) $$|f(\alpha+i\tau)|\leq f(\alpha)/T_1\qquad(T_0\leq|\tau|\leq T_1)$$

où l'on a posé

(5) $$T_0=(\sigma_2\sigma_3)^{-1/5},\quad T_1=\alpha\sigma_2/\epsilon,$$

ϵ étant un nombre réel fixé, $0<\epsilon<1$. Il est facile de constater que (H2) et (H3) impliquent

$$T_0 \longrightarrow 0,\quad T_1 \longrightarrow \infty \qquad (x \longrightarrow \infty). \tag{6}$$

L'hypothèse (H4) est exagérément forte. Il sera patent dans la suite qu'une condition plus faible pourrait sans dommage la remplacer, notamment une majoration dépendant explicitement de τ. Pour l'heure, bornons nous à insister sur le fait qu'en tout état de cause une propriété impliquant une décroissance en moyenne de $x^s f(s)/s$ est essentielle.

Théorème 1. *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$A(x)= \frac{x^{\alpha} f(\alpha)}{\alpha\sqrt{2\pi\sigma_2}}\,(1+O(R)) \tag{7}$$

avec

$$R= \sigma_2^{-3/2}\sigma_3 + \epsilon^{1/2}+ \sigma_2^{-1/2}(\alpha^{-1}+\log \sigma_2). \tag{8}$$

Remarque : Nous n'avons pas cherché ici à donner une expression optimale du terme reste R. La formulation du théorème vise avant tout à souligner le fait que la méthode fournit non seulement un équivalent asymptotique mais une majoration explicite de l'erreur.

Démonstration : Au vu de (1), l'expression

$$J := \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i T_1}^{\alpha+i T_1} x^s \frac{f(s)}{s}\, ds$$

est *a priori* une bonne approximation de $A(x)$. Décomposons–la sous la forme $J= J_1+J_2$, disons, où J_1 et J_2 correspondent respectivement aux domaines d'intégration $|\tau| \le T_0$ et $T_0 < |\tau| \le T_1$.

Lorsque $|\tau|\le T_0$, on a par (H1) et (3)

$$\varphi(\alpha+i\tau)= \varphi(\alpha)-i\tau \log x - \tfrac{1}{2}\tau^2\sigma_2 + O(\tau^3\sigma_3).$$

On vérifie sans peine que $T_0^3\,\sigma_3 \longrightarrow 0$, d'où

$$J_1= \frac{x^{\alpha} f(\alpha)}{2\pi\alpha}\int_{-T_0}^{T_0} e^{-\frac{1}{2}\tau^2\sigma_2}\{1+O(|\tau|\alpha^{-1}+|\tau|^3\sigma_3)\}d\tau.$$

Grâce aux estimations élémentaires

$$\int_{-T_0}^{T_0} e^{-\frac{1}{2}\tau^2\sigma_2} d\tau= \sqrt{2\pi/\sigma_2}\,.\,(1+O(\sigma_2^{-3}\sigma_3^2))$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau^2\sigma_2}(|\tau|\alpha^{-1}+|\tau|^3\sigma_3)d\tau \ll \sigma_2^{-1/2}(\sigma_2^{-3/2}\sigma_3+\alpha^{-1}\sigma_2^{-1/2}),$$

il suit

$$J_1= P(1+O(R)) \tag{9}$$

où P désigne le terme principal de (7).

La condition (H4) intervient pour majorer J_2. On a

$$\begin{aligned} J_2 &\ll x^{\alpha}f(\alpha)T_1^{-1}\int_0^{T_1} \frac{d\tau}{\alpha+\tau} \\ &\ll \frac{x^{\alpha}f(\alpha)}{\alpha}\left(\frac{T_1}{\alpha}\right)^{-1}\log\left(\frac{T_1}{\alpha}\right) \ll P\,\sigma_2^{-1/2}\log \sigma_2. \end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu

$$J= P(1+O(R)) \tag{10}$$

et il reste à établir que la différence $J-A(x)$ est absorbable par le terme reste $O(PR)$. Posons

$$h(y)=\begin{cases}0 & (0<y<1)\\ \\ 1 & (y\geq 1)\,.\end{cases}$$

On a classiquement pour tous y, $T>0$

$$(11)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} y^s\,\frac{ds}{s}-h(y)\right| \ll y^{\alpha}(1+T|\log y|)^{-1}.$$

En appliquant cette estimation pour $T=T_1$, $y=x/n$, et en sommant pour $n=1,2,\ldots$, il vient

$$(12)\qquad \begin{aligned}|A(x)-J| &\ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x/n)^{\alpha}(1+T_1|\log(x/n)|)^{-1}\\ &\leq x^{\alpha}f(\alpha)T_1^{-1/2}+\sum{}' a_n(x/n)^{\alpha}\end{aligned}$$

où l'apostrophe indique que la sommation en n est restreinte aux entiers satisfaisant à $|\log(x/n)|\leq T_1^{-1/2}$. Pour estimer cette dernière expression, on majore la fonction caractéristique de l'intervalle $[-T_1^{-1/2},T_1^{-1/2}]$ par $Kw(t)$ où K est une constante absolue convenable et où $w(t)$ est définie par

$$w(t)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\lambda t/2)}{\lambda t/2}\right]^2$$

avec $\lambda=T_1^{1/2}$. Comme la transformée de Fourier de $w(t)$ vaut

$$\hat{w}(\tau):=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau}w(t)dt=\lambda^{-1}(1-|\tau\lambda^{-1}|)^{+},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum{}' a_n(x/n)^{\alpha} &\leq K\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x/n)^{\alpha}\,w(\log(x/n))\\ &= \frac{K}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(\alpha+i\tau)x^{\alpha+i\tau}\,\hat{w}(\tau)d\tau\\ &\ll x^{\alpha}f(\alpha)\left(\int_{-1}^{1}\lambda^{-1}d\tau+\int_{1}^{\lambda}T_1^{-1}d\tau\right)\\ &\ll x^{\alpha}f(\alpha)T_1^{-1/2}\ll PR.\end{aligned}$$

En reportant cette estimation dans (12), puis dans (10), on obtient bien la conclusion souhaitée.

Cela achève la démonstration du théorème 1.

L'hypothèse (H4) s'avère souvent déterminante quant à la pertinence de la méthode du col. Une circonstance assez générale dans laquelle elle est susceptible d'être réalisée est celle où la fonction arithmétique a_n est multiplicative. On peut alors écrire $f(s)$ sous forme d'un produit eulérien et utiliser l'effet cumulatif des décroissances des facteurs locaux.

Le prototype d'une telle situation est le problème des entiers sans grand facteur premier, abordé dans les deux sections suivantes. Comme nous le verrons, la nature des résultats obtenus dans ce contexte est représentative de l'intérêt et de la spécificité de la méthode en arithmétique.

3. Entiers sans grand facteur premier : application directe.

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier de l'entier n, avec la convention $P(1)=1$. Il s'agit ici d'estimer la quantité

$$\psi(x,y):=\operatorname{card}\{n\leq x : P(n)\leq y\},$$

qui a fait l'objet depuis cinquante ans d'une abondante littérature – cf. [19] et [23] pour une liste quasi–exhaustive de références bibliographiques.

La fonction caractéristique de l'ensemble des entiers n tels que $P(n)\leq y$ est multiplicative et la série de Dirichlet correspondante est

$$\zeta(s,y)=\prod_{p\leq y}(1-p^{-s})^{-1}.$$

Ce développement eulérien est le facteur initial de celui de la fonction zêta de Riemann. Il définit un prolongement méromorphe de $\zeta(s,y)$ au plan complexe tout entier, en une fonction sans zéro et dont tous les pôles sont situés sur l'axe $\sigma=0$. Seul le pôle à l'origine est multiple, d'ordre $\pi(y)$.

La représentation (2) est possible pour $f(s)=\zeta(s,y)$ avec

$$\varphi(s)=\varphi(s,y):=\sum_{p\leq y}\log(1/(1-p^{-s})).$$

On peut donc écrire en particulier

$$\varphi(s,y)=\sum_{\substack{n=2\\ P(n)\leq y}}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}\cdot\frac{1}{n^s}$$

de sorte que $\varphi(s,y)$ est bien à coefficients positifs. On peut vérifier facilement que les hypothèses (H1), (H2) et (H3) sont satisfaites. Le point–selle $\alpha=\alpha(x,y)$ est l'unique solution de l'équation

$$\sum_{p\leq y}\frac{\log p}{p^{\alpha}-1}=\log x. \tag{13}$$

La question de la majoration (H4), au vu de l'inégalité élémentaire

$$\left|\frac{\zeta(s,y)}{\zeta(\alpha,y)}\right|\leq\exp\left\{-\sum_{p\leq y}\frac{1-\cos(\tau\log p)}{p^{\alpha}}\right\}\qquad(s=\alpha+i\tau),$$

revient au problème d'estimer

$$\sum_{p\leq y}p^{-\alpha-i\tau}. \tag{14}$$

Cette quantité relève elle–même d'une intégrale de Perron, impliquant $\zeta'(s)/\zeta(s)$. En utilisant la région sans zéro de Vinogradov, on obtient ainsi que (H4) a lieu pour chaque $\epsilon>0$ fixé dans le domaine

$$x\geq x_0(\epsilon),\quad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\epsilon}\}\leq y\leq\exp\left\{\frac{\log x}{(\log_2 x)^5}\right\}. \tag{15}$$

Ici et dans toute la suite $\log_k$ désigne la k–ième itérée de la fonction logarithme.

Le Théorème 1 implique donc la validité de la formule asymptotique

$$\psi(x,y)\sim\frac{x^{\alpha}\zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\,\varphi_2(\alpha,y)}}$$

uniformément lorsque x et y tendent vers l'infini en respectant (15). On a

$$\varphi_2(\alpha,y):=\sum_{p\leq y}\frac{p^{\alpha}(\log p)^2}{(p^{\alpha}-1)^2}\sim\left(1+\frac{\log x}{y}\right)\log x.\log y.$$

Dans l'article [19] en commun avec Hildebrand, nous précisons ce résultat de la façon suivante.

Théorème 2 (Hildebrand – Tenenbaum). *Avec les notations précédentes, on a uniformément pour* $x\geq y\geq 2$

$$\psi(x,y)=\frac{x^{\alpha}\zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\,\varphi_2(\alpha,y)}}\left(1+O\left(\frac{\log y}{y}+\frac{\log y}{\log x}\right)\right). \tag{16}$$

On obtient ainsi une formule asymptotique pour $\psi(x,y)$ dès que $y\to\infty$ et $\log x/\log y\to\infty$. Le facteur $\sqrt{2\pi\,\varphi_2(\alpha,y)}$ est caractéristique de l'emploi "direct" de la méthode du col – c'est–à–dire utilisant le développement de Taylor pour évaluer le terme principal. En fait, la méthode ne fonctionne sous cette forme que lorsque y est assez petit devant x : dans [19], on suppose $\log y\leq\log x/(\log_2 x)^2$. On complète le domaine de validité de (16) en utilisant des estimations connues dans la région complémentaire, que l'on peut obtenir assez facilement.

Le lecteur est cependant en droit de se demander quelle est la pertinence d'une évaluation telle que (16), dépendant d'une quantité α définie implicitement comme la solution d'une équation transcendante. Une analyse approfondie montre que la formule (16) contient non seulement tous les résultats connus concernant $\psi(x,y)$ mais encore des informations nouvelles d'un type original.

Sans reprendre ici la discussion présentée dans [19], bornons–nous à récapituler les principales conséquences du théorème 2 et la manière dont elles en découlent.

(I) Approximations "lisses".

En évaluant convenablement, à l'aide du théorème des nombres premiers, le membre de gauche de (13) pour une valeur arbitraire de α, on obtient une approximation explicite de $\alpha(x,y)$ en fonction de x et y. En substituant alors cette approximation dans le membre de droite de (16) et en faisant de nouveau appel au théorème des nombres premiers, il vient (cf. [19] *Theorem* 2) pour $y \geq (\log x)^{1+\epsilon}$

$$\psi(x,y) = x\,\rho(u)\exp\{O(R(x,y))\} \tag{17}$$

où l'on a posé

$$u := \frac{\log x}{\log y}, \quad R(x,y) := \frac{\log(1+u)}{\log y} + u\exp\{-(\log y)^{3/5-\epsilon}\},$$

et où ρ désigne la fonction de Dickman définie pour $v \geq 0$ par

$$\begin{cases} \rho(v) = 1 & (0 \leq v \leq 1) \\ v\rho'(v) + \rho(v-1) = 0 & (v > 1). \end{cases}$$

Plus précisément, la déduction de (17) à partir de (16) nécessite l'évaluation de $\psi(x,y)$ pour u "petit" – pour laquelle on peut soit utiliser les résultats classiques de de Bruijn [3], soit recourir à la technique "indirecte" exposée à la section suivante.

Une conséquence évidente de (17) est la formule asymptotique

$$\psi(x,y) = x\,\rho(u)\left(1 + O\left(\frac{\log(1+u)}{\log y}\right)\right) \tag{18}$$

valable uniformément dans le domaine

$$x \geq 3, \quad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\epsilon}\} \leq y \leq x. \tag{19}$$

Ce résultat a été établi pour la première fois par Hildebrand [16] en utilisant une méthode complètement différente.

En examinant plus avant le terme reste $R(x,y)$ dans (17) et en l'évaluant à partir des formules explicites faisant intervenir les zéros de la fonction $\zeta(s)$, il est possible d'obtenir une nouvelle démonstration d'un autre résultat de Hildebrand [15] qui spécifie que l'estimation (18) persiste pour $x \geq y \geq (\log x)^{2+\epsilon}$ (où $\epsilon > 0$ est arbitraire) si, et seulement si, l'hypothèse de Riemann est vraie.

Il est très probable que la même technique permette de prouver que $\psi(x,y)$ n'est plus équivalent à $x\rho(u)$ lorsque $y \leq (\log x)^{2-\epsilon}$. Hildebrand a montré [17] que, dans ce domaine, $\psi(x,y)$ ne peut avoir de trop bonne approximation "lisse" et il est facile de constater qu'aucune fonction continue de x et y n'est équivalente à $\psi(x,y)$ lorsque $y \leq (\log x)^{1-\epsilon}$. En effet, si y est un nombre premier, on déduit alors de (16) que

$$\frac{\psi(x,y)}{\psi(x,y-0)} \sim e(1-y^{-\alpha})^{-1} \sim e\,\frac{\log x}{y} \longrightarrow \infty.$$

Le facteur $\zeta(\alpha,y)$ est, dans cette région, très sensible aux irrégularités de la répartition des nombres premiers $\leq y$. Par exemple, pour $y \leq \sqrt{\log x}$, on peut retrouver immédiatement grâce à (16) le résultat d'Ennola [6]

$$\psi(x,y) \sim \frac{1}{k!}(\log x)^k \prod_{p \leq y} (\log p)^{-1} \qquad (k = \pi(y)).$$

(II) Comparaison avec la méthode de Rankin.

En 1938, Rankin a utilisé dans le cadre de son célèbre travail sur les grandes différences entre nombres premiers consécutifs, la majoration

$$\psi(x,y) \leq \sum_{\substack{n=1 \\ P(n) \leq y}}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} = x^{\sigma}\,\zeta(\sigma,y) \qquad (\sigma > 0).$$

Le choix optimal du paramètre σ est évidemment $\sigma = \alpha(x,y)$ défini par (13), soit

$$\psi(x,y) \leq x^{\alpha}\,\zeta(\alpha,y). \tag{20}$$

L'idée d'approcher la fonction caractéristique d'un ensemble d'entiers par un multiple constant d'une fonction multiplicative s'est révélé un outil fécond en théorie analytique des nombres – cf. [10] chapitre 1. Il est donc naturellement souhaitable de savoir quelle perte de précision implique un tel traitement. Le théorème 2 répond à cette question : la majoration de (20) excède $\psi(x,y)$ d'un facteur F tel que

$$F \sim \alpha\sqrt{2\pi\,\varphi_2(x,y)} \sim \log(1+y/\log x)\sqrt{2\pi\, u(1+\log x/y)}.$$

On a toujours

$$\log y \ll F \ll \sqrt{y/\log y}.$$

Ainsi, si la méthode de Rankin ne fournit jamais l'équivalent asymptotique, elle possède cependant une surprenante acuité théorique : toutes les estimations disponibles dans la littérature présentent, dans le cas $y=\log x$ par exemple, un facteur d'incertitude de l'ordre de $\exp y^{1+o(1)}$.

(III) <u>Formules semi–asymptotiques</u>.

L'arithmétique fourmille d'exemples de quantités, disons $Q(x)$, dont on conjecture qu'elles admettent un équivalent de la forme

$$Q(x) \sim A\,x(\log x)^B \qquad (x \to \infty) \tag{21}$$

et pour lesquelles on sait seulement prouver un encadrement

$$x(\log x)^{B_1} \ll Q(x) \ll x(\log x)^{B_2}. \tag{22}$$

Dans une telle situation, Erdös pose souvent la question de savoir si le comportement local est ou non en accord avec (21). Selon son habitude, il emploie la formulation la plus simple et demande innocemment s'il est vrai que

$$Q(2x)/Q(x) \longrightarrow 2 \qquad (x \longrightarrow \infty). \tag{23}$$

Un tel résultat est une forte présomption en faveur de (21). Partant, Erdös le désigne sous le nom de *formule semi–asymptotique.* Dans la pratique, il est assez

rare que l'on sache établir une formule semi–asymptotique alors que l'on échoue à prouver la formule asymptotique correspondante. La méthode du col est cependant un outil privilégié pour l'obtention de ce type de résultat.

Considérons par exemple la situation du théorème 1. Même si les variations du paramètre α en fonction de x sont trop brutales pour autoriser une approximation "lisse" du second membre de (7), il est concevable que la dérivée $\alpha'(x)$ soit suffisamment régulière pour que l'on puisse estimer convenablement $\alpha(2x)-\alpha(x)$ et par conséquent $A(2x)/A(x)$.

On obtient effectivement des formules semi–asymptotiques dans la plupart des cas où la méthode du col s'applique. Le résultat suivant est établi dans [19] (*Theorem* 3).

Théorème 3 (Hildebrand–Tenenbaum). *On a uniformément pour* $x \geq y \geq 2$, *et* $1 \leq h \leq y$,

$$\psi(hx,y)/\psi(x,y) = h^{\alpha}(1+O(u^{-1}+(\log y)y^{-1})).$$

Au vu de l'estimation

$$\alpha(x,y) \sim \frac{\log(1+y/\log x)}{\log y} \qquad (y \to \infty) \tag{24}$$

donnée dans [19] (*Theorem* 2), on déduit immédiatement les formules semi-asymptotiques suivantes.

Corollaire. *Supposons que* x *et* y *tendent vers l'infini. Alors on a*

$$\psi(2x,y) \sim 2\,\psi(x,y) \tag{25}$$

si, et seulement si, $\log y/\log_2 x \to \infty$. *De plus, on a*

$$\psi(2x,y) \sim \psi(x,y) \tag{26}$$

si, et seulement si, $\log y/\log_2 x \leq 1 + o(1)$.

La première de ces formules a été découverte indépendamment par Hensley [11] qui utilise une méthode tout à fait différente. La seconde est nouvelle. Le théorème 3 fournit en fait une approximation "lisse" pour $\psi(2x,y)/\psi(x,y)$ même dans les régions où l'on sait que chacun des termes de ce rapport possède un comportement très irrégulier.

Le cas où $h \longrightarrow 1$ relève de l'étude des "petits intervalles". Là encore, la méthode du col s'avère remarquablement efficace et a permis, notamment dans le cas de $\psi(x,y)$, d'améliorer considérablement les estimations antérieures. Le lecteur intéressé par cet aspect de la question pourra se reporter au *Theorem* 4 de [19].

4. Entiers sans grand facteur premier : application indirecte

L'emploi de la formule de Taylor pour évaluer l'intégrande de l'intégrale de Perron au voisinage du point–selle $\sigma=\alpha$ implique une erreur systématique que l'on peut dans certains cas éviter.

Supposons par exemple que l'on sache montrer :

(a) que l'intégrale

$$I= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} x^s \frac{f(s)}{s}\, ds$$

est dominée par un petit voisinage du point $s=\alpha$, disons $|\tau|\le T_0$.

(b) que l'on ait pour $|\tau|\le T_0$, $\mathrm{Re}(s) = \alpha$,

$$\frac{f(s)}{s} \sim \hat{g}(s) := \int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv$$

où g est une fonction connue.

(c) que l'intégrale (convergeant en valeur principale)

$$g(v)= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha- i\infty}^{\alpha+ i\infty} e^{sv}\, \hat{g}(s)ds$$

soit, pour $v= \log x$, dominée par un petit voisinage de $s=\alpha$.

Alors il est naturel d'attendre que

$$(27) \qquad I \sim \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} x^s\, \hat{g}(s)ds= g(\log x)$$

Cette situation est le modèle d'un emploi "indirect" de la méthode du col, où l'on utilise seulement le fait que l'intégrale de Perron est dominée par la contribution d'un petit intervalle mais où le calcul de cette contribution prépondérante est effectué, sans recours à un développement de Taylor, par transformation de Laplace inverse.

Le cas de $\psi(x,y)$ peut être traité de cette façon lorsque x et y satisfont (19), ainsi que l'a montré Saias [25]. Plus précisément, on a, sous l'hypothèse (19), avec $s= \alpha+i\tau$, $|\tau| \le Y := \exp\{(\log y)^{3/5-\epsilon}\}$,

$$s^{-1}\zeta(s,y)= \log y.\hat{\lambda}_y((s-1)\log y)(1+O(Y^{-1}))$$

avec

$$\hat{\lambda}_y(s) := \frac{s}{s+\log y}\, \zeta(1 + \frac{s}{\log y})\, \hat{\rho}(s)$$

où $\hat{\rho}$ désigne la transformée de Laplace de la fonction de Dickman ρ. Or $\hat{\lambda}_y(s)$ est la transformée de Laplace de

$$\lambda_y(v) := \int_0^\infty \rho(v - \frac{\log t}{\log y})d(\frac{[t]}{t}).$$

L'incidence de cette fonction dans l'étude de $\psi(x,y)$ n'est pas nouvelle. Posant $\Lambda(x,y) := x\, \lambda_y(u)$, de Bruijn [3] a montré que l'on a

$$(28) \qquad |\psi(x,y)-\Lambda(x,y)| \ll x\, u^2\, Y^{-1}$$

pour $x > 0$, $y \ge 2$. Lorsque u est très grand, le terme d'erreur dépasse de beaucoup le terme principal mais (28) fournit un équivalent asymptotique pour $\psi(x,y)$ dans le domaine

$$(29) \qquad x \ge 2, \quad \exp\{(\log x)^{5/8+\epsilon}\} \le y \le x.$$

Sous cette condition, on a

$$(30) \qquad \psi(x,y)= \Lambda(x,y)(1+O(Y^{-1}))$$

En utilisant la forme "indirecte" de la méthode du col, Saias a considérablement étendu le domaine de validité de cette formule asymptotique.

Théorème 4 (Saias). *Pour chaque* $\epsilon>0$, *l'évaluation* (30) *persiste uniformément dans le domaine*

$$(19) \qquad x \geq 3, \quad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\epsilon}\} \leq y \leq x.$$

Ce résultat permet en particulier de préciser le résultat de Hildebrand (18) : dans [25] Saias explicite un développement asymptotique de $\psi(x,y)$ valable dans le domaine (19).

5. Répartition des valeurs de $\Omega(n)$ pour les entiers sans grand facteur premier

Soit $\Omega(n)$ le nombre des facteurs premiers, comptés avec leur ordre de multiplicité, d'un entier n. Le célèbre théorème d'Erdös–Kac énonce que la répartition des valeurs de $\Omega(n)$ pour $1 \leq n \leq x$ est proche d'une loi de Gauss de moyenne $\log_2 x$ et d'écart type $\sqrt{\log_2 x}$. Plusieurs auteurs [2, 13, 14, 18] se sont récemment intéressés à la manière dont cette loi de Gauss se déforme lorsqu'on restreint l'étude aux entiers $n \leq x$ tels que $P(n) \leq y$.

Dans [18], Hildebrand a choisi d'attaquer le problème par le biais de la fonction caractéristique (au sens probabiliste) de la répartition, i.e.

$$S(x,\theta) := \sum_{\substack{n \leq x \\ P(n) \leq y}} e^{i\theta\Omega(n)}$$

de manière à obtenir ensuite les renseignements souhaités sur la distribution par le théorème de Berry–Esseen (cf. par exemple [9] p. 538). L'étude de $S(x,\theta)$ peut encore être effectuée par la méthode du col, mais des difficultés nouvelles apparaissent, dues notamment au fait que la fonction multiplicative en cause n'est plus à valeurs positives.

Les théorèmes obtenus par Hildebrand améliorent notablement les résultats antérieurs. Sans les détailler ici, nous nous contenterons d'en illustrer la nature par le corollaire suivant, qui découle essentiellement du cas $\theta=\pi$ de l'étude.

Théorème 5 (Hildebrand). *On a pour chaque* $\epsilon>0$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P(n) \leq y}} \mu(n) \ll \psi(x,y) \exp\{-(\log y)^{3/2-\epsilon}\}$$

uniformément pour

$$x \geq 2, \quad 2 \leq y \leq \exp\{(\log x)^{1/21}\}.$$

Ce résultat a permis de confirmer une conjecture de Alladi.

Théorème 6 (Alladi–Hildebrand). *On a uniformément pour* $x \geq y \geq 2$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P(n) \leq y}} \mu(n) \ll \psi(x,y)/\log x.$$

Le cas $y \leq (1-\epsilon)\log x$ est trivial : d'après le théorème des nombres premiers, on a alors

$$N := \prod_{p \leq y} p \leq x$$

d'où

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ P(n) \leq y}} \mu(n) = \sum_{n \mid N} \mu(n) = 0.$$

Le cas $(1-\epsilon)\log x < y \leq \exp\{(\log x)^{1/21}\}$ découle (avec une marge considérable) du théorème 5, et le cas $y > \exp\{(\log x)^{1/21}\}$ a été traité par Alladi [1] en utilisant la méthode de l'équation fonctionnelle.

6. Entiers sans facteur carré et sans grand facteur premier

L'existence de formules semi–asymptotiques pour la fonction $\psi(x,y)$ peut être exploitée avec une surprenante efficacité dans une vaste classe de problèmes : l'étude de la valeur moyenne d'une fonction arithmétique restreinte aux entiers sans grand facteur premier. Nous considérons ici le cas typique de la fonction $\mu(n)^2$ caractéristique des entiers sans facteur carré, soit

$$\psi_1(x,y)= \sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq y}} \mu(n)^2.$$

On peut en effet écrire

$$\psi(x,y)= \sum_{\substack{n\leq x\\ P(n)\leq y}} \sum_{d^2|n} \mu(d)= \sum_{\substack{d\leq\sqrt{x}\\ P(d)\leq y}} \mu(d)\psi(\frac{x}{d^2},y).$$

Lorsque d n'est pas trop grand, le théorème 3 permet de remplacer dans la dernière expression $\psi(x/d^2,y)$ par

$$\psi(x,y)d^{-2\alpha}(1+O(R(x,y,d))$$

où $R(x,y,d)$ est un terme d'erreur explicite. Si l'on peut montrer que ce sont précisément ces petites valeurs de d qui fournissent la contribution principale, on obtient donc ainsi une formule asymptotique pour $\psi_1(x,y)/\psi(x,y)$.

Cette démarche a été suivie dans [21], où un théorème général de cette nature a été démontré. Dans le cas de $\psi_1(x,y)$, on obtient le résultat suivant :

Théorème 7 (Ivić–Tenenbaum). *Pour* $x\geq y\geq 2$, *désignons par* $k= k(x,y)$ *la quantité implicitement définie par*

$$y= (\log x)^k.$$

Alors on a uniformément, lorsque $x,y\to\infty$,

$$\psi_1(x,y)= \{\zeta^{-1}(1+(k-2)^+/k)+o(1)\}\psi(x,y).$$

Lorsque $k\leq 2$, on pose bien entendu $\zeta^{-1}(1)=0$. Il découle en particulier du théorème 7 que l'on a

$$\psi_1(x,y)\sim \frac{6}{\pi^2}\psi(x,y)$$

si, et seulement si, $\log y/\log_2 x\to\infty$, alors que

$$\psi_1(x,y)= o(\psi(x,y))$$

si, et seulement si, $\log y/\log_2 x\leq 2 + o(1)$.

7. Solution d'une conjecture d'Erdõs.

Considérons, pour chaque entier n, la suite ordonnée de ses diviseurs

$$1= d_1<d_2<\ldots<d_\tau= n$$

et la famille de fonctions arithmétiques

$$F_\alpha(n) := \sum_{1\leq i<\tau(n)} (\log(d_{i+1}/d_i))^\alpha$$

où α est un paramètre positif. On a

$$F_1(n)= \log n \qquad (n\geq 1)$$

mais Erdõs a conjecturé dans [8] que l'on a pour tout $\alpha > 1$

$$\liminf_{n\to\infty} F_\alpha(n) < \infty \tag{31}$$

et plus précisément que l'on a pour $k\geq 1$

$$\left.\begin{array}{l} F_\alpha(k!) \\ F_\alpha([1,2,\ldots,k]) \\ F_\alpha(\prod_{p\leq k} p) \end{array}\right\} \ll_\alpha 1. \tag{32}$$

Vose [30] a établi (31) en construisant explicitement une suite *ad hoc*, mais sa démonstration n'apporte aucune précision sur le comportement des suites envisagées en (32). Une analyse du problème révèle qu'il suffit dans ce cas d'établir l'existence de diviseurs d'un entier n (parcourant ces suites spéciales) dans de petits intervalles centrés au voisinage de $\sqrt{n}$. Or, le nombre H(n) des diviseurs d de n tels que

$$|\log(d/x)| \leq \eta/2$$

vaut exactement

$$H(n) = \frac{\eta}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tau(n,\theta)x^{-i\theta}\left(\frac{\sin(\eta\theta/2)}{\eta\theta/2}\right)d\theta$$

où l'on a posé

$$\tau(n,\theta) = \sum_{d|n} d^{i\theta}.$$

Ainsi, H(n) s'exprime comme différence de deux intégrales de Perron sur la droite $\sigma=0$. Il n'y a pas, *a priori*, de paramètre libre à choisir dans ce contexte, mais on peut remarquer que pour $|\theta|$ petit, on a

$$\tau(n,\theta) = \prod_{p^\nu \| n}\left(\sum_{j=0}^{\nu} p^{ij\theta}\right) = \tau(n)n^{i\theta/2}\exp\{-(\tfrac{1}{2}+o(1))\theta^2 S(n)^2\}$$

avec

$$S(n)^2 = \frac{1}{12}\sum_{p^\nu \| n} \nu(\nu+2)(\log p)^2.$$

Lorsque x est suffisamment proche de $\sqrt{n}$, la situation est donc essentiellement la même que dans la méthode du col et l'on peut attendre une semblable qualité de résultats. Nous avons suivi cette voie dans [29] et pu ainsi établir les conjectures (32).

Le point délicat de la démonstration est l'analogue de la condition (H4) de la section 1. Dans un premier temps, nous établissons l'inégalité suivante, valable pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{|\tau(n,\theta)|}{\tau(n)} \leq \exp\{-\tfrac{2}{3}\sum_{p^\nu \| n} \min(1,(\nu+1)^2\|\tfrac{\theta}{2\pi}\log p\|^2)\}$$

où $\|t\|$ désigne la distance du réel t à l'ensemble des entiers. Ensuite, le résultat escompté découle du lemme suivant, qui, comme les majorations de $|\zeta(s,y)|$ nécessaires à la preuve du théorème 2, est prouvé en faisant appel aux régions sans zéro de Vinogradov pour $\zeta(s)$. Nous notons $\omega(n)$ le nombres des facteurs premiers distincts de l'entier n.

Lemme. *Soit* c *une constante positive arbitraire. Pour tout* ϵ, $0<\epsilon<1$, *il existe un* $n_0 = n_0(\epsilon)$ *tel que pour* $n \geq n_0$ *et*

$$\omega(n) > P(n)(\log P(n))^{-c-1+\epsilon}$$

on ait

$$\sum_{p|n} \|\theta \log p\|^2 > \frac{\omega(n)}{4\pi^2}$$

pour chaque réel θ *satisfaisant à*

$$(\log P(n))^c \leq |\theta| \leq \exp\{(\log P(n))^{3/2-\epsilon}\}.$$

A titre d'exemple de résultat de localisation de diviseurs apparaissant comme sous–produit dans la preuve des conjectures (32), citons le théorème suivant :

Théorème 8 (Tenenbaum [29]). *Soit* $\psi(k)\to\infty$, *et* β *un réel,* $0<\beta<3/2$. *Il existe une constante* A *telle que, pour* k *assez grand et pour tout* x *satisfaisant à*

$$\exp\{-k/\psi(k)\} \le x/\sqrt{k!} \le \exp\{k/\psi(k)\},$$

le nombre $D(k,x)$ *des diviseurs* d *de* k! *tels que*

$$x(1-\exp\{-(\log k)^{\beta}\}) \le d \le x(1+\exp\{-(\log k)^{\beta}\})$$

vérifie

$$D(k,x) \ge k^{-A}\exp\{-(\log k)^{\beta}\}\tau(k!).$$

8. Cas de deux variables complexes : noyau d'un entier, et lois locales pour $\omega(n)$.

Nous nous proposons ici de décrire brièvement l'emploi de la méthode du col dans deux exemples concrets nécessitant l'introduction de deux variables complexes.

Le premier problème est celui de la répartition des valeurs de la fonction arithmétique

$$k(n) := \prod_{p\mid n} p$$

souvent désignée sous le nom de "noyau" de n. Il s'agit donc d'évaluer

$$N(x,y)= \mathrm{card}\{n\le x : k(n)\le y\}.$$

La question est *a priori* plus délicate que celle de $\psi(x,y)$ car la fonction caractéristique de l'ensemble des n tels que $k(n)\le y$ n'est pas multiplicative. Cela conduit à introduire la série de Dirichlet de deux variables complexes

$$\begin{aligned} f(s,w) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}k(n)^{-w} = \prod_p (1-p^{-w}(p^s-1)^{-1}) \\ &= \zeta(s+w)g(s,w), \qquad (33)\end{aligned}$$

disons, où $g(s,w)$ est une série de Dirichlet absolument convergente pour $\mathrm{Re}(2s+w)>1$. Pour tous $\alpha,\beta>0$ tels que $\alpha+\beta>1$, on a alors

$$N(x,y)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} f(s,w)\frac{x^s y^w}{sw}\,ds\,dw \quad (x,y\in\mathbb{R}_+\backslash\mathbb{N}). \tag{34}$$

Dans [28], Squalli a adopté la démarche suivante. Dans un premier temps, il utilise la représentation (33) pour évaluer l'intégrale en s par la méthode classique reposant sur le théorème des résidus. Le pôle en $s=1-w$ fournit la contribution principale, et l'on obtient

$$\sum_{n\le x} k(n)^{-w} = \frac{x^{1-w}}{1-w}\,g(1-w,w) + \text{reste}$$

lorsque w parcourt une certaine bande verticale. Ensuite, il applique la méthode du col pour estimer l'intégrale en w. Ici encore, le point crucial est la majoration du rapport

$$|g(1-w,w)/g(1-\alpha,\alpha)| \qquad (w=\alpha+i\tau)$$

pour les valeurs "intermédiaires" de $\tau=\mathrm{Im}(w)$. La fonction qui joue ici le rôle de la fonction ρ de Dickman dans l'étude de $\psi(x,y)$ est définie explicitement par une série :

$$F(t) := e^t - \frac{6}{\pi^2}\sum_{m\le e^t}\Big(\frac{e^t}{m}-1\Big)\prod_{p\mid m}\frac{1}{(p+1)}. \tag{35}$$

On peut montrer que F est dérivable pour $t>0$ et satisfait l'évaluation asymptotique

$$F(t)= \exp\{(1+o(1))\sqrt{8t/\log t}\} \qquad (t\to\infty). \tag{36}$$

Dans [28], un développement asymptotique de $\log F(t)$ est explicité. Le résultat principal est le suivant.

Théorème 9 (Squalli). *Pour* $x \geq y \geq 2$, *posons*

$$v = \log(x/y).$$

On a

$$N(x,y) = y\,F(v)\left(1+O\left(\sqrt{\frac{\log(v+2)}{\log x}}\right)\right) \tag{37}$$

pour tout couple $\{x,y\}$ *tel que*

$$x \geq 16, \quad \exp\{5(\log x.\log_2 x)^{3/4}\} \leq y \leq x. \tag{38}$$

Au prix de complications techniques, il est envisageable de traiter ce problème en évaluant chacune des deux intégrales complexes apparaissant en (34) par la méthode du col. On obtiendrait probablement alors une extension du domaine de validité (38) à une région du type

$$\exp\{(\log x)^{1/2+\epsilon}\} \leq y \leq x.$$

En l'état actuel, la méthode fournit bien entendu des formules semi—asymptotiques et des estimations concernant les petits intervalles. Renvoyant le lecteur à [28] pour les énoncés correspondants, nous citons seulement le résultat suivant.

Théorème 10 (Squalli). *On a uniformément pour* x,y *satisfaisant* (38) *et* $x/y \to \infty$

$$N(2x,y) \sim N(x,y). \tag{39}$$

Signalons enfin que la méthode du col fournit aussi l'estimation suivante, qui améliore considérablement un résultat de de Bruijn [5].

Théorème 11 (Squalli). *Il existe une suite de polynômes* $\{P_j : j = 1,2,3,\ldots\}$, *avec* $\deg(P_j) \leq j$, *telle que, pour chaque entier* $N \geq 1$, *on ait uniformément pour* $x \geq 16$

$$\sum_{n \leq x} k(n)^{-1} = \exp\left\{\sqrt{\frac{8\log x}{\log_2 x}}\left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{P_j(\log_3 x)}{(\log_2 x)^j} + O_N\left(\left(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\right)^{N+1}\right)\right)\right\}.$$

Notre second exemple d'application de la méthode du col avec plusieurs variables complexes concerne le problème des lois locales pour la fonction $\omega(n)$ égale au nombre des facteurs premiers distincts de n. Il s'agit donc d'évaluer la quantité

$$\pi(x,k) := \mathrm{card}\{n \leq x : \omega(n) = k\}.$$

Généralisant un résultat de Landau [22] valable pour $k \ll 1$ et une formule d'Erdös [7] applicable pour $k \sim \log_2 x$, Sathe [26] et Selberg [27] ont prouvé en 1954 que l'on a

$$\pi(x,k) \sim F(y)\,\frac{x}{\log x}\,\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{40}$$

uniformément pour $k \ll \log_2 x$, où l'on a posé

$$y := k/\log_2 x \tag{41}$$

et

$$F(y) := \frac{1}{\Gamma(y+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^y \left(1 + \frac{y}{p-1}\right). \tag{42}$$

Le domaine de validité de (40) n'a pas été amélioré pendant plus de 30 ans. Ce n'est qu'en 1985 que Hensley a montré [12] que (40) a lieu si, et seulement si, $k = o\left((\log_2 x/\log_3 x)^2\right)$. Il utilise à cet effet une approche probabiliste reposant en partie sur la méthode du col.

La méthode de Selberg consiste à écrire l'intégrale de Cauchy

$$\pi(x,k)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\sum_{n\le x} z^{\omega(n)}\frac{dz}{z^{k+1}} \tag{43}$$

et à calculer la somme en n par la formule de Perron

$$\sum_{n\le x} z^{\omega(n)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(z,s)\frac{x^s}{s}\,ds \tag{44}$$

avec

$$F(z,s)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{\omega(n)}n^{-s}=\prod_p (1+z/(p^s-1)).$$

Pour évaluer (44), Selberg utilise le fait que $F(z,s)$ possède en $s=1$ une singularité de même nature que celle de $\zeta(s)^z$. L'estimation ainsi obtenue est ensuite reportée dans (43), où, pour un choix judicieux de r, la contribution du terme d'erreur peut être convenablement majorée.

Dans un récent travail en commun avec Hildebrand [20], nous abordons le problème par la méthode du col en deux variables. Cela consiste d'abord à choisir σ et r comme solutions du système

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial\sigma}\log F(r,\sigma) &= \sum_p \frac{r\log p}{(1-p^{-\sigma})(p^{\sigma}-1+r)} = \log x \\ \frac{\partial}{\partial r}\log F(r,\sigma) &= \sum_p \frac{1}{p^{\sigma}-1+r} = \frac{k}{r} \end{aligned}\right. \tag{45}$$

Ce choix est d'ailleurs suggéré par la majoration "à la Rankin"

$$\pi(x,k)\le \sum_{n=1}^{\infty} r^{\omega(n)-k}\left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma}= x^{\sigma}r^{-k}F(r,\sigma).$$

Contrairement au cas de l'équation (13) dans l'étude de $\psi(x,y)$, il est ici non trivial que l'on puisse choisir de manière unique les coordonnées du point selle. On établit dans [20] que le système (45) possède une solution unique $(r,\sigma)=(\rho,\alpha)$ tant

que $k\le C_0\log x/\log_2 x$, où C_0 est une constante absolue assez petite. Ce résultat est proche de l'optimum puisque $\pi(x,k)=0$ dès que $k>(1+\epsilon)\log x/\log_2 x$, $x\ge x_0(\epsilon)$.

Une fois le choix des paramètres opéré, on peut estimer successivement les intégrales (44) et (43) par la méthode du col – ce qui suppose bien entendu un contrôle assez précis de la décroissance en θ et τ de $|F(\rho e^{i\theta},\sigma+i\tau)|$. Il est à noter que l'intégrale en τ est traitée par la méthode "indirecte" telle que nous l'avons décrite à la section 4.

Nous citons ici trois corollaires du théorème principal de [20].

Théorème 12 (Hildebrand–Tenenbaum). *Il existe deux constantes positives* A *et* B *telles que l'on ait uniformément pour* $x\ge 3$ *et* $1\le k\ll(\log_2 x)^2$

$$\pi(x,k)=F(y)\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-kh/2}\left(1+O\left(\frac{1}{\log_2 x}+\frac{k}{(\log_2 x)^2}\right)\right) \tag{46}$$

avec

$$h:=\frac{\log(2+Ay\log y)\,.\,\log(2+By\log y)}{(\log x)^2}.$$

Ce résultat contient strictement celui d'Hensley. On peut en effet vérifier facilement que $kh\to 0$ si, et seulement si, $k=o((\log_2 x/\log_3 x)^2)$. Au prix d'une complication croissante du terme principal, la méthode pourrait fournir une formule asymptotique analogue dans un plus large domaine en k.

Théorème 13 (Hildebrand–Tenenbaum). *Posons*

$$L=\log\left(\frac{\log x}{k\log(k+2)}\right),\quad y_1=k/L,\quad \xi=\log x/(y_1\log(y_1+2)).$$

Il existe une constante positive C *telle que l'on ait uniformément pour* $x\ge 3$ *et* $(\log_2 x)^2\ll k\ll\log x/(\log_2 x)^2$

$$\pi(x,k)=\frac{x}{k!\,\log x}\exp\{k(\log M+M^{-1}+O(R))\} \tag{47}$$

avec

$$M = \log\left(\frac{C}{L}\,\xi\log\xi\right), \quad R = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{\log(y_1+2)} + \frac{1}{L}\right).$$

Ce résultat précise un théorème de Pomerance [24].

A titre d'exemple de formule semi–asymptotique, caractéristique de la méthode, nous mentionnons le résultat suivant.

Théorème 14 (Hildebrand–Tenenbaum). *On a uniformément pour* $x \geq 3$, $1 \leq k \ll \log x/(\log_2 x)^2$

$$\frac{\pi(x,k+1)}{\pi(x,k)} = \frac{L}{k}\left(1+O\left(\frac{\log L}{L}\right)\right) \tag{48}$$

Erdös a conjecturé dans [7] que $\pi(x,k)$ est, pour chaque x fixé assez grand, une fonction unimodale de k. Dans [20] on montre, grâce à une remarque de Balazard, que le théorème 14 implique cette unimodalité sous la restriction $1 \leq k \ll (\log x)/(\log_2 x)^2$. Il est possible qu'un argument élémentaire simple permette de compléter la preuve de la conjecture d'Erdös.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Alladi.– Asymptotic estimates for sums involving the Möbius function II, Trans. Amer. Math. Soc. **272** (1982), 87–105.

[2] K. Alladi.– An Erdös–Kac theorem for integers without large prime factors, Acta Arith., **49** (1987), 81–105.

[3] N.G. de Bruijn.– On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $>y$, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **54** (1951), 50–60.

[4] N.G. de Bruijn.– On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $>y$, II, Indag. Math. 28 (1966), 239–247.

[5] N.G. de Bruijn.– On the number of integers $\leq x$ whose prime factors divide n, Illinois J. Math. **6** (1962), 137–141.

[6] V. Ennola.– On numbers with small prime divisors, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI, **440** (1969), 16pp.

[7] P. Erdös.– On the integers having exactly k prime factors, Ann. Math. (2) **49** (1948), 53–66.

[8] P. Erdös.– Some problems and results on additive and multiplicative number theory, Analytic Number Theory (Philadelphia, 1980), Lecture Notes **899** (1981), 171–182.

[9] W. Feller.– An introduction to Probability Theory and its applications, vol. 2 (1966), John Wiley, New–York.

[10] R.R. Hall et G. Tenenbaum.– Divisors, Camb. Univ. Press., Cambridge Tracts n° 90, à paraître.

[11] D. Hensley.– A property of the counting function of integers with no large prime factors, J. Number Theory **22** (1986), 46–74.

[12] D. Hensley.– The distribution of round numbers, Proc. London Math. Soc. (3) **54** (1987), 412–444.

[13] D. Hensley.– An Erdös–Kac theorem for integers with no large prime divisors, J. Number Theory, à paraître.

[14] D. Hensley.– The distribution of the values of $\Omega(n)$ among the integers with no large prime divisors, prépublication.

[15] A. Hildebrand.– Integers free of large prime factors and the Riemann Hypothesis, Mathematika **31** (1984), 258–271.

[16] A. Hildebrand.– On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $>y$, J. Number Theory **22** (1986), 289–307.

[17] A. Hildebrand.– On the local behavior of $\psi(x,y)$, Trans. Amer. Math. Soc. **297** (1986), 729–751.

[18] A. Hildebrand.– On the number of prime factors of integers without large prime divisors, J. Number Theory, **25** (1987) 81–106.

[19] A. Hildebrand et G. Tenenbaum.– On integers free of large prime factors, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), 265–290.

[20] A. Hildebrand et G. Tenenbaum.– On the number of prime factors of an integer, Duke Math. J., à paraître.

[21] A. Ivić et G. Tenenbaum.– Local densities over integers free of large prime factors, Quart. J. Math. Oxford (2), **37** (1986), 401–417.

[22] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, vol. 1, Teubner, Leipzig (1909); 3ème éd. Chelsea, New York (1974).

[23] K. Norton.– Numbers with small prime factors and the least kth power non–residue, Mem. Amer. Math. Soc. N° 106 (1971).

[24] C. Pomerance.– On the distribution of round numbers, in : K. Alladi (Ed.), Number Theory (Proc. Oatacamund, India 1984) 173–200, Springer Lecture Notes **1122**.

[25] E. Saias.– Sur le nombre des entiers sans grand facteur premier, prépublication.

[26] L.G. Sathe.– On a problem of Hardy and Ramanujan on the distribution of integers having a given number of prime factors, J. Indian Math. Soc. **17** (1953), 63–141; 18 (1954), 27–81.

[27] A. Selberg.– Note on a paper by L.G. Sathe, J. Indian Math. Soc. 18 (1954), 83–87.

[28] H. Squalli.– Sur la répartition du noyau d'un entier, Thèse 3ème cycle, Univ. Nancy I (1985).

[29] G. Tenenbaum.– Sur un problème extrémal en arithmétique, Ann. Inst. Fourier, **37**, 2 (1987), 1–18.

[30] M. Vose.– Integers with consecutive divisors in small ratio, J. Number Theory **19** (1984), 233–238.

G. Tenenbaum
Université de Nancy I
Département de Mathématiques
B.P. 239
54506 VANDŒUVRE CEDEX
FRANCE