Fyzikální systém a jeho modelování

na příkladech z mechaniky

Petr Heřman, Ústav biofyziky, UK 2.LF

říjen 2005

1. Proč systém?
2. Proč modelování?
3. Proč mechanika?

1. Proč systém?

a) Co je systém?

systém = soustava

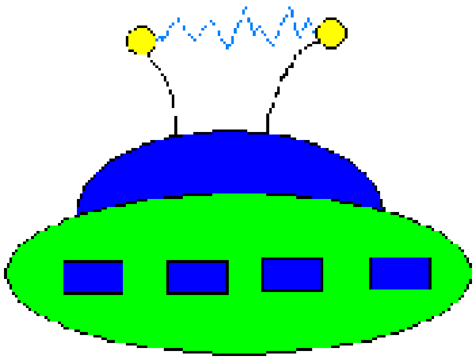
Slovo soustava implikuje, že soustava sestává, že je sestavena z více částí.

Příklady.....

Př. 1 – Neznámý objekt (UFO)

- pozorování (observace, neinvazivní přístup)
- zákonitosti chování
- odhady vstupů a výstupů

-> funkcionální model (blackbox)



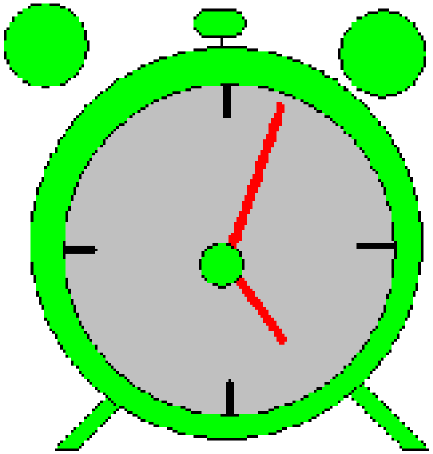
Demonstrace:
Model rovnoměrně zrychleného, rovnoměrného
a rovnoměrně zpomaleného pohybu.

Př. 2 – Budík

- experimentální přístup
- způsoby dělení (analýza. dekomposice)
- struktura systému
- hierarchie systému

… -> základní princip:

harmonický oscilátor



Př. 3 – Živý organismus (člověk)

- experimentální přístup
- systém a jeho subsystémy:
    - soustava oběhová
    - soustava trávící
    - soustava nervová
    - soustava lymfatická
    - … atd.

Cíl přednášky:

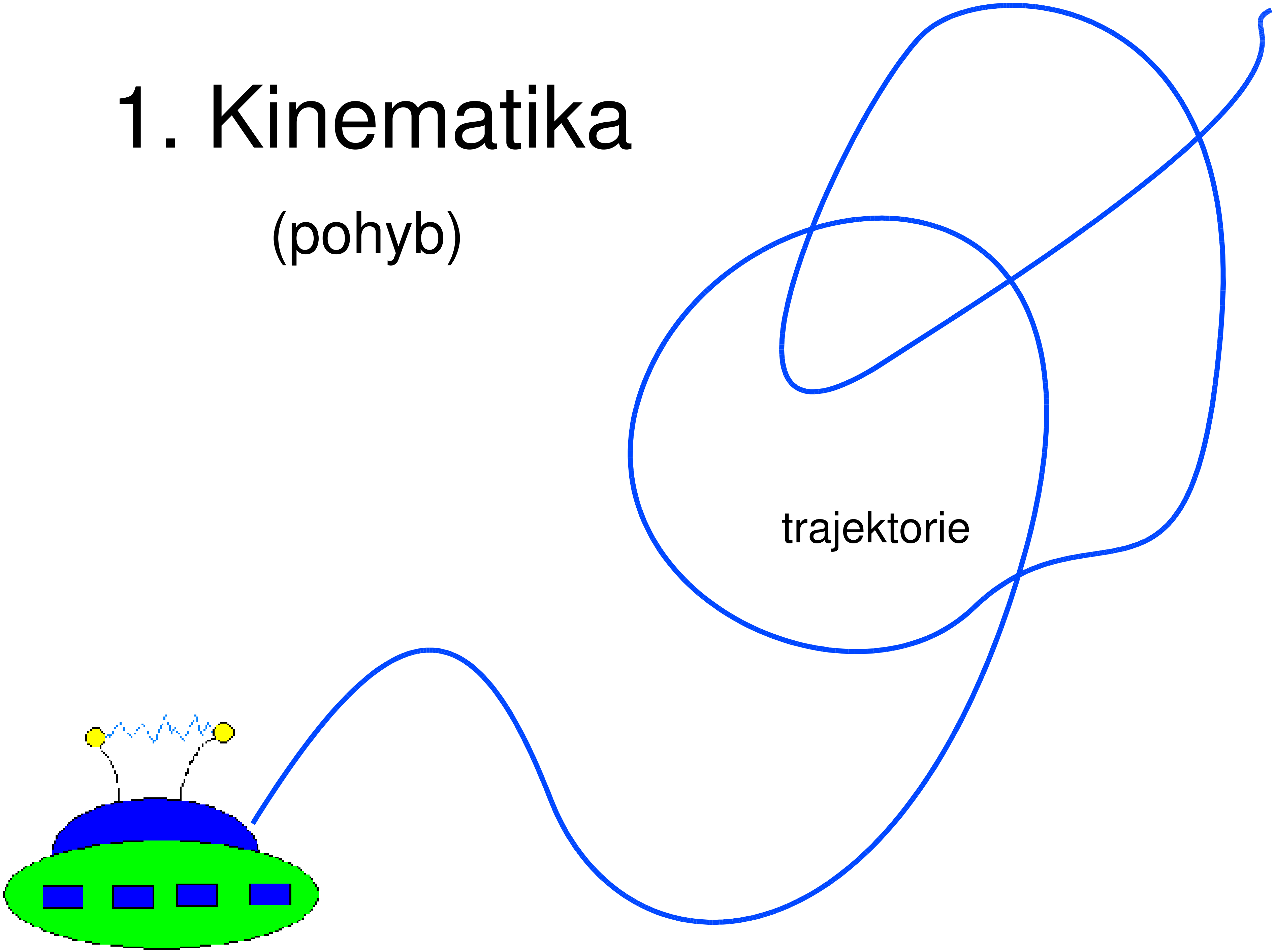
Na několika známých příkladech

(pohyb hmot.bodu, harmonický oscilátor, model krevního oběhu)

- Látku velmi stručně zopakovat:
  - Fyzika:
    - Mechanika
    - Kinematika
    - Dynamika pohybu hmotného bodu
    - Harmonický oscilátor
    - Práce, energie, výkon
    - Pole, potenciál, gradient
    - Hydrodynamika
  - Matematika:
    - Funkce jedné a více proměnných
    - Základy infinitezimálního počtu
- Nahlédnout v nových souvislostech:
  - Diferenciální rovnice ve fyzice
- Precizovat běžně užívané pojmy
  - Fyzikální systém
  - Model

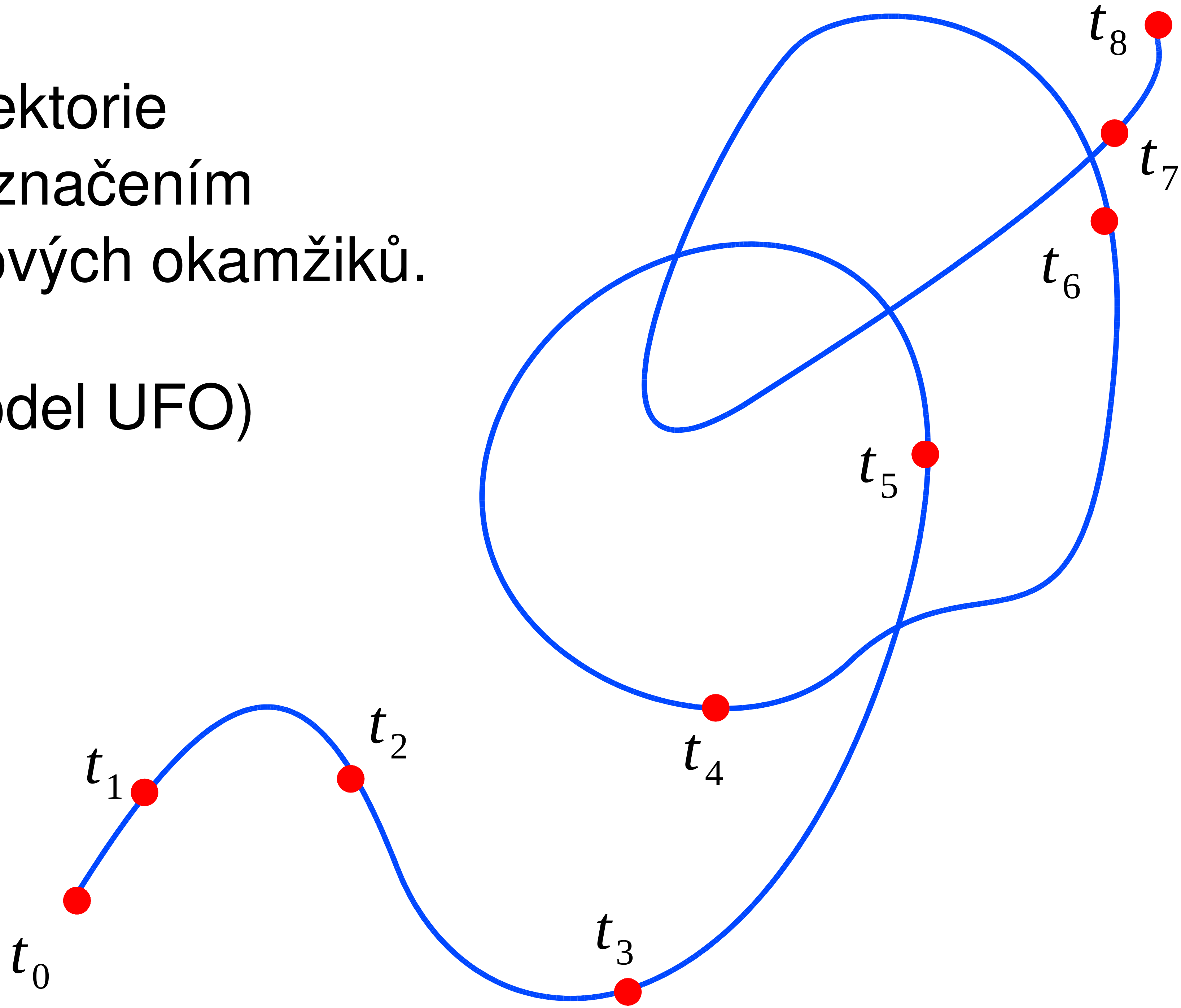
1. Kinematika

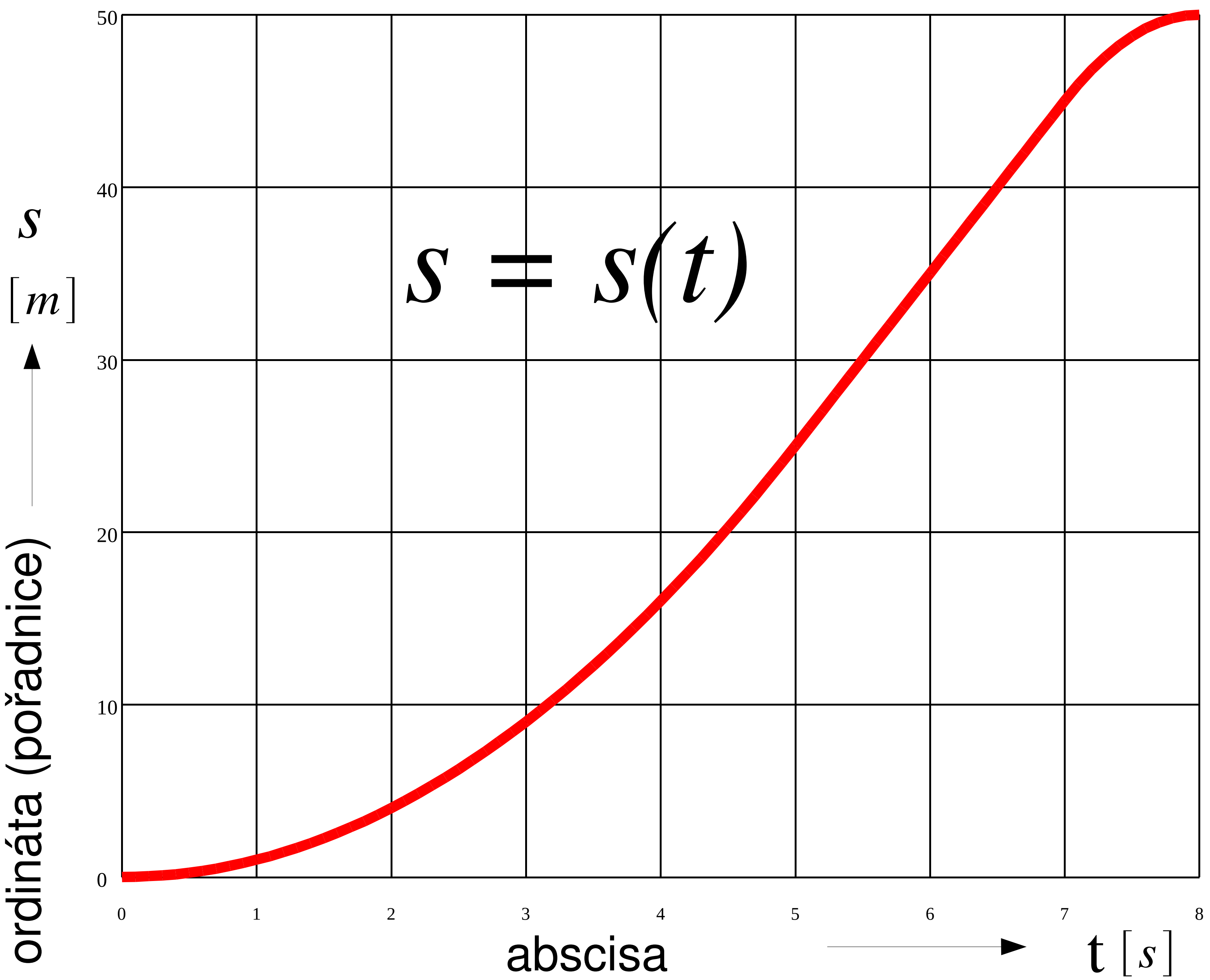
(pohyb)



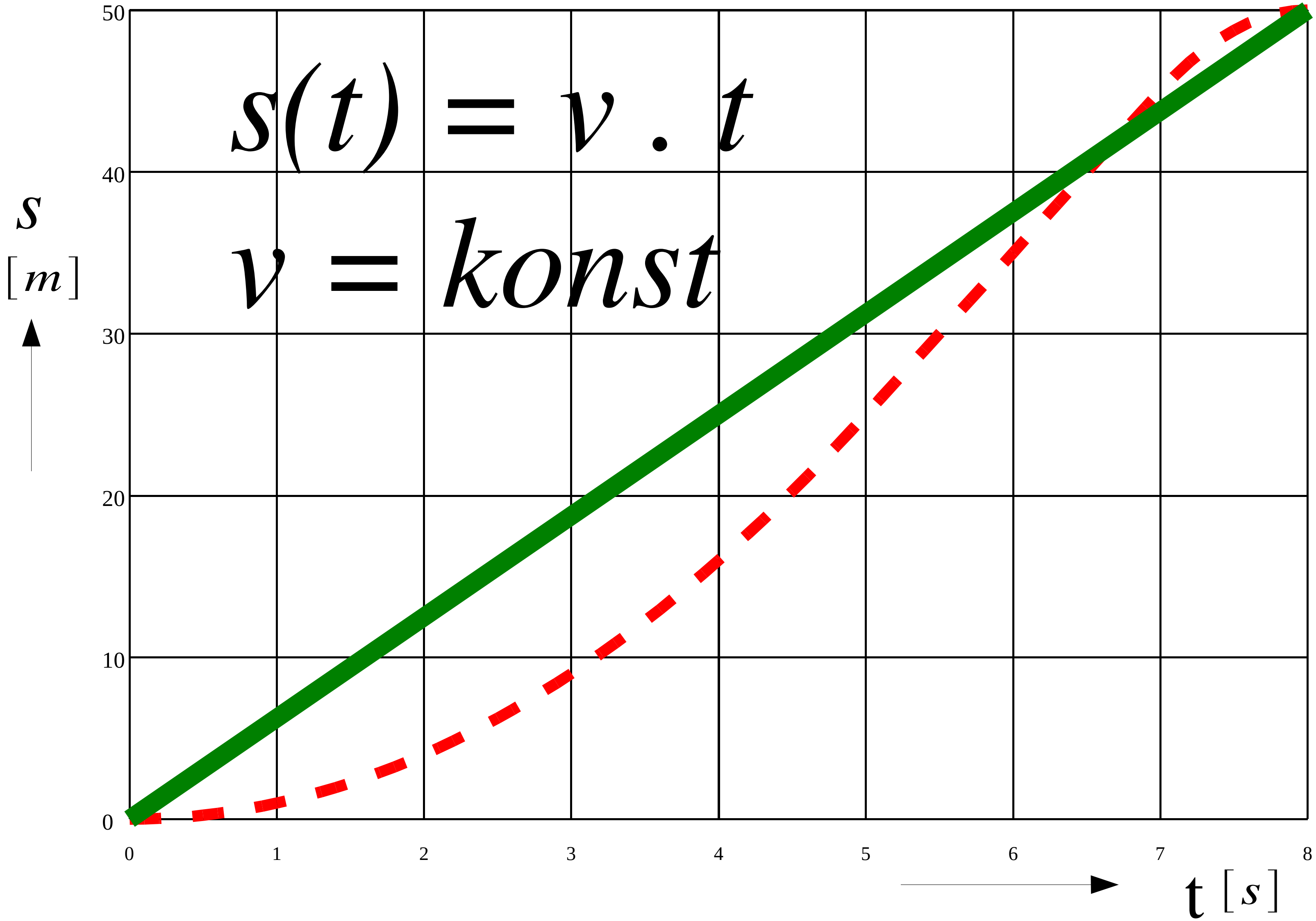
Trajektorie
s vyznačením
časových okamžiků.

(model UFO)

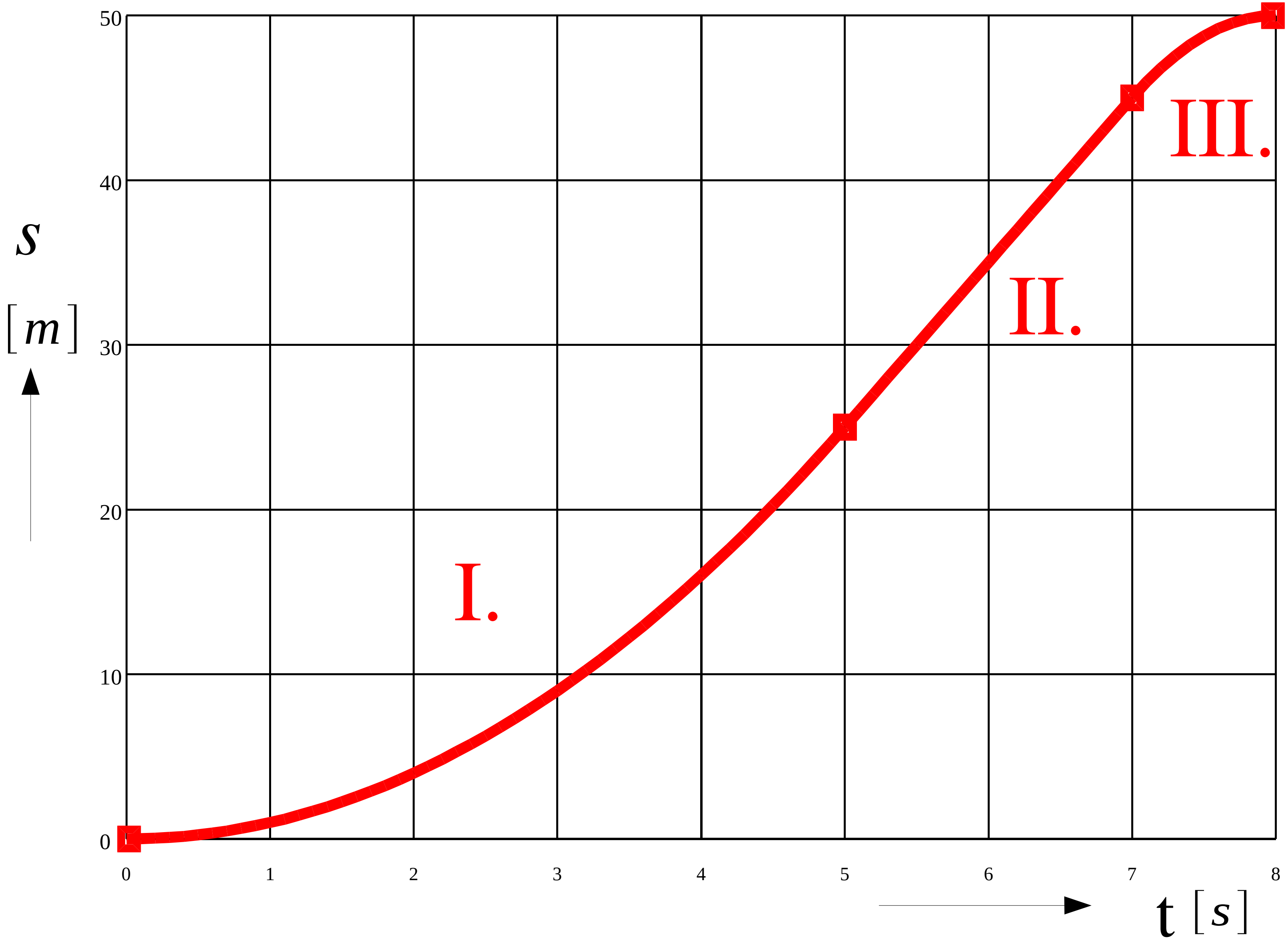




Funkční závislost dvou veličin



Jedna možnost: Linearizace průběhu
-> model rovnoměrného pohybu
s jedním parametrem (průměrná rychlost v)



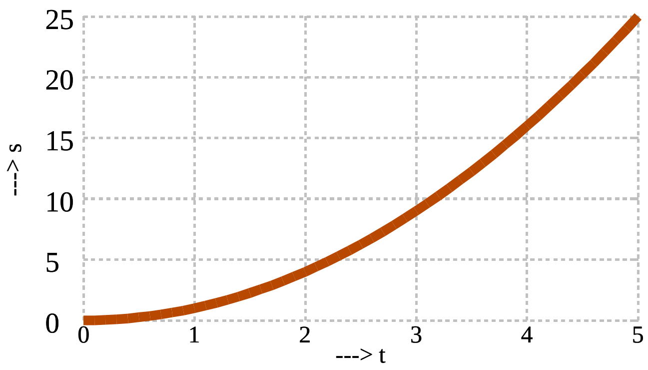
Druhá možnost:

Analýza nerovnoměrného pohybu: tři fáze:

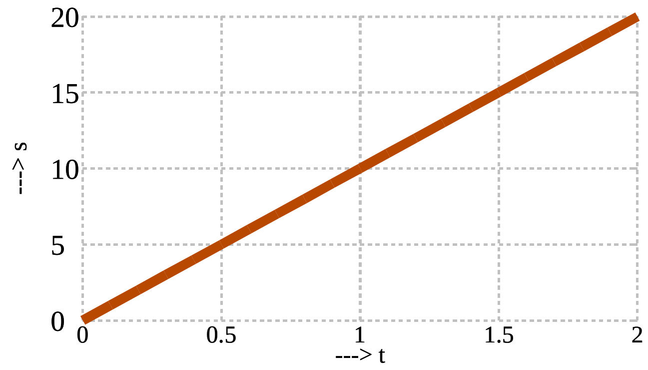
I. zrychlený, II. rovnoměrný a III. zpomalený pohyb

P o h y b :

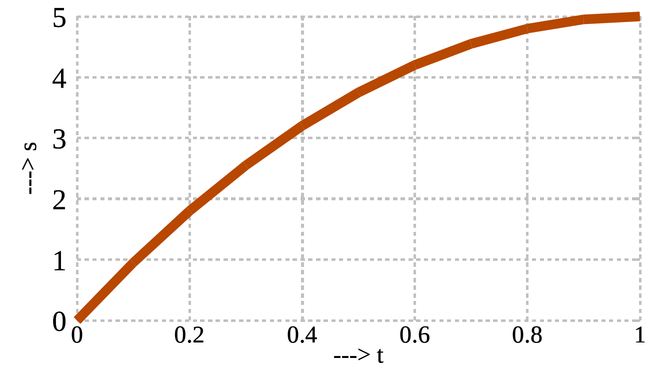
I. rovnoměrně zrychlený



II. rovnoměrný



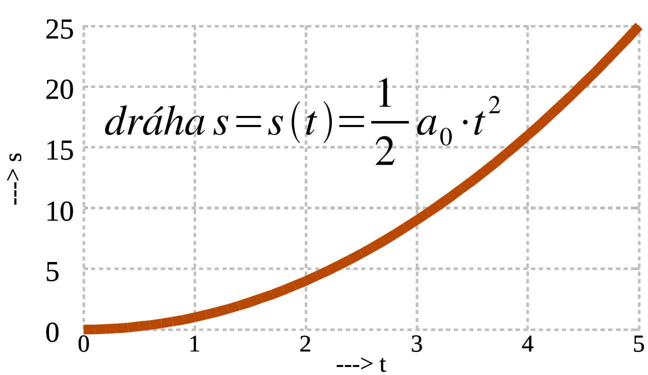
III. rovnoměrně zpomalený



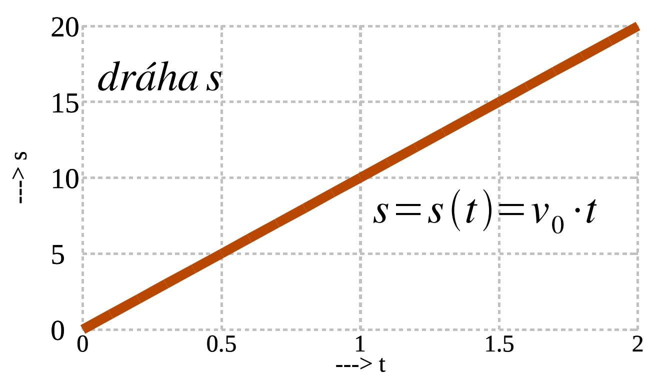
Rozložení (analýza) složitého pohybu na elementární druhy pohybu.

P o h y b :

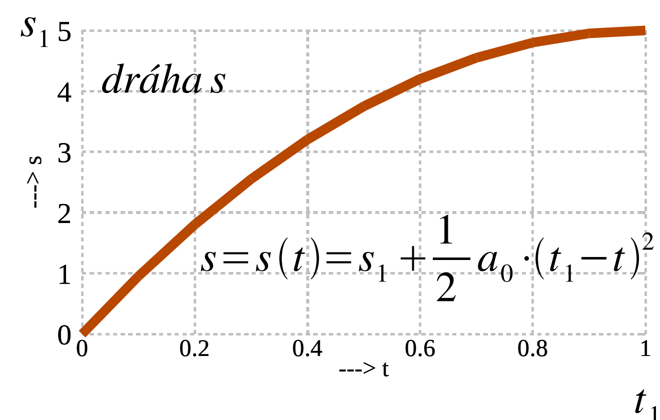
I. rovnoměrně zrychlený



II. rovnoměrný



III. rovnoměrně zpomalený

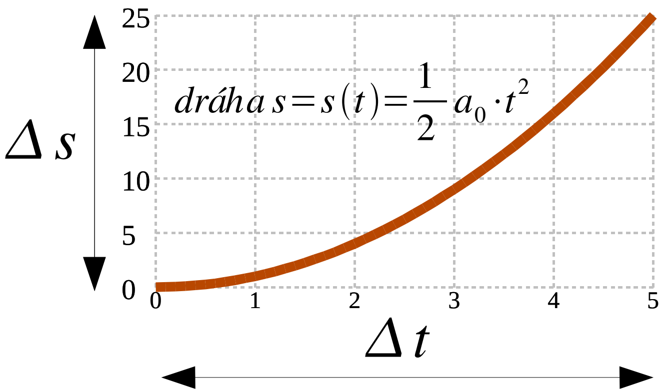


Identifikace jednotlivých druhů elementárních pohybů:

Doplnění známých vztahů určujících pohyb.

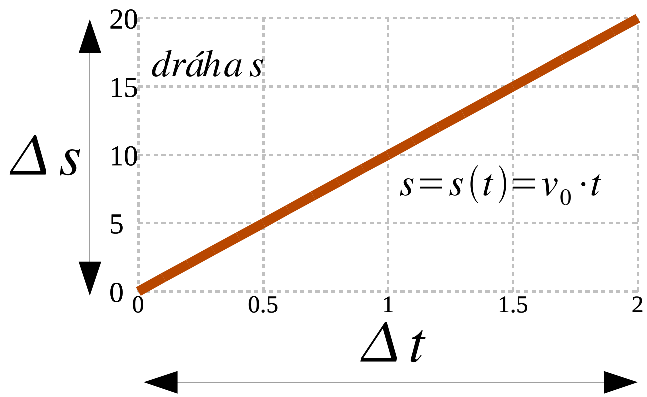
P o h y b :

I. rovnoměrně zrychlený



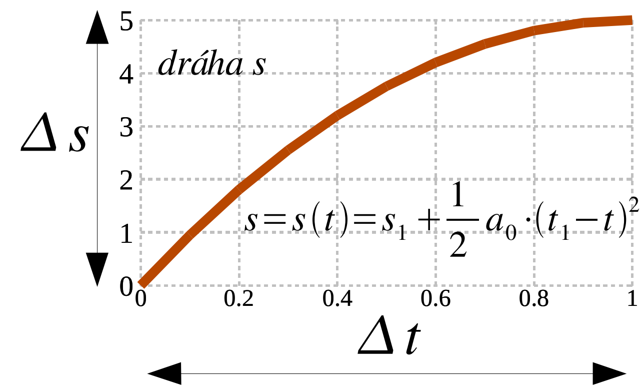
$$a_0 = \frac{2\ \Delta s}{(\Delta t)^2}$$

II. rovnoměrný



$$v_0 = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

III. rovnoměrně zpomalený



$$a_0 = -\frac{2\ \Delta s}{(\Delta t)^2}$$

Po dosazení naměřených hodnot:

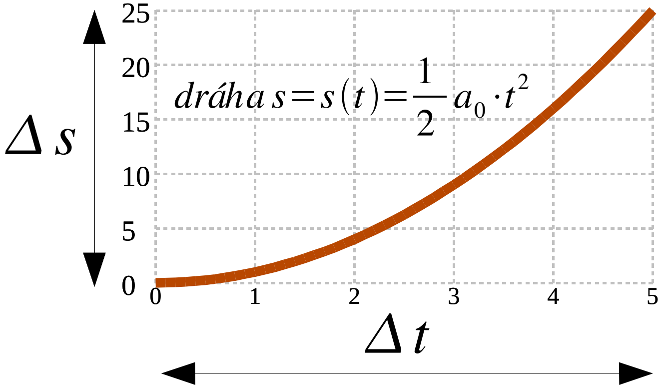
$\Delta t = 5[s], \Delta s = 25[m]$ $\Delta t = 2[s], \Delta s = 20[m]$ $\Delta t = 1[s], \Delta s = 5[m]$

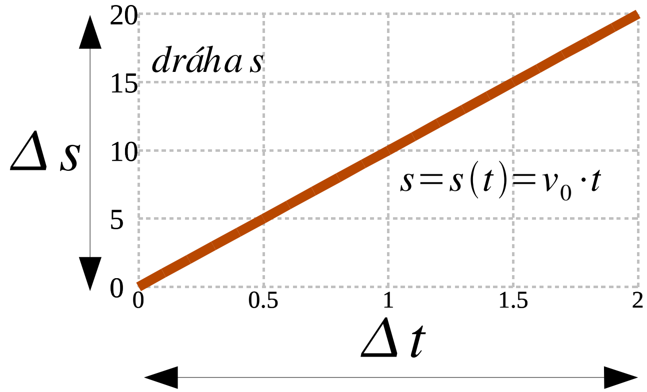
$a_0 = 2\ [m \cdot s^{-2}]$ $v_0 = 10\ [m \cdot s^{-1}]$ $a_0 = -10\ [m \cdot s^{-2}]$

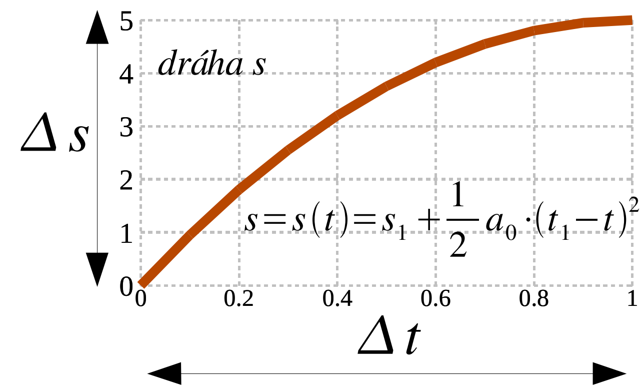
Parametrická identifikace dílčích modelů.

P o h y b :

I. rovnoměrně zrychlený	II. rovnoměrný	III. rovnoměrně zpomalený



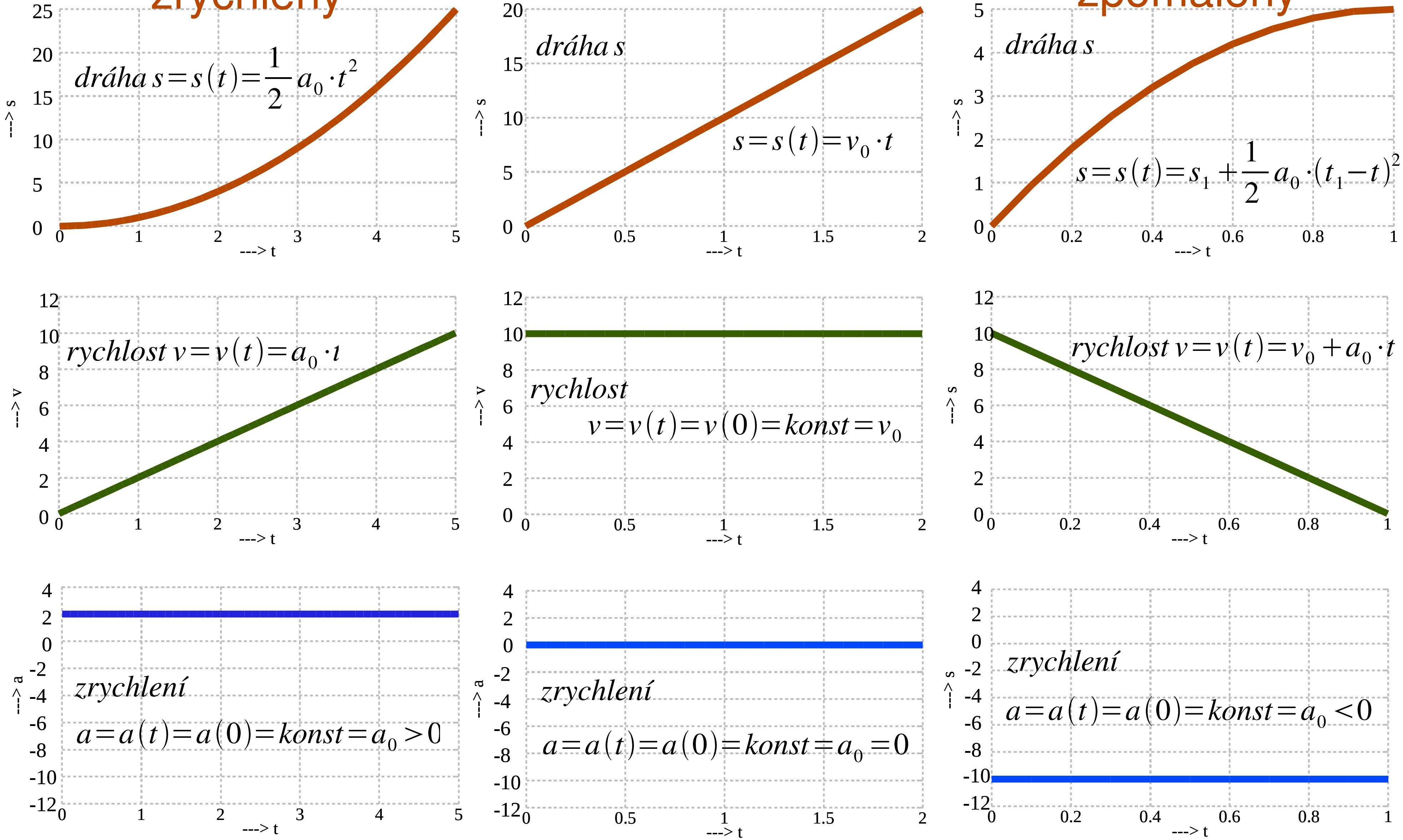




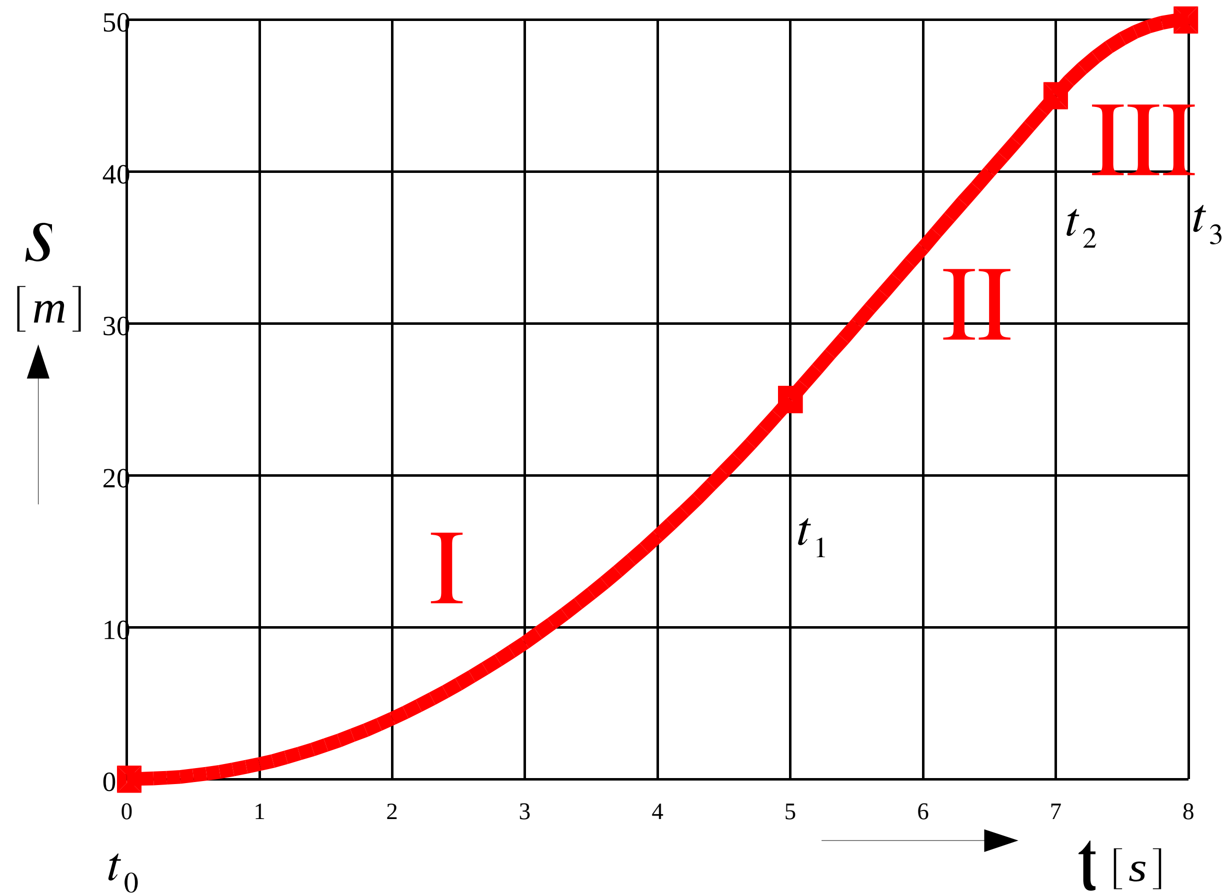
časové okamžiky:	$t_0=0\ [s]$	$t_2=0\ [s]$	$t_0=0\ [s]$	$t_0=0\ [s]$
parametry:	$a_0=2\ [m\cdot s^{-2}]$	$v_0=10\ [m\cdot s^{-1}]$	$a_0=-10\ [m\cdot s^{-2}]$	*STOP*

Parametrická identifikace dílčích modelů.

I. rovnoměrně zrychlený | II. rovnoměrný | III. rovnoměrně zpomalený

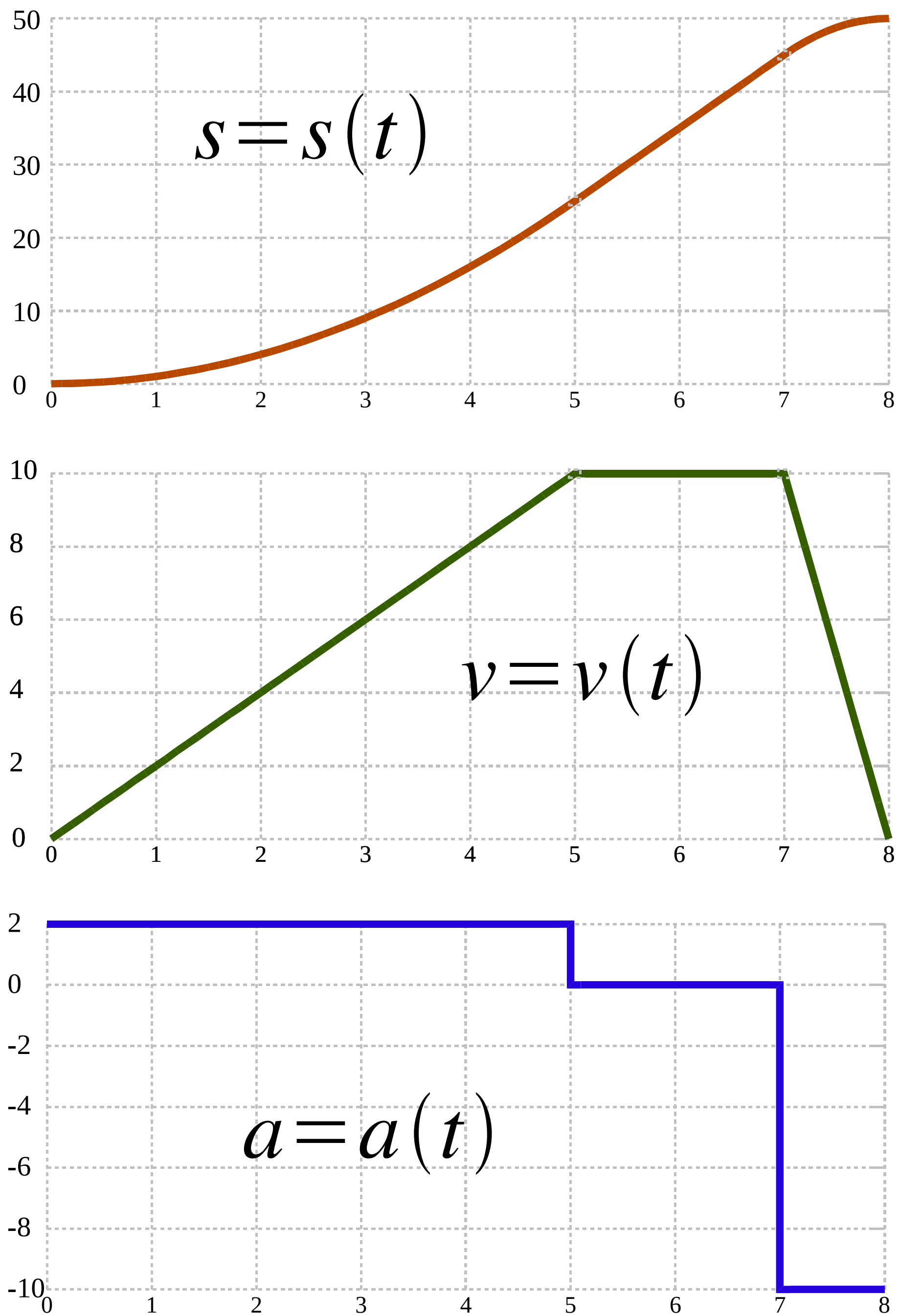


Z vypočtených parametrů snadno určíme průběhy rychlostí a zrychlení.



Opětným spojením dostaneme model, charakterizovaný třemi časovými intervaly a odpovídajícími třemi parametry (indexy na sebe navazují):

časové okamžiky :	$t_0 = 0\ [s]$	$t_1 = 5\ [s]$	$t_2 = 7\ [s]$	$t_3 = 8\ [s]$
parametry :	$a_0 = 2\ [m \cdot s^{-2}]$	$v_1 = 10\ [m \cdot s^{-1}]$	$a_3 = -10\ [m \cdot s^{-2}]$	*STOP*



Po syntéze jednotlivých částí parametrického modelu můžeme složit dohromady i namodelované průběhy rychlosti a zrychlení. Místa zlomu průběhu rychlosti a nespojitosti průběhu zrychlení jsou určena místy, která jsme původně se značnou mírou nejistoty odhadli z průběhu závislosti $s = s(t)$ jako místa, kde křivka mění svůj charakter. Kdybychom měřili přímo rychlost nebo zrychlení, mohli bychom je určit přesněji. Otázka: ?? Jak ale spočítat $v(t)$ a $a(t)$ z $s(t)$ ještě před spočítáním parametrů?

Odpověď:

Ano, se znalostí základního principu infinitesimálního počtu a jeho fyzikální interpretace.

Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz (baroko, 2. pol. XVII. stol.):

Diferenciální a integrální počet se stává základním matematickým nástrojem celého nastupujícího období klasické fyziky.

život = změna

změna = derivace

=> život = derivace

fyzika = změna

=> fyzika = derivace

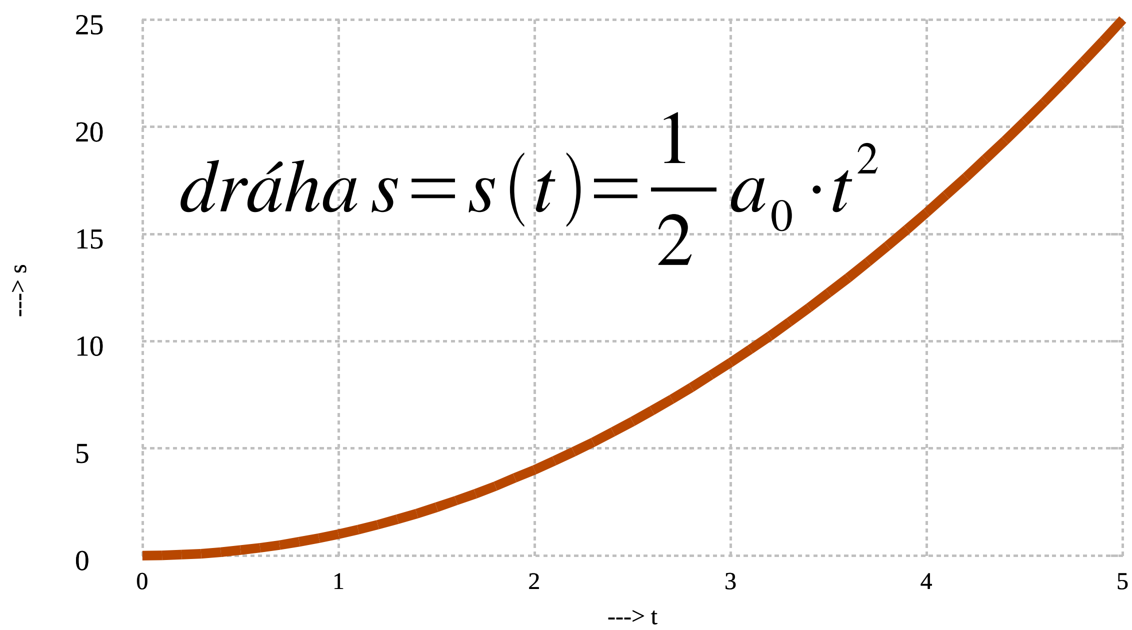
---

biofyzika = druhá derivace

Derivace

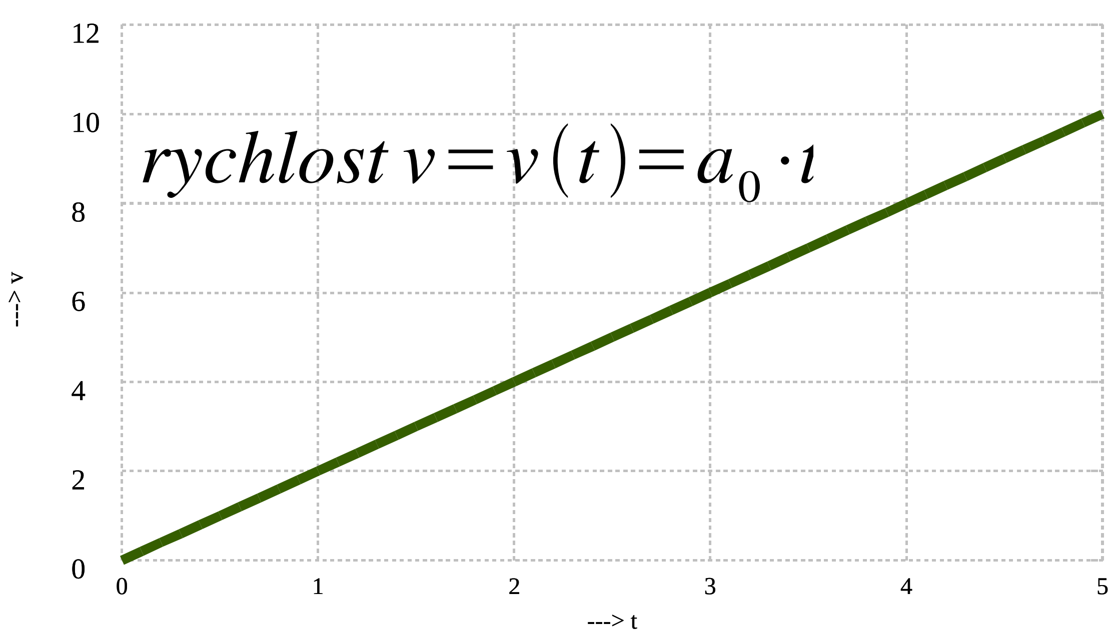
Velká část fyzikálních veličin je odvozena z jiných veličin jejich derivováním.
(lat. derivatio = odvádění vody, odvodňování; přeneseně: odvozování – např. v gramatice).

např:
dráha -> rychlost -> zrychlení
energie -> výkon
el. náboj -> el. proud
el. indukční tok -> indukované napětí



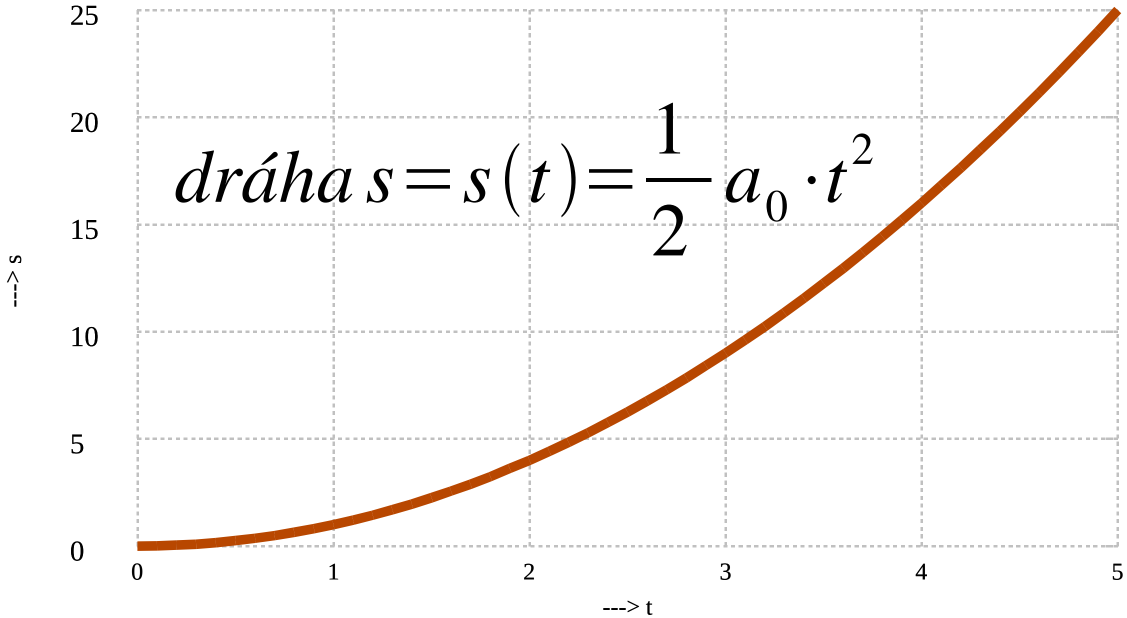
Př.:

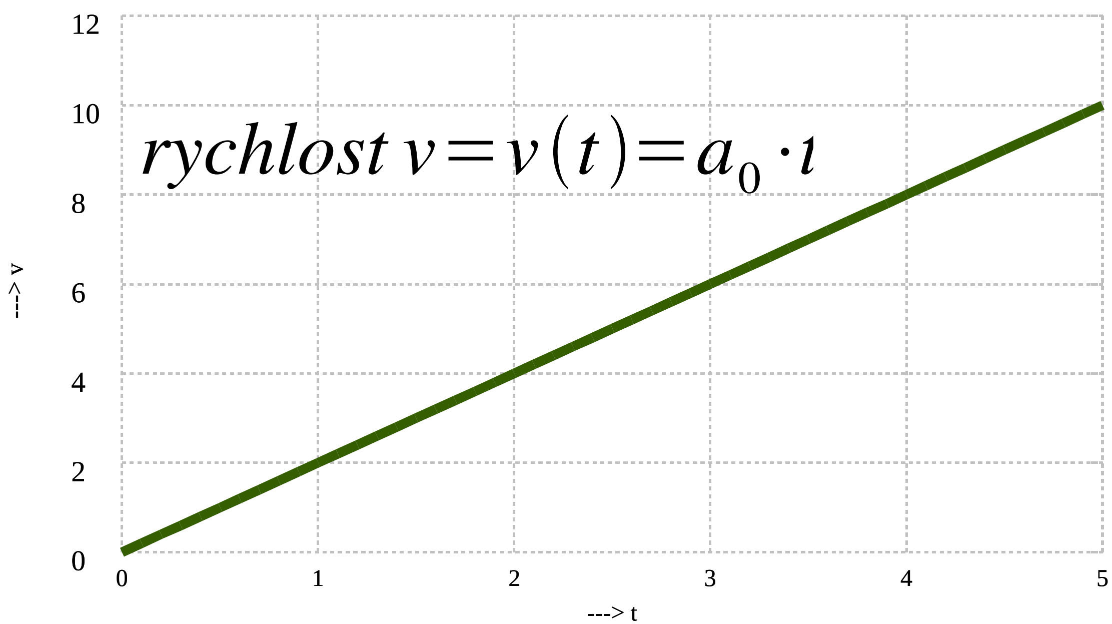
Veličina:
dráha



Její **první derivace podle času**
= rychlost

?? Jak jsem na
to přišel ??



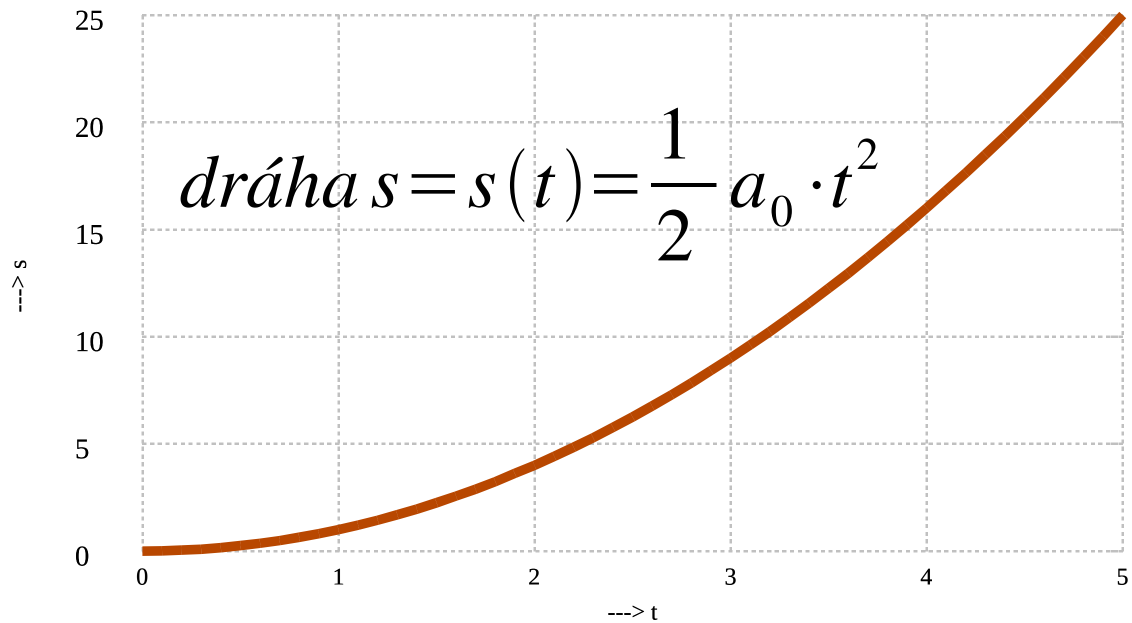


Přijdu na to,
když buď:

1) znám vzorečky
 pohybu

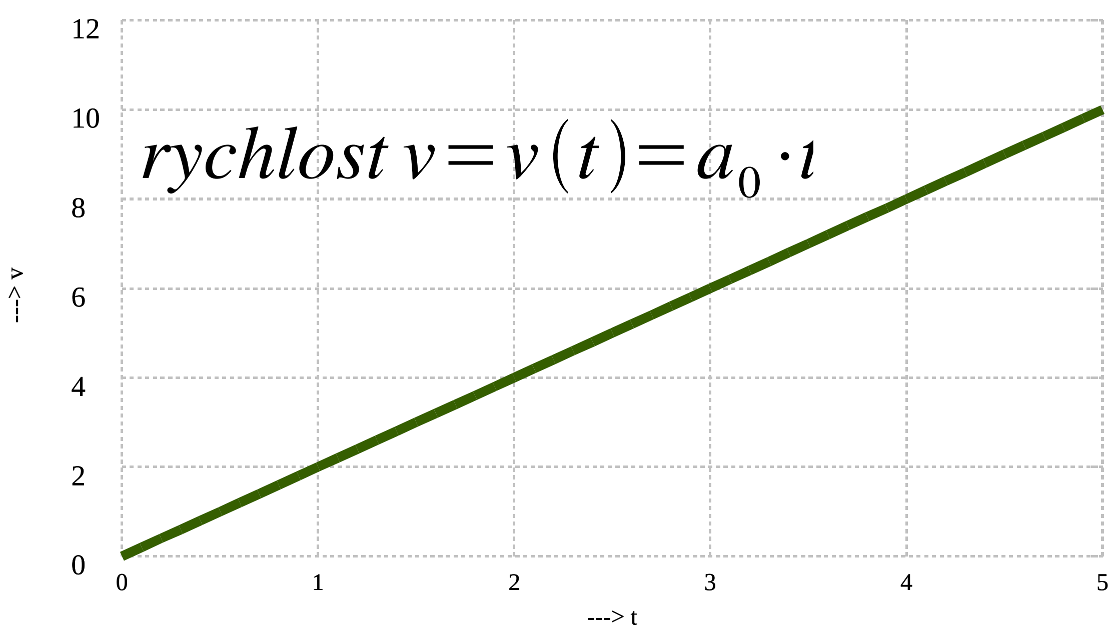
anebo

2) **umím derivovat**



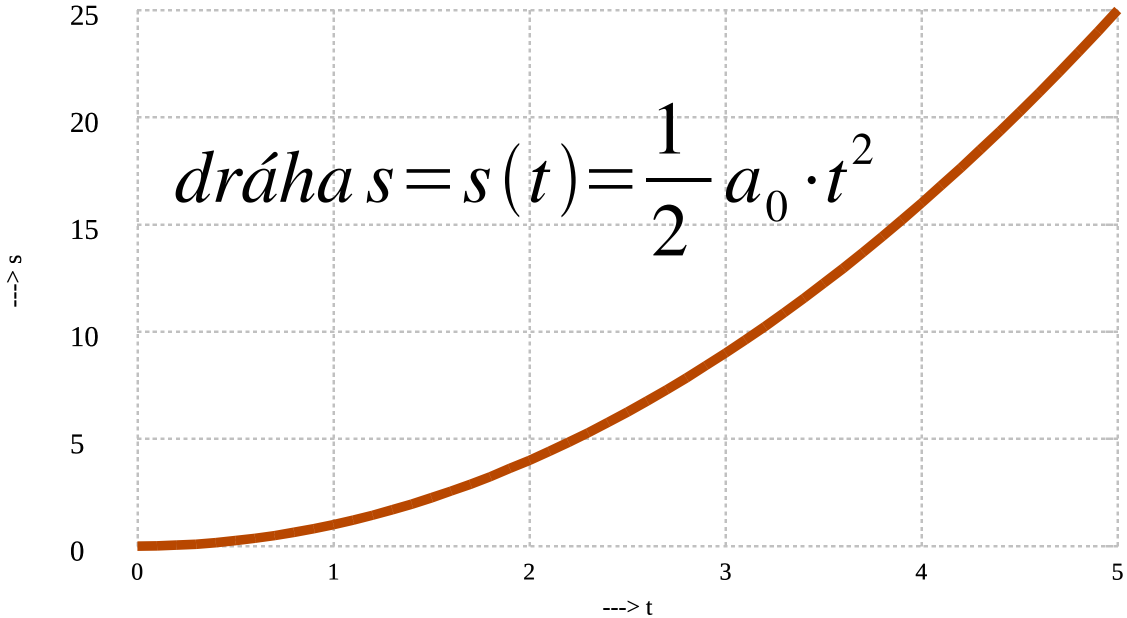
2a) Umím derivovat:

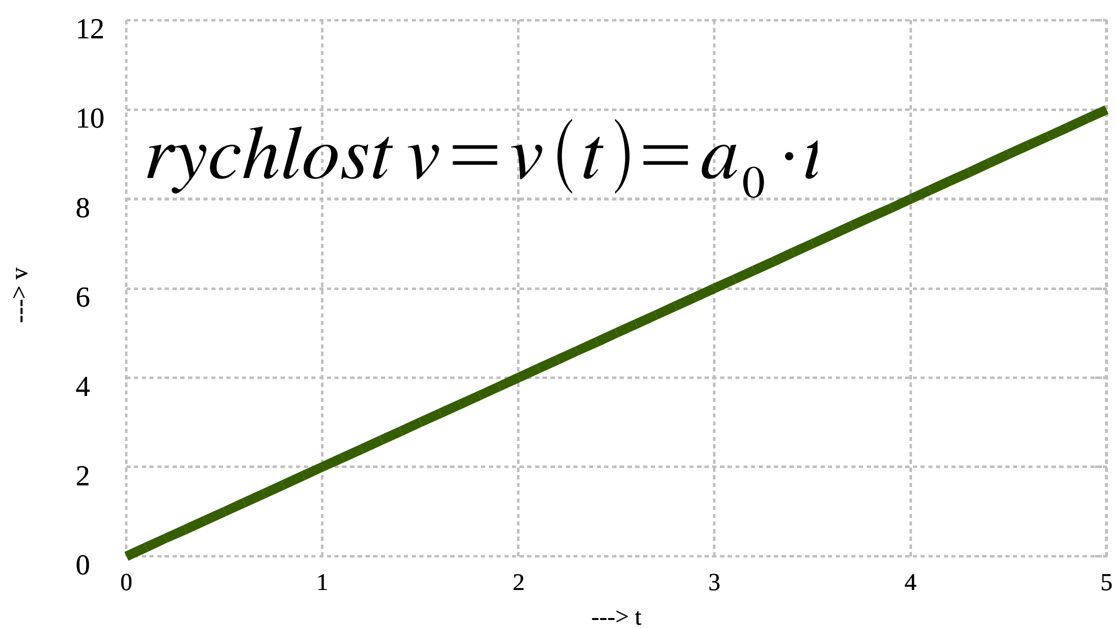
$$\frac{ds(t)}{dt} = \dot{s} = a_0 \cdot t$$



2b) Neumím, neznám analytický tvar funkce atd.

?? Co teď ??





Každopádně:

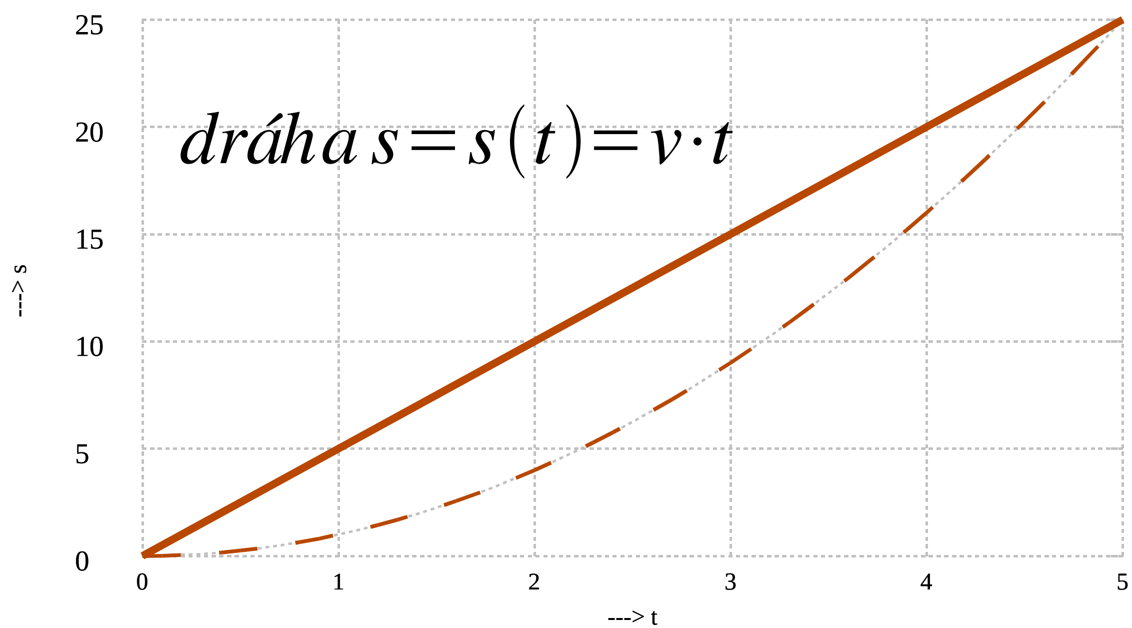
Pochopit:

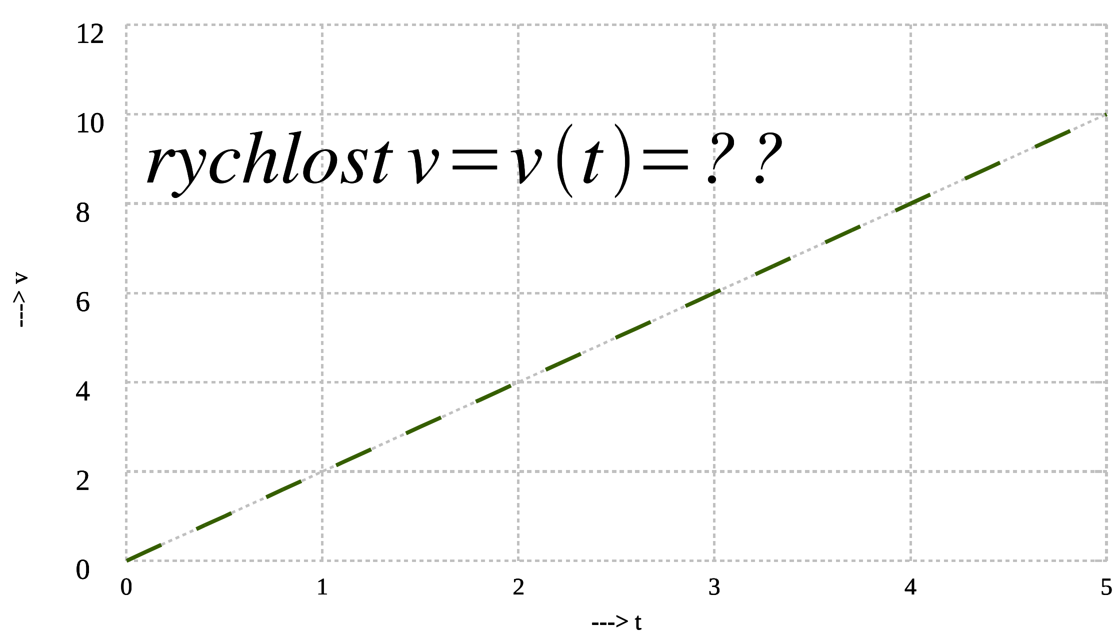
1) **geometrický**

2) **fyzikální**

význam derivace.

...

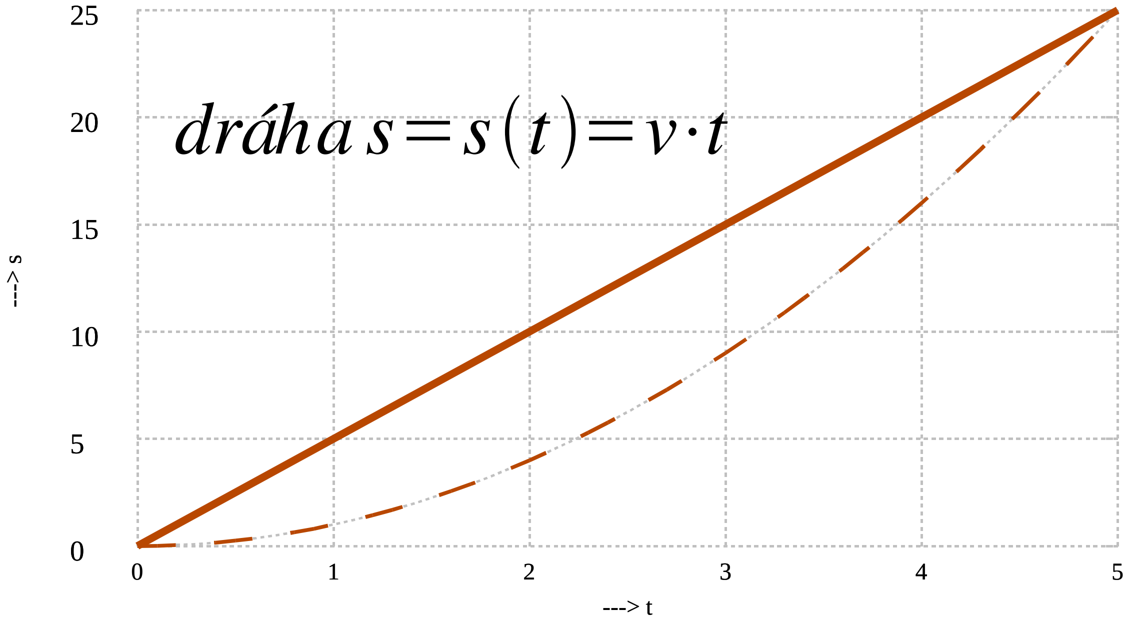


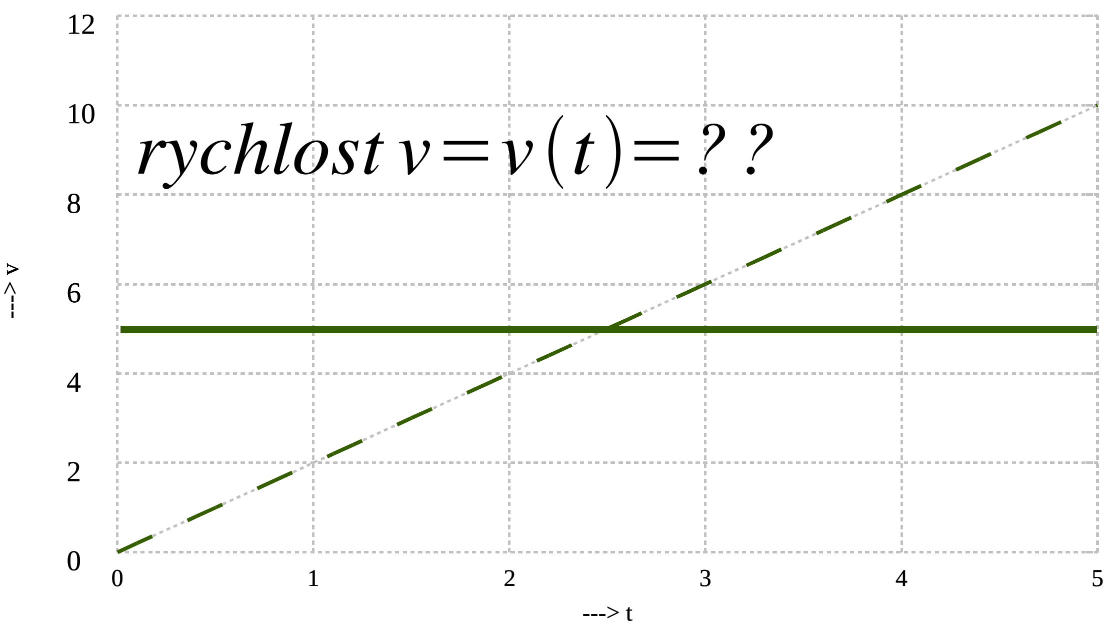


Idea
(první přiblížení):

Nahradím dráhu nerovnoměrného pohybu drahou pohybu rovnoměrného.
(Př.: dvě auta)

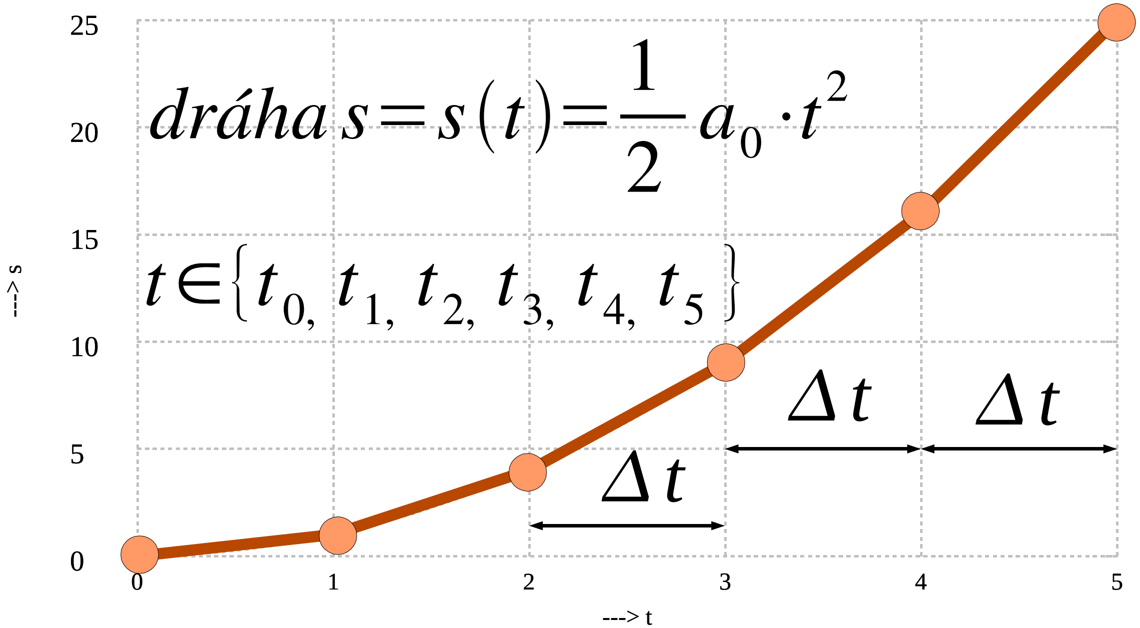
?? Co se stane s průběhem rychlosti??





Co se stane
s průběhem
rychlosti?

Zprůměruje se:
Bude konstantní
a rovná průměrné
rychlosti.



Další aproximace:

Nahradím dráhu nerovnoměrného pohybu lomenou čarou.

$$t_0 \leq t \leq t_1 \qquad s(t) = v_1 \cdot t$$

$$t_1 \leq t \leq t_2 \qquad s(t) = s_1 + v_2 \cdot (t - t_1)$$

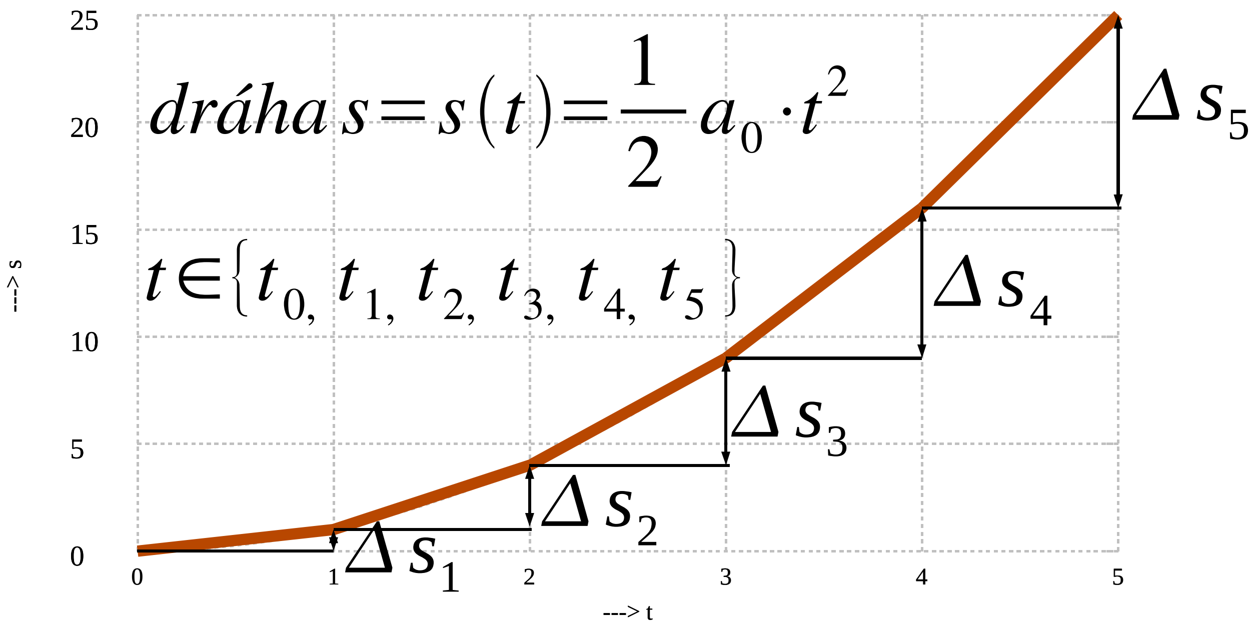
$$t_2 \leq t \leq t_3 \qquad s(t) = s_2 + v_3 \cdot (t - t_2)$$

$$t_3 \leq t \leq t_4 \qquad s(t) = s_3 + v_4 \cdot (t - t_3)$$

$$t_4 \leq t \leq t_5 \qquad s(t) = s_4 + v_5 \cdot (t - t_4)$$

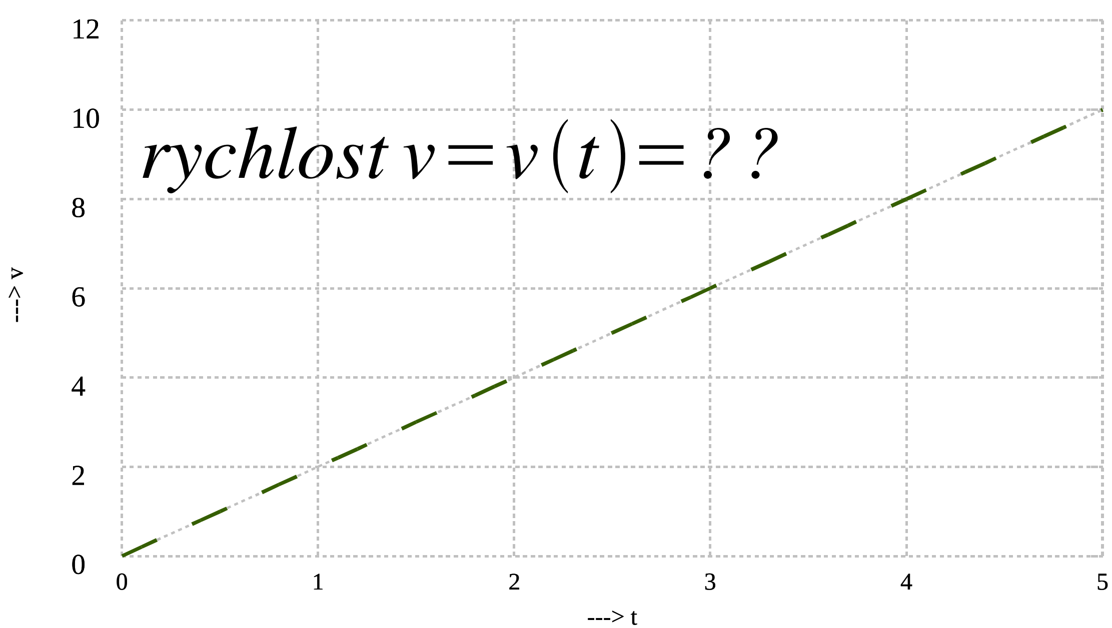
$$\Delta t = 1\,s$$

?? Jak bude vypadat průběh rychlosti ??



Spočteme:

$$\Delta s_1 = 1\,m$$
$$\Delta s_2 = 3\,m$$
$$\Delta s_3 = 5\,m$$
$$\Delta s_4 = 7\,m$$
$$\Delta s_5 = 9\,m$$

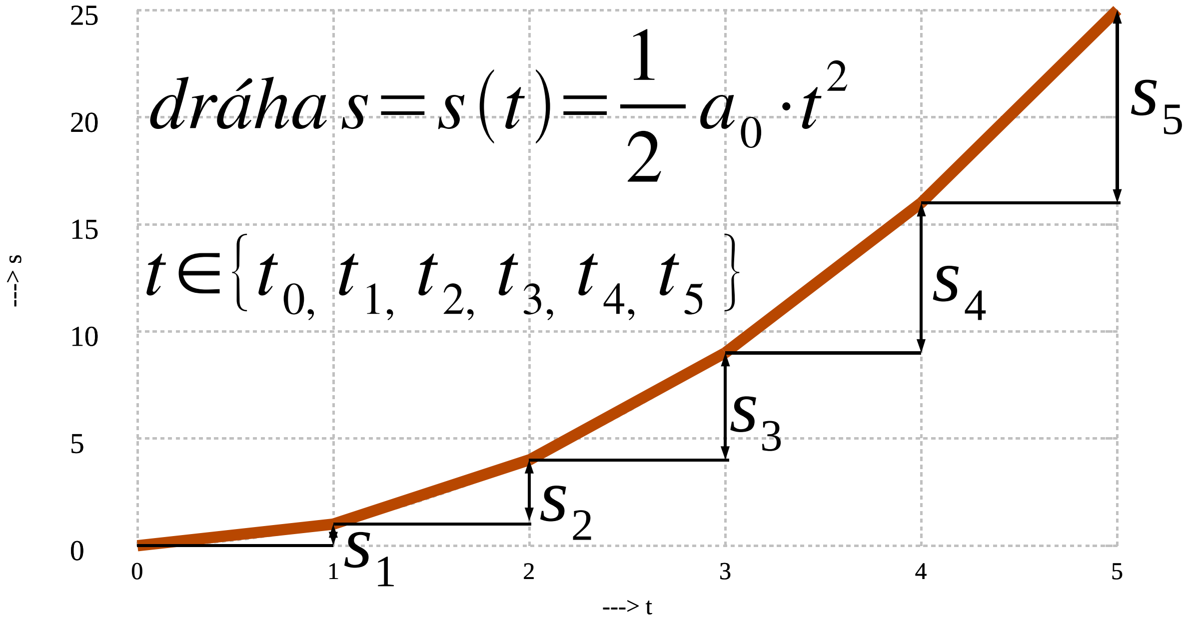


$$v_i = \frac{\Delta s_i}{\Delta t}$$

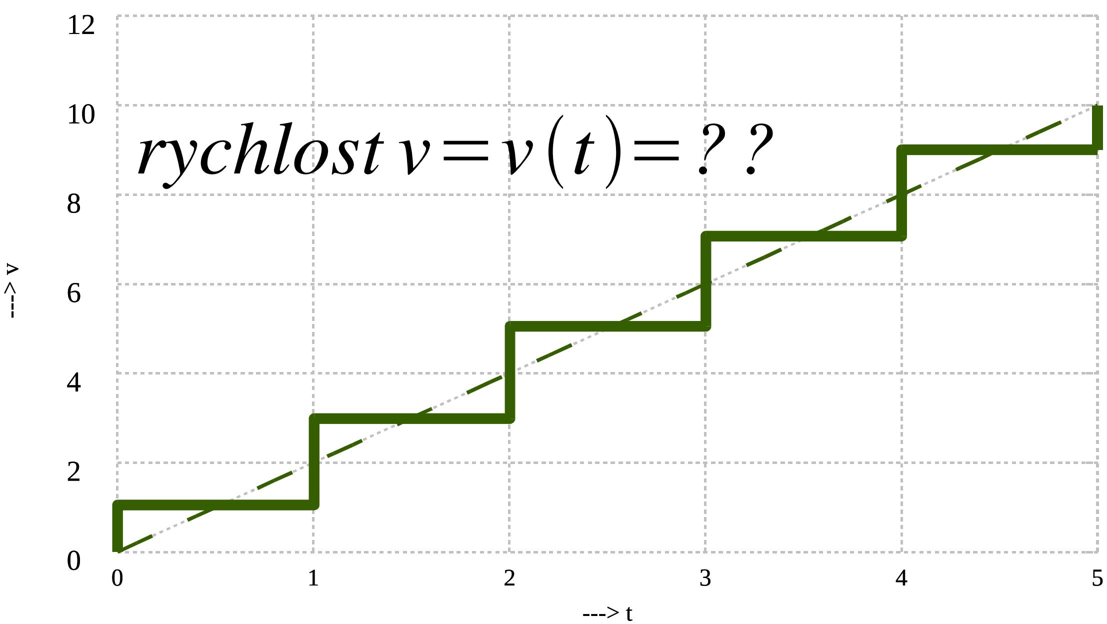
$$\Delta t = 1\,s$$

$$v_1 = 1\,ms^{-1}$$
$$v_2 = 3\,ms^{-1}$$
$$v_3 = 5\,ms^{-1}$$
$$v_4 = 7\,ms^{-1}$$
$$v_5 = 9\,ms^{-1}$$

Spočteme:



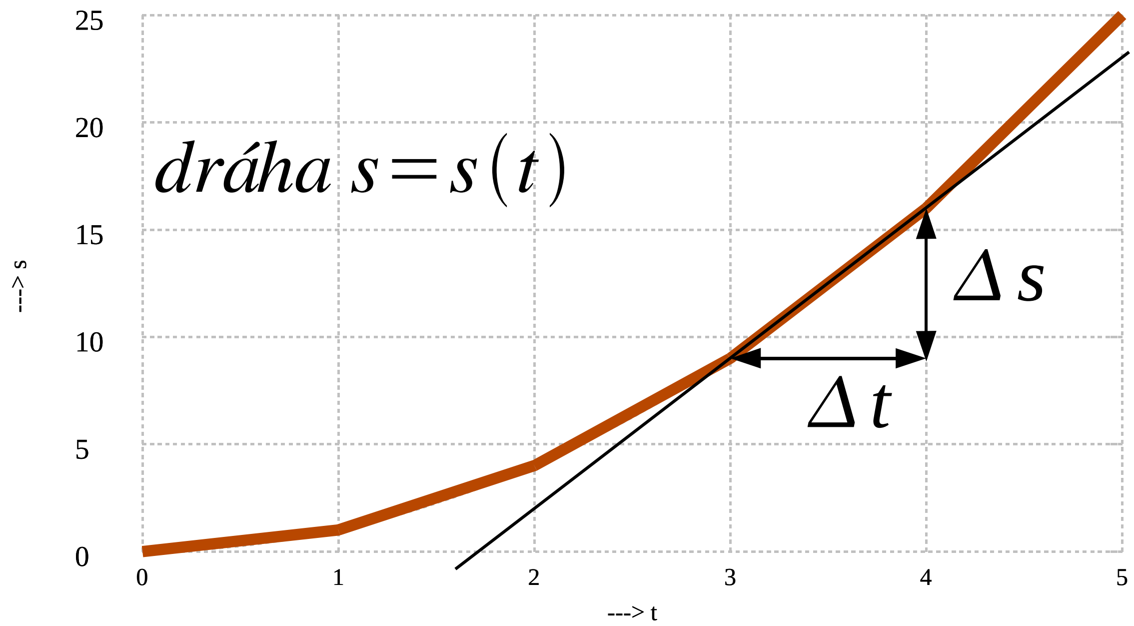
$$s_1=1\,m$$
$$s_2=3\,m$$
$$s_3=5\,m$$
$$s_4=7\,m$$
$$s_5=9\,m$$



$$v_i=\frac{s_i}{\Delta t}$$

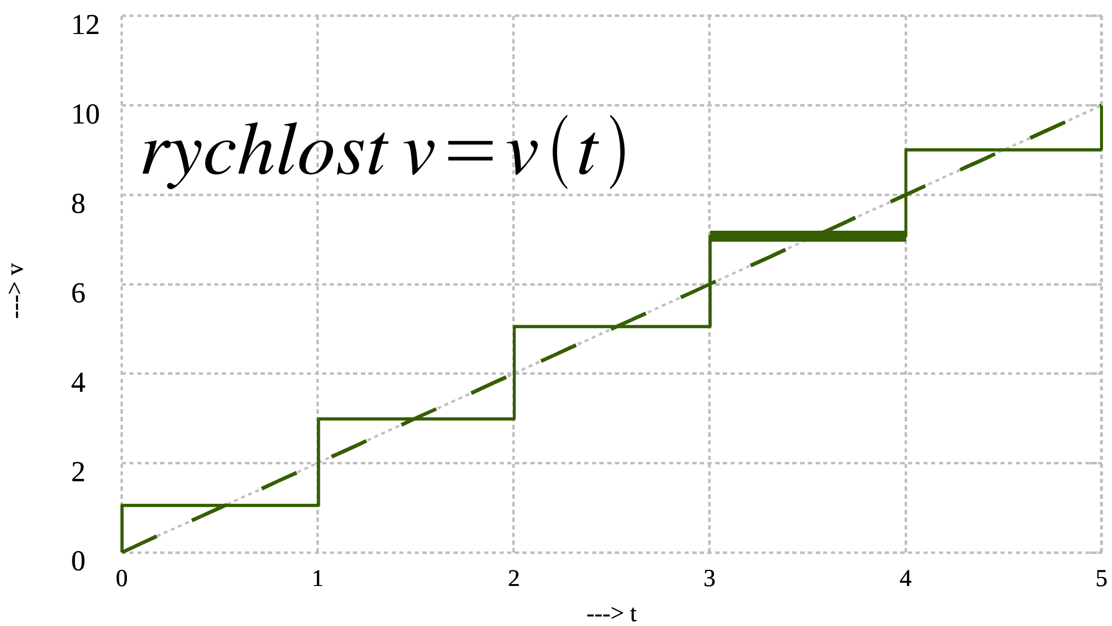
$$\Delta t=1\,s$$

$$v_1=1\,ms^{-1}$$
$$v_2=3\,ms^{-1}$$
$$v_3=5\,ms^{-1}$$
$$v_4=7\,ms^{-1}$$
$$v_5=9\,ms^{-1}$$

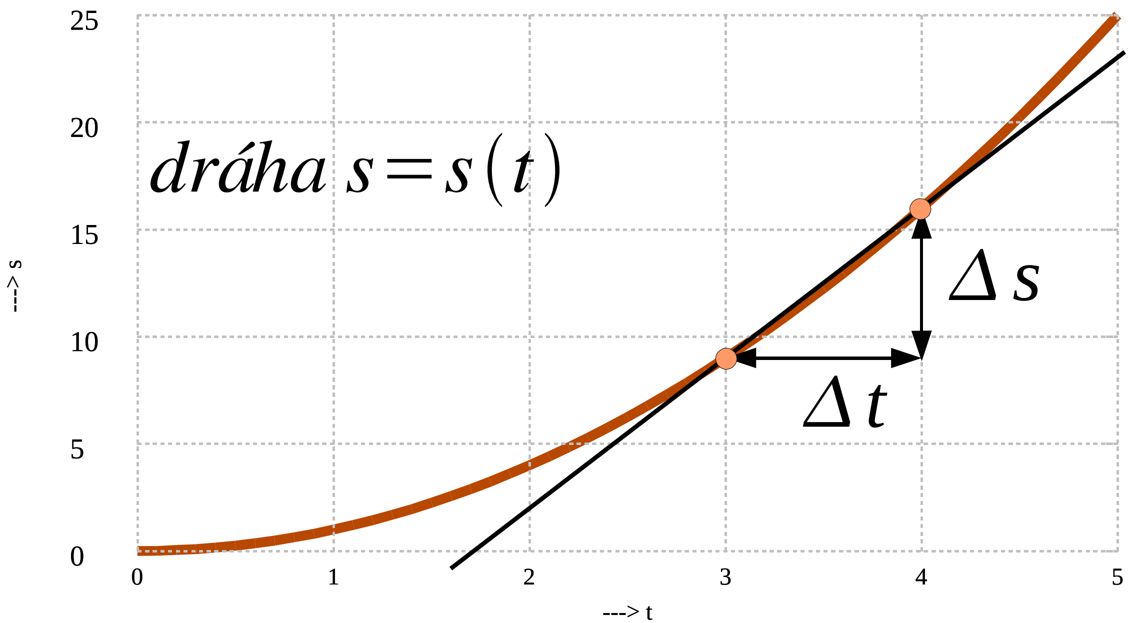


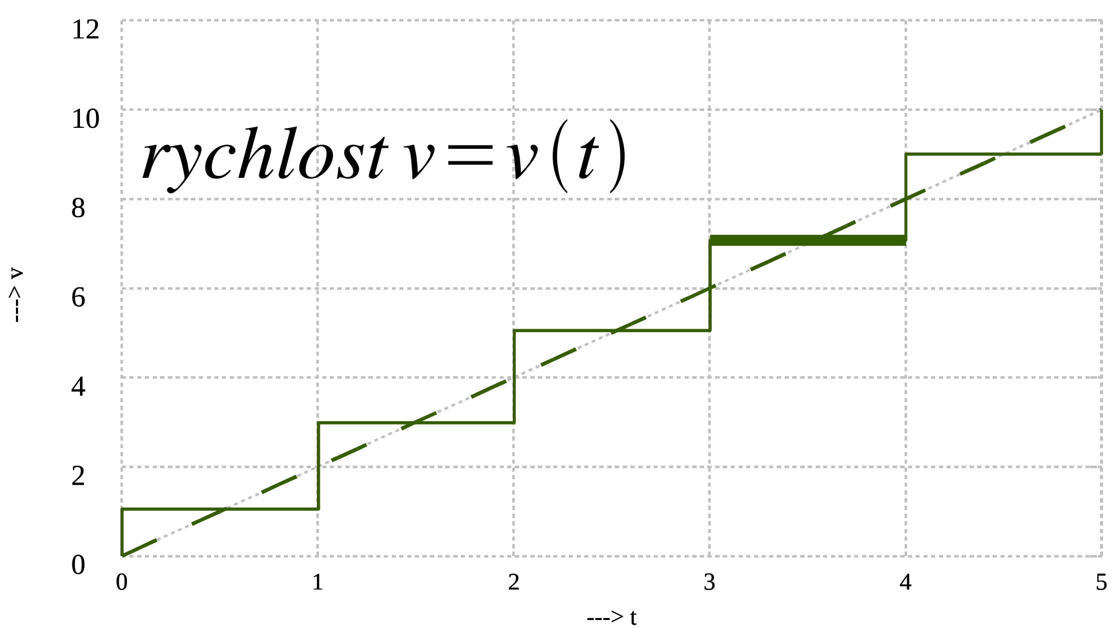
Rychlost v daném intervalu je vlastně sklonem úsečky, její **směrnicí**:

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad [ms^{-1}]=\frac{[m]}{[s]}$$

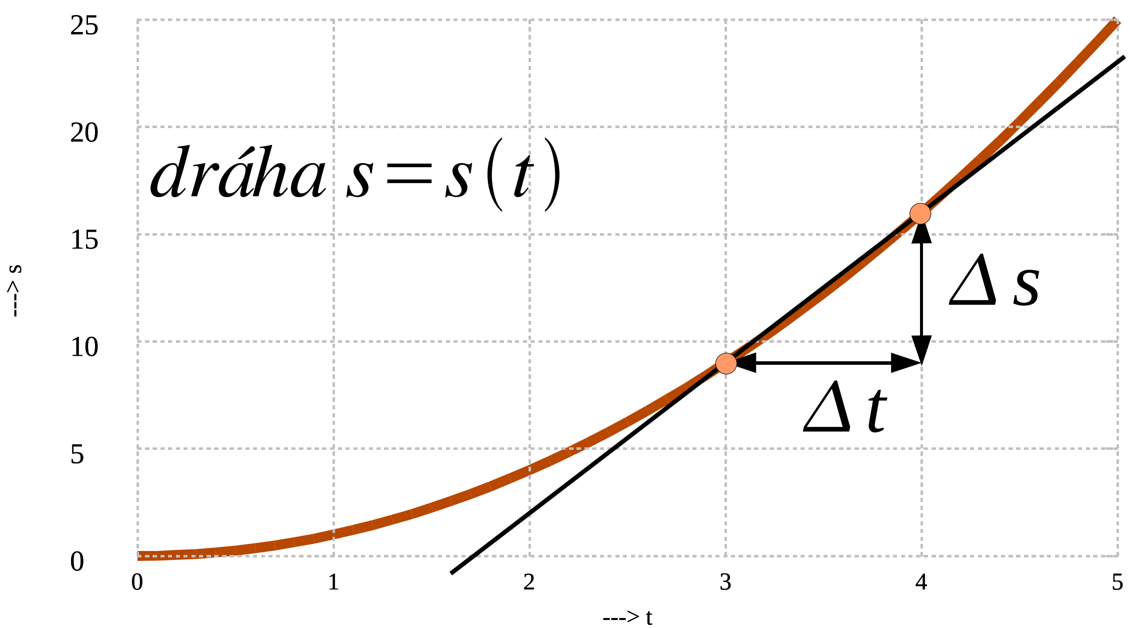


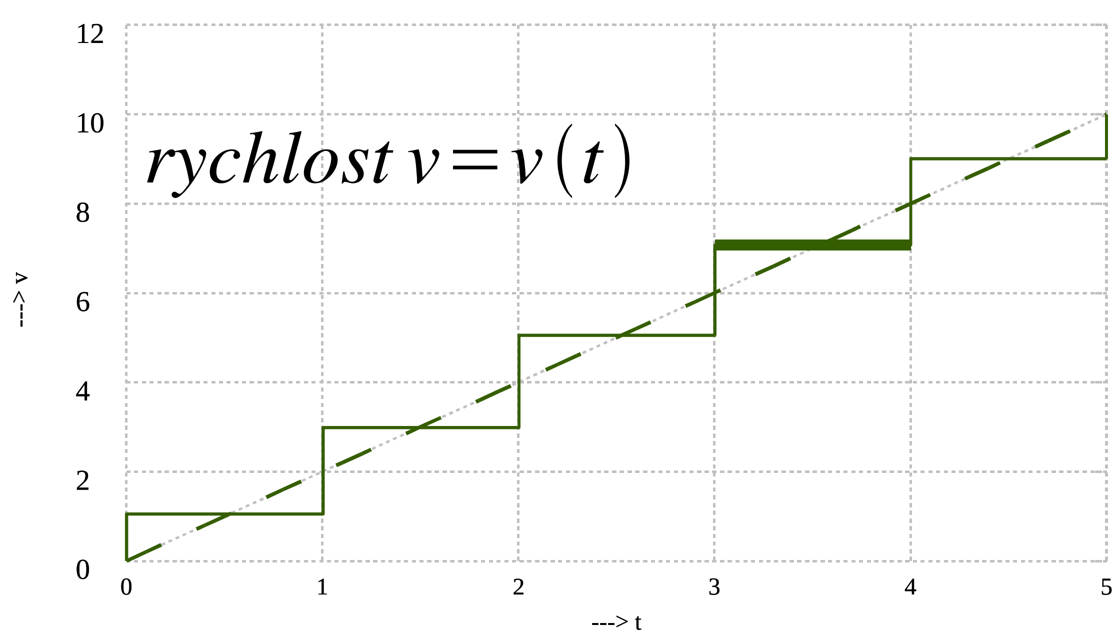
Na rozdíl od analytické geometrie tato směrnice má **fyzikální rozměr**, daný poměrem fyzikálních rozměrů obou veličin.



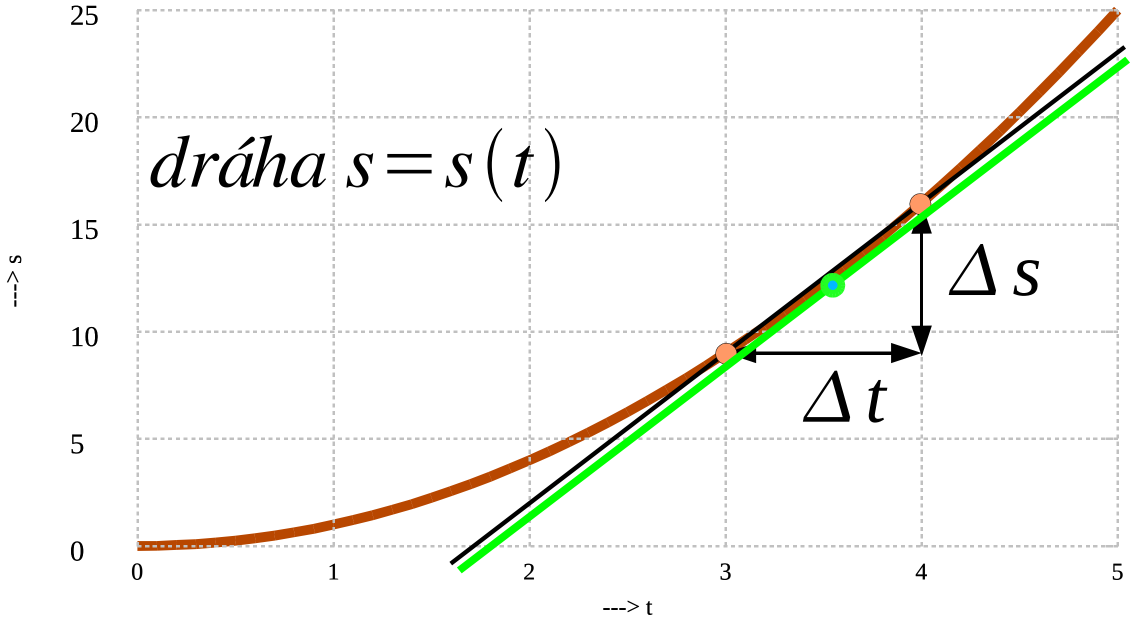


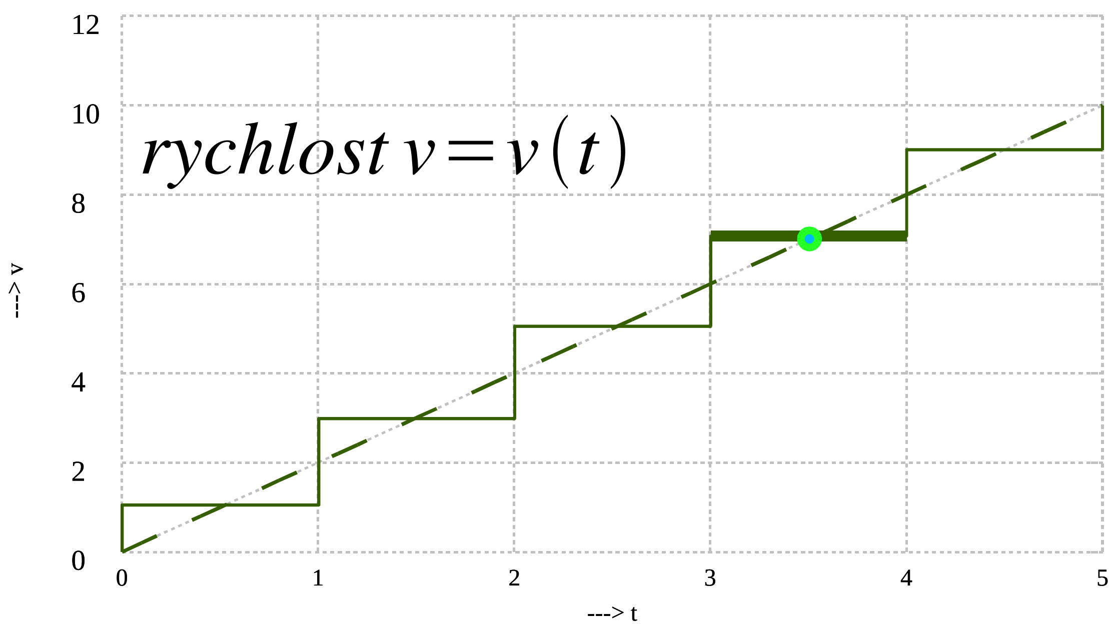
Promítneme-li do grafu namísto lomené čáry původní křivku, vidíme, že ona směrnice v daném intervalu je její tětivou (**sečnou**) mezi body, ohraničujícími interval.





??
Lze si představit
stále jemnější
aproximaci,
kdy budeme
Δt zmenšovat
na nekonečně
malou míru,
až skoro k nule??



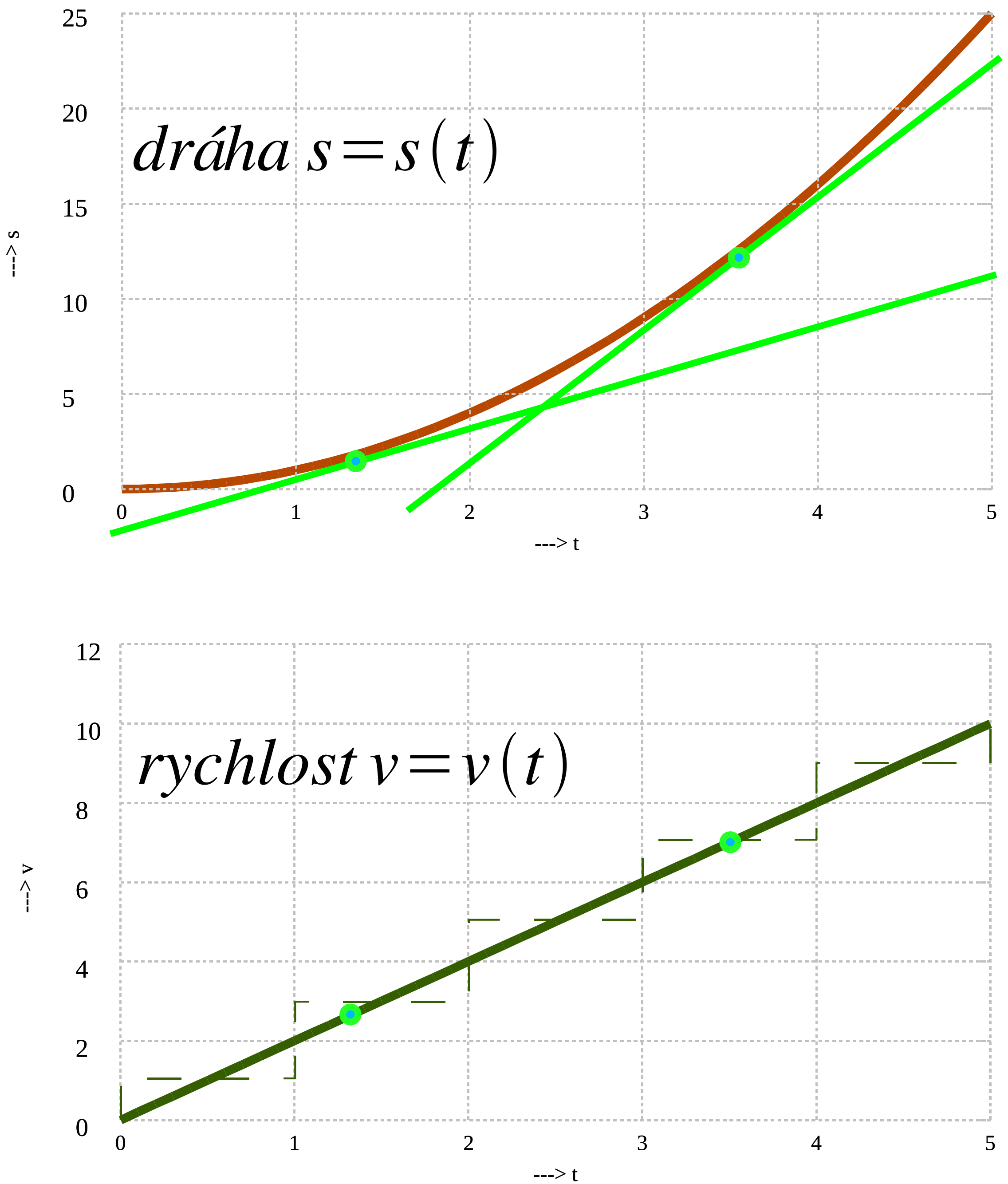


Zároveň s Δt
se zmenší i Δs ,
ale jejich poměr

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

se už mnoho měnit
nebude.

Sečna přejde v téměř
rovnoběžnou tečnu,
jejíž směrnice určí
okamžitou rychlost
v tečném bodě.



Okamžitou rychlost teď můžeme spočítat pro libovolný časový okamžik t.

Tak jako tečna může plynule klouzat po hladké křivce, i schodovitá křivka průběhu rychlosti se vyhladí. Namísto průměrných rychlostí dostáváme okamžité.

Namísto poměru $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ nyní píšeme $v = \frac{ds}{dt}$

Nekonečně malé veličiny ds, dt ... **diferenciály.**
Derivace je poměrem dvou diferenciálů.
Derivaci v matematice označujeme čárkou:

$$s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

Precizněji definujeme derivaci jako limitu:

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Ve fyzice pro vyjádření derivace podle času můžeme psát tečku:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

Derivace vyšších řádů

Proces derivování můžeme několikrát opakovat.

Tak jako je rychlost derivací dráhy $v = \dot{s} = ds/dt$

tak je zrychlení derivací rychlosti: $a = \dot{v} = dv/dt$

Zrychlení je tedy derivací derivace:

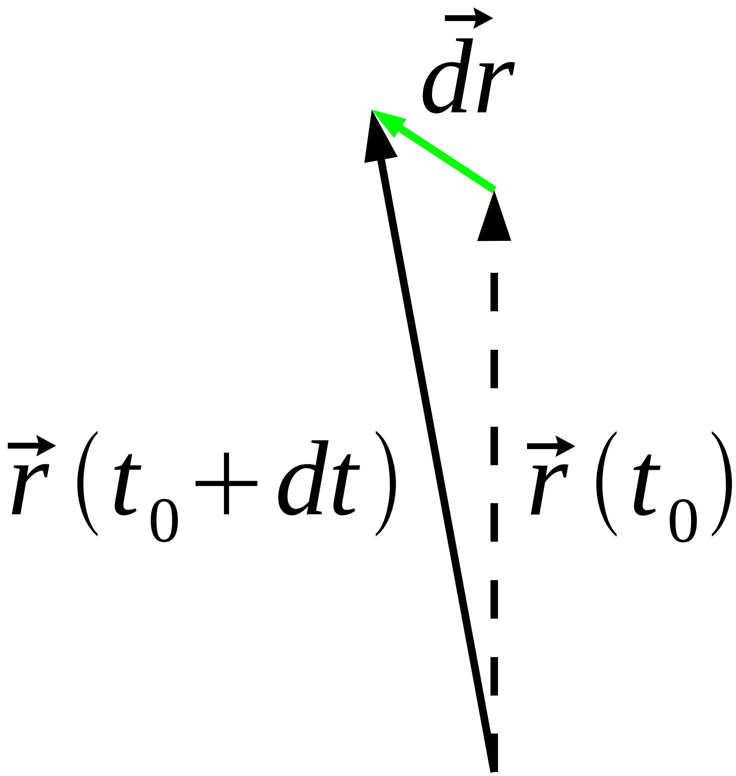
$$a = d\left(ds\left(t\right)/dt\right)/dt$$

neboli druhou derivací dráhy:

$$a = \ddot{a} = \frac{d^2\,s\left(t\right)}{dt^2}$$

Derivace vektorových veličin

Dosud jsme uvažovali jednorozměrný pohyb.
UFO ale létá v prostoru. Proto:

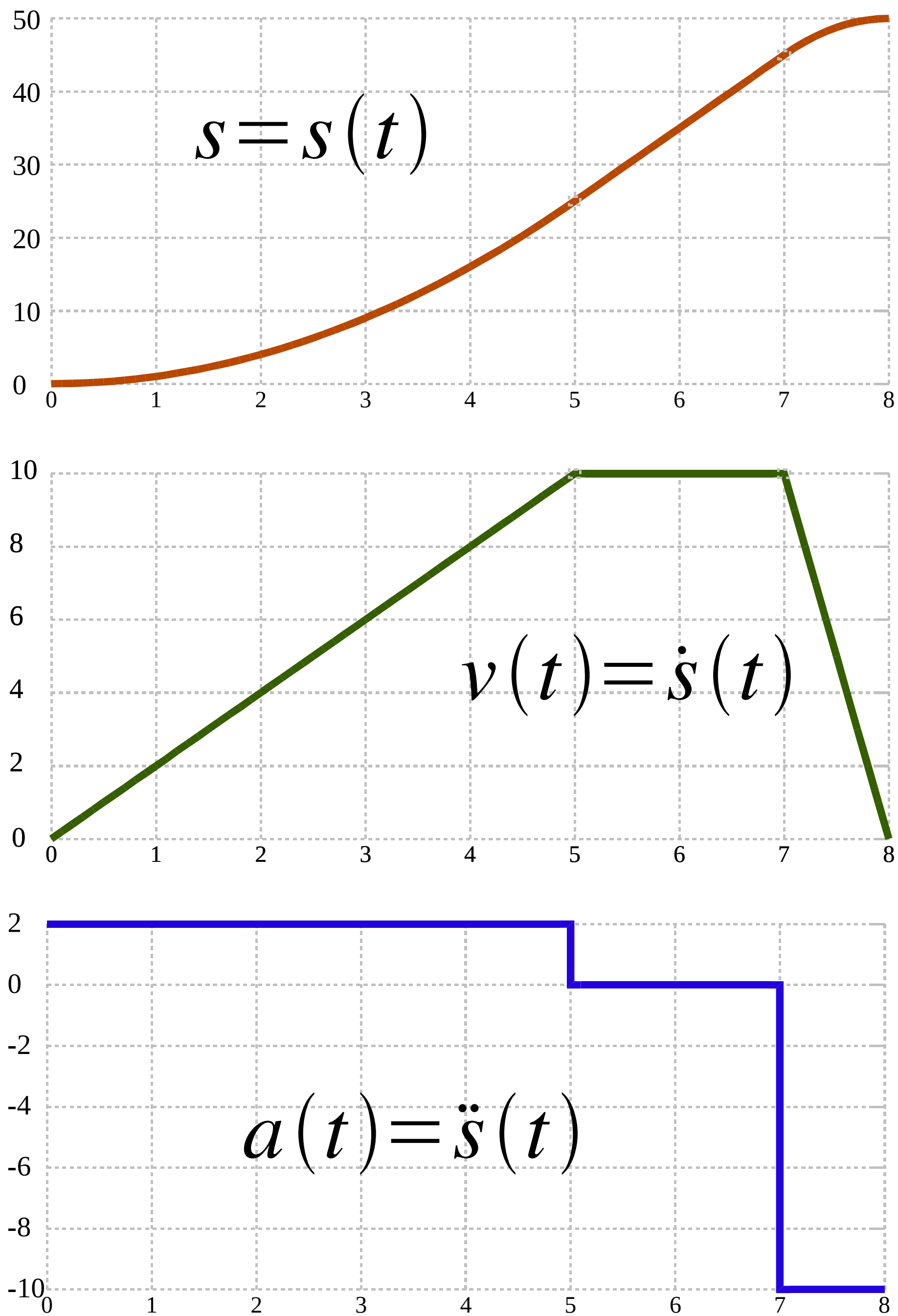


$$\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}(t)=\vec{dr}/dt$$

$$\vec{a}(t)=\dot{\vec{v}}(t)=\vec{dv}/dt$$

$$\vec{a}(t)=\ddot{\vec{s}}(t)=d^{\vec{2}}r/dt^2$$

$\vec{r}$ je polohový vektor.



Shrnutí (na našem modelu UFO):

Měříme dráhu $s = s(t)$

Počítáme rychlost jako její **první derivaci** a zrychlení jako **druhou derivaci**.

Určíme **parametry**:

$$0 < t < 5: a_1 = 2\ ms^{-2}$$

$$5 < t < 7: a_2 = 0\ ms^{-2}$$

$$v_2 = 10\ ms^{-1}$$

$$7 < t < 8: a_1 = -10\ ms^{-2}$$

Integrál

Integrování je opačným postupem k derivování.

$v = \dot{s}$ Je-li rychlost derivací dráhy,
pak dráha je integrálem rychlosti: $s = \int v\,dt$

$a = \dot{v}$ Je-li zrychlení derivací rychlosti,
pak rychlost je integrálem zrychlení. $v = \int a\,dt$

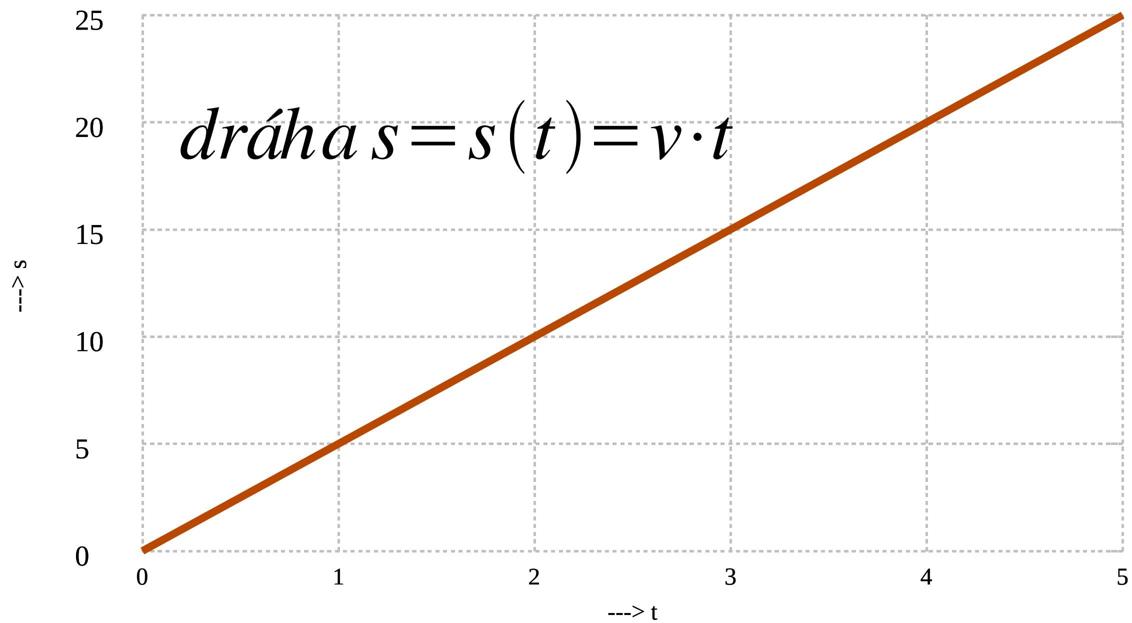
A jako je zrychlení druhou derivací dráhy,
tak i dráha je dvojným integrálem zrychlení:

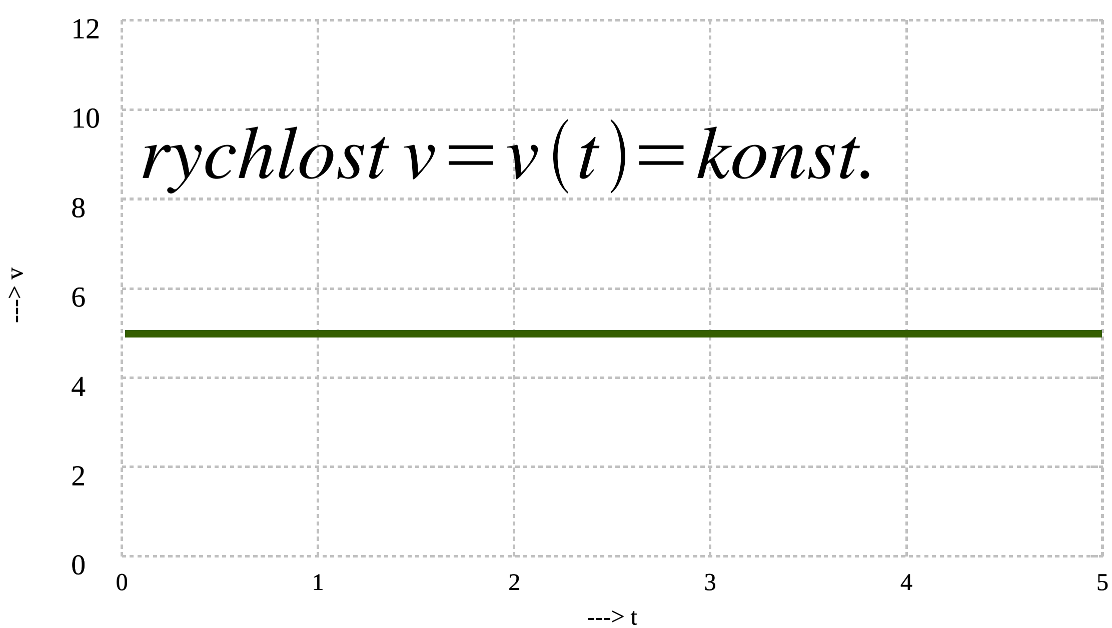
$a = \ddot{s}$ $s = \iint a\,dt^2$

Problém nalezení primitivní funkce:

Znám-li průběh $v = v(t)$,
jak najdu $s = s(t)$
aby platilo $v(t) = ds(t)/dt$??

1) počítat analyticky $s(t) = \int v(t)\,dt$
2) počítat numericky
3) **graficky**

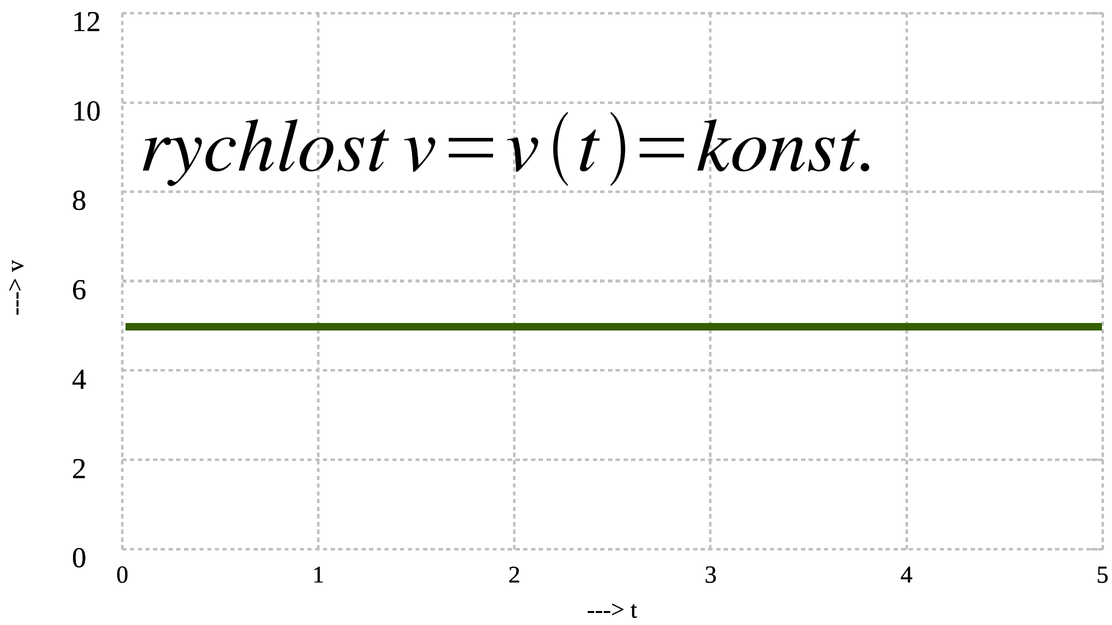


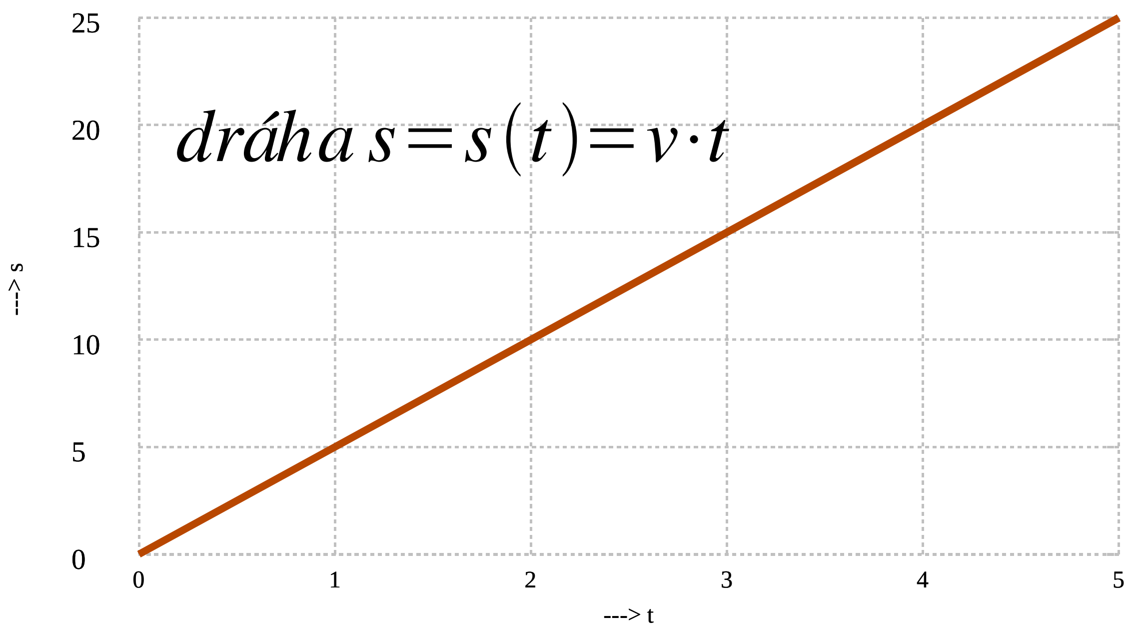


Vratíme se
k jednomu
z předchozích
obrázků.

Dosud jsme
odvozovali
(derivovali)
rychlost z dráhy.

?? Jde to i naopak?
Z dráhy rychlost ??



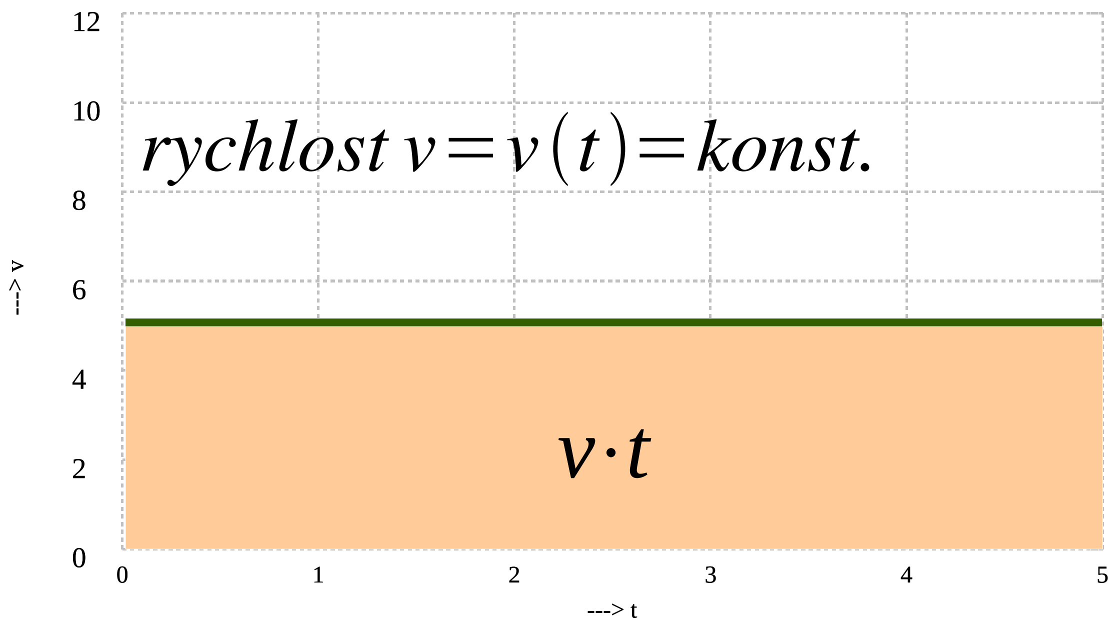


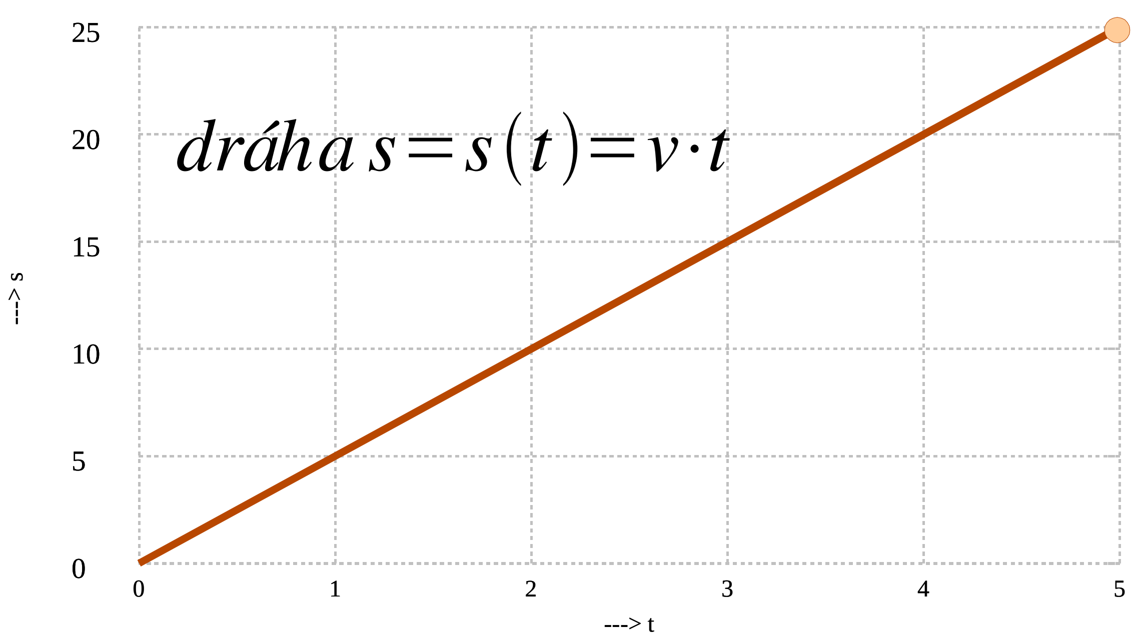
Nejdříve si prohodíme grafy …

a z druhého hned vidíme: $s(t)=v\cdot t$

?? Co ten součin znamená graficky??

?? Lze jej vyčíst i z horního grafu ??



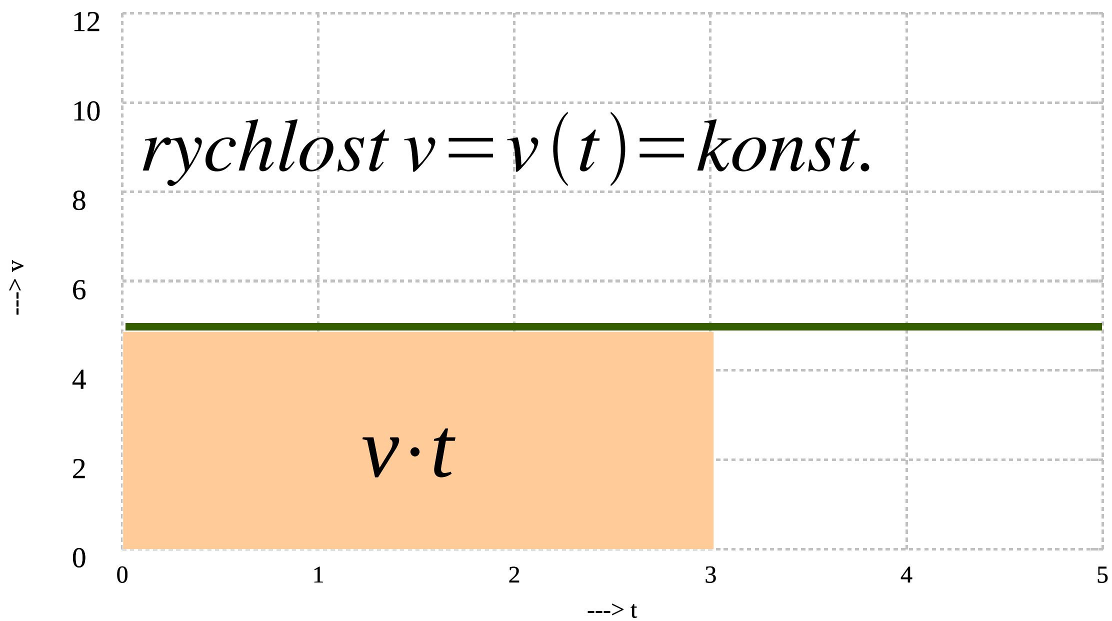


A hned vidíme,
že součin $v \cdot t$
znamená plochu
obdélníka
o hranách v a t, tj.:

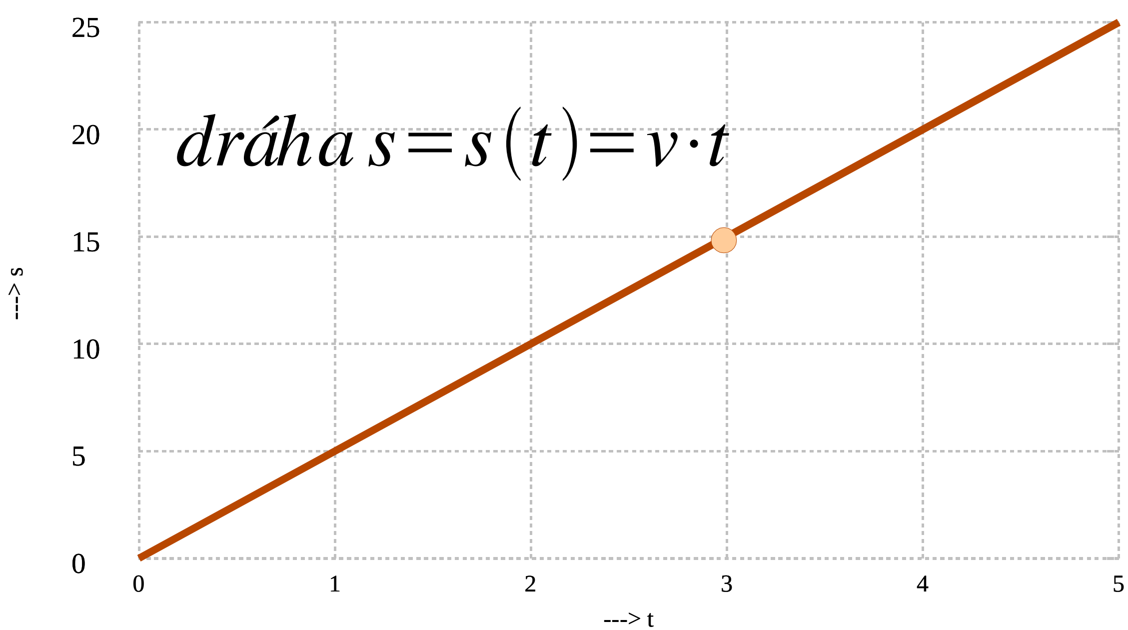
$$5\,s \cdot 5\,ms^{-1} = 25\,m$$

(„Plocha“ nikoli m^2 !!
ale součin jednotek.)

Což přesně odpovídá
konečnému bodu
dráhy na grafu dráhy.

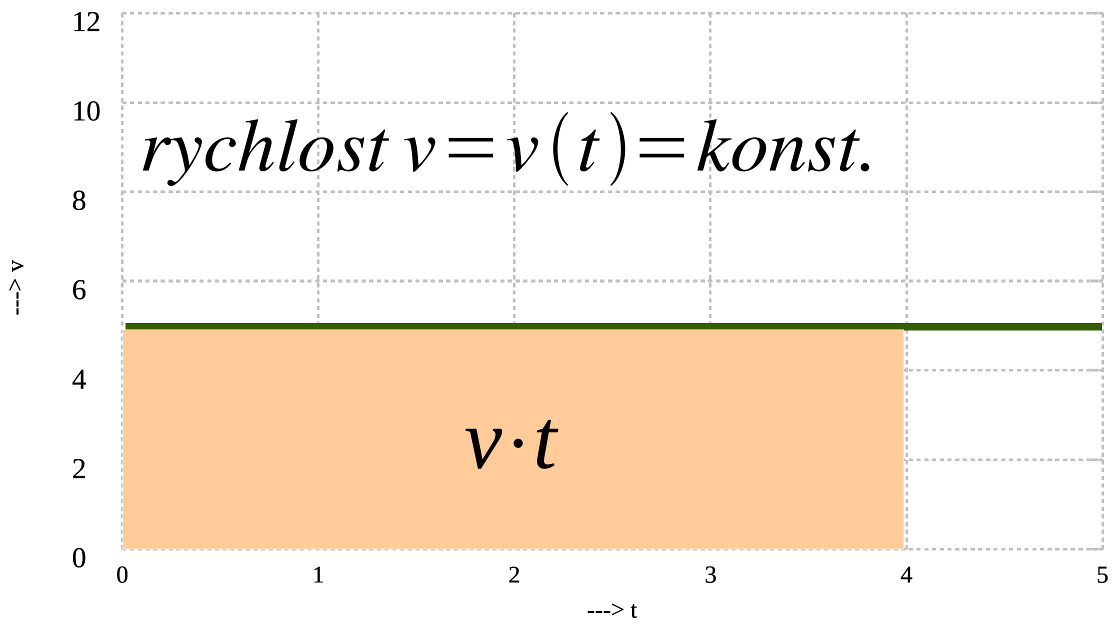


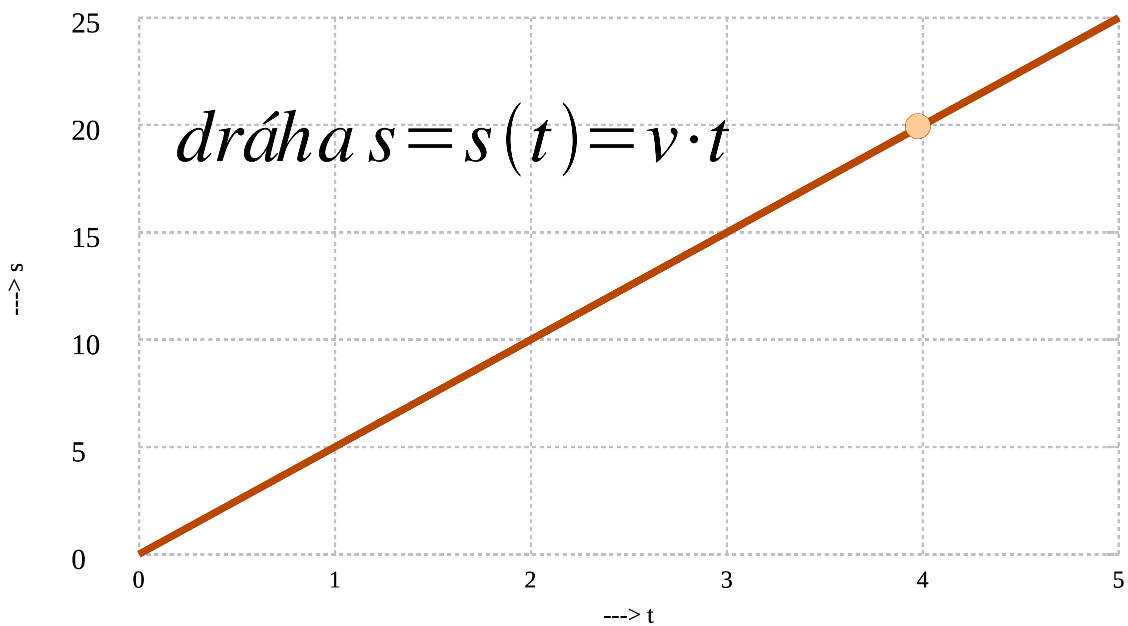
A platí to nejenom pro koncový bod, ale i pro kterýkoli jiný.



Např pro $t = 3\,s$ dostáváme:

$$5\,ms^{-1} \cdot 3\,s = 15\,m$$

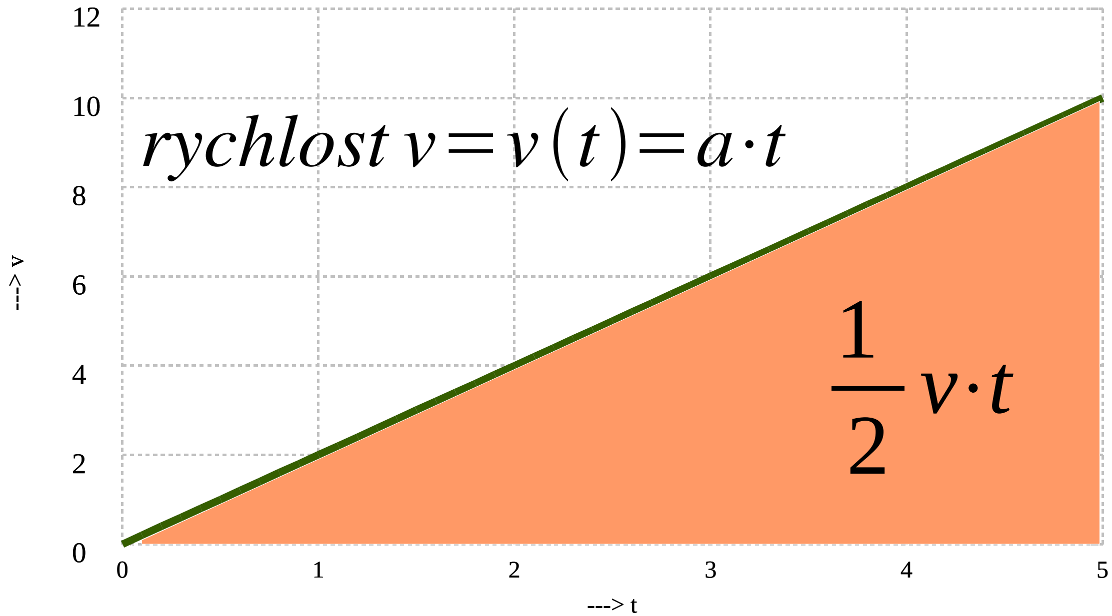




Důležité:

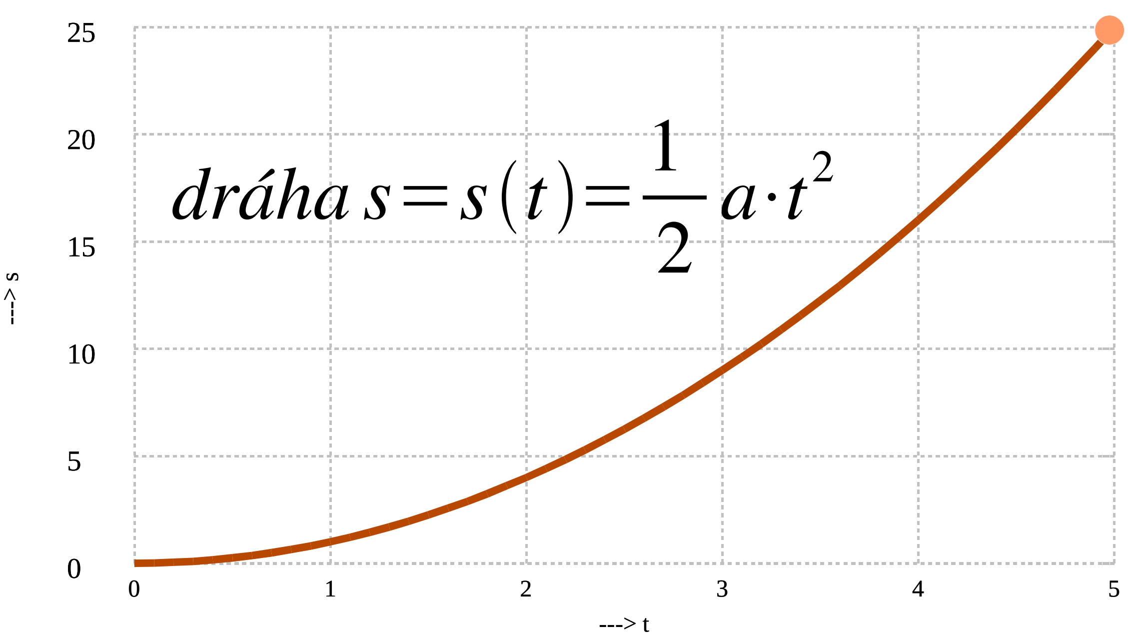
Pokaždé se jedná o plochu pod křivkou, tj. mezi křivkou a abscisou (zde osou t), ohraničenou zleva i zprava hranicí daného intervalu.

$\cdot t$



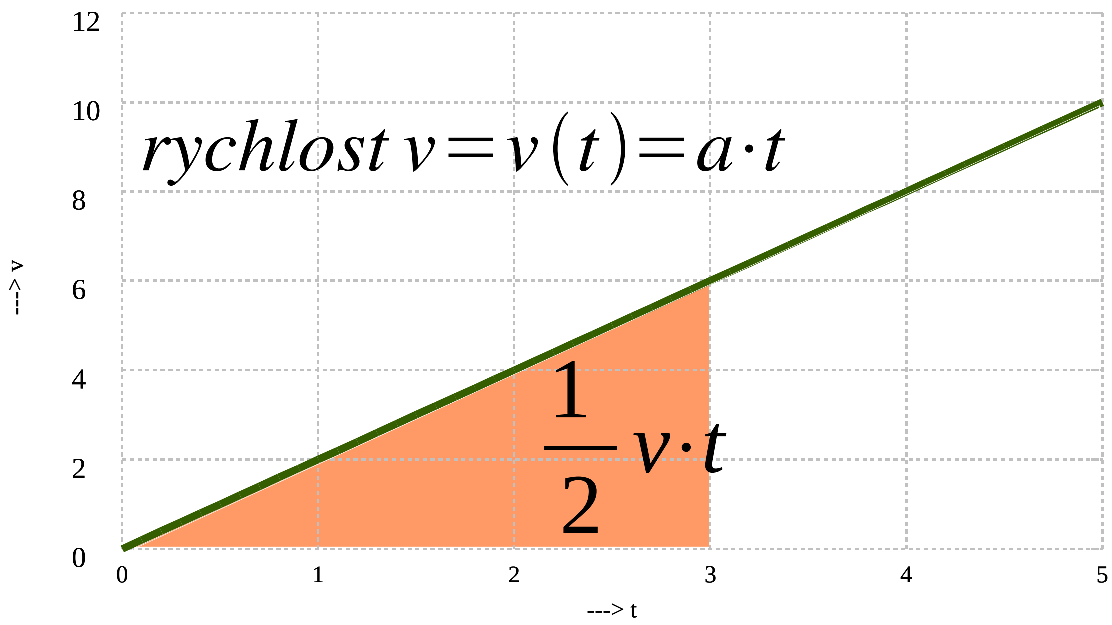
To platí pro libovolný průběh: Zde má plocha tvar trojúhelníku s plochou

$$\frac{1}{2} \cdot 10\, ms^{-1} \cdot 5\, s = 25\, m$$



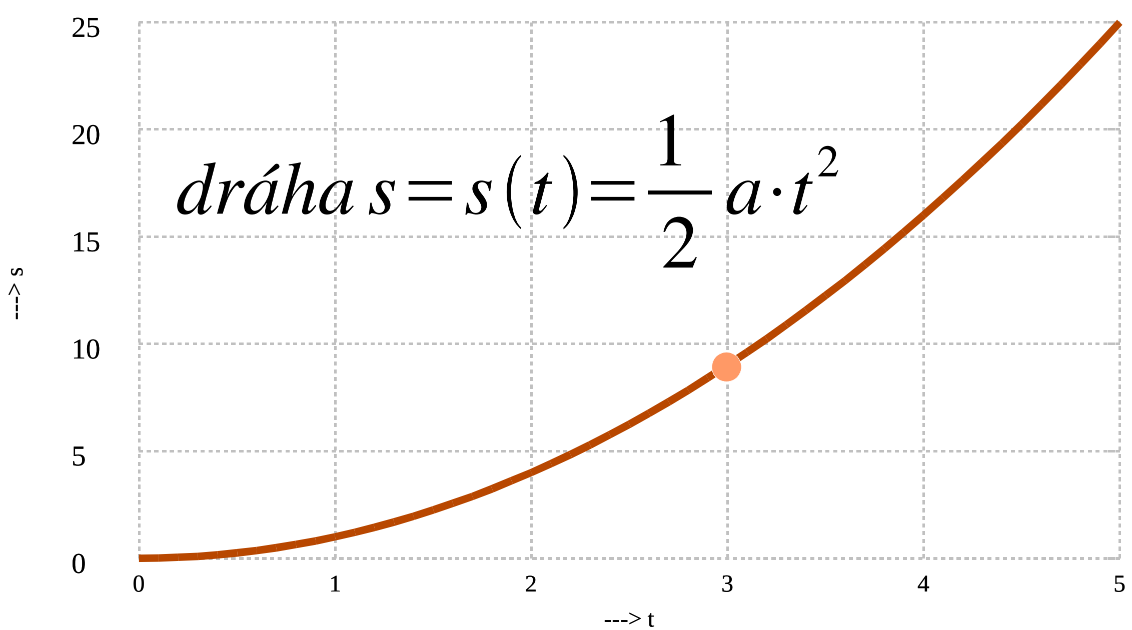
Což odpovídá zrychlenému pohybu

$$\frac{1}{2} \cdot 2\, ms^{-2} \cdot 5\, s^2 = 25\, m$$



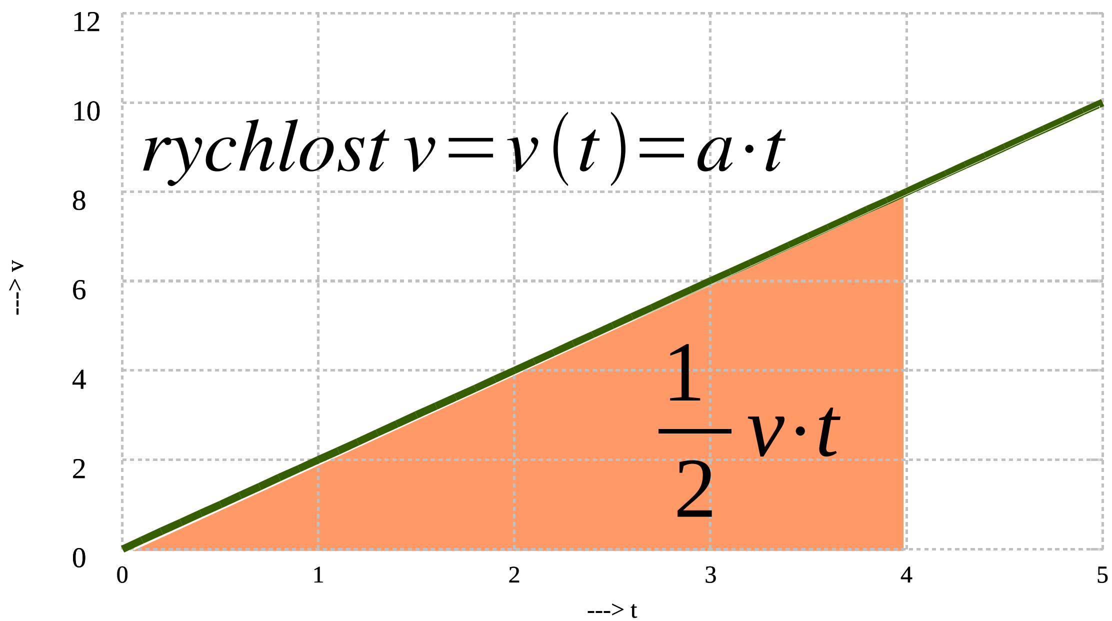
Pro $t = 3\,s$ máme:

$$\frac{1}{2} \cdot 6\,ms^{-1} \cdot 3\,s = 9\,m$$



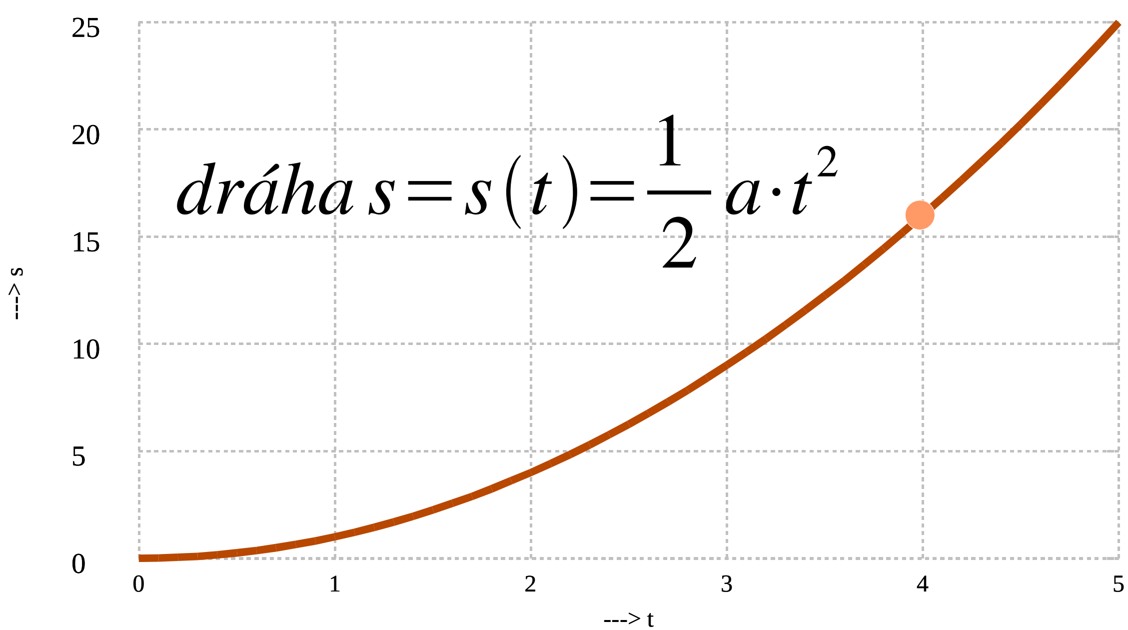
Což opět odpovídá bodu na grafu dráhy:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\,ms^{-2} \cdot 3\,s^2 = 9\,m$$



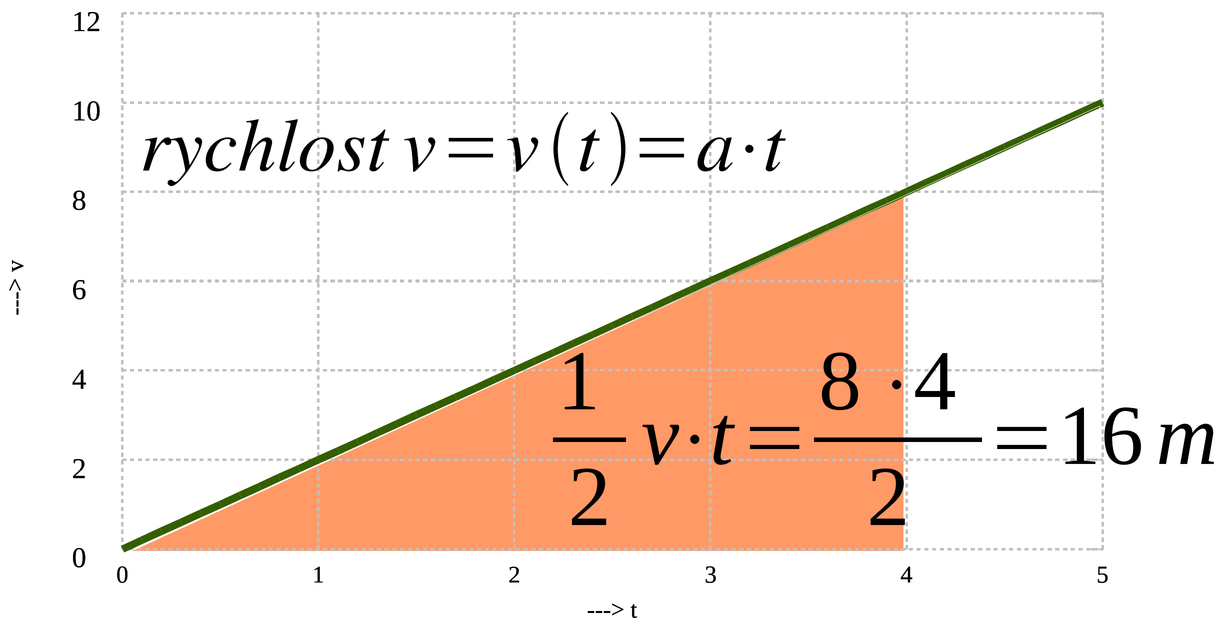
Čili:

Graf dráhy $s(t)$ ukazuje velikost plochy pod křivkou rychlosti $v(t)$



Neboli:

dráha $s(t)$ je časovým **integrálem** rychlosti $v(t)$



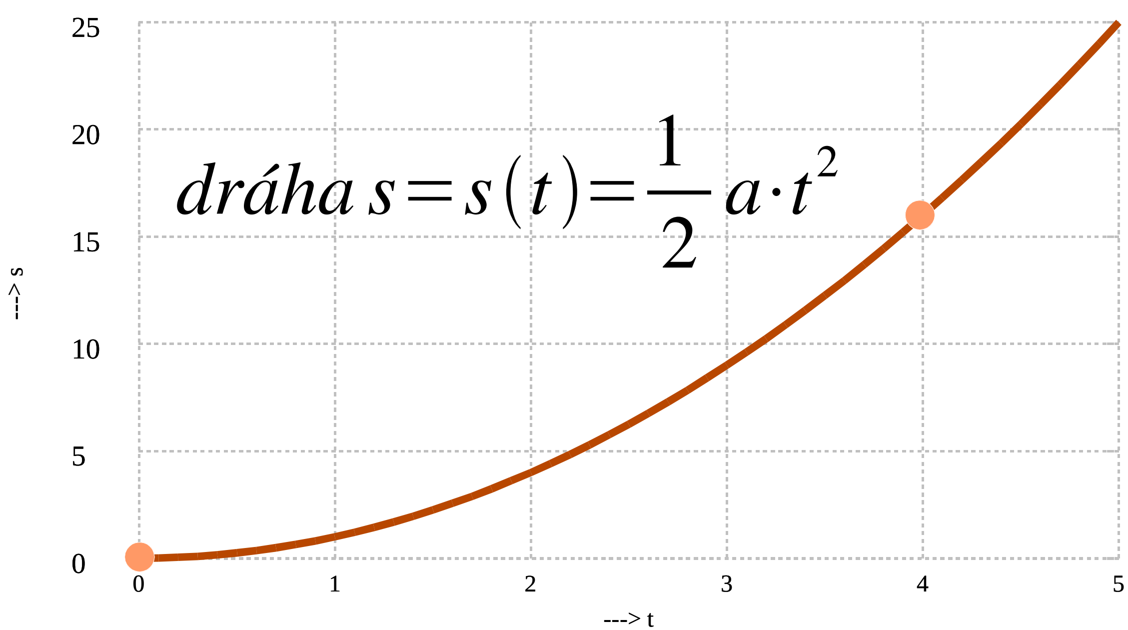
Zapisujeme jako určitý integrál:

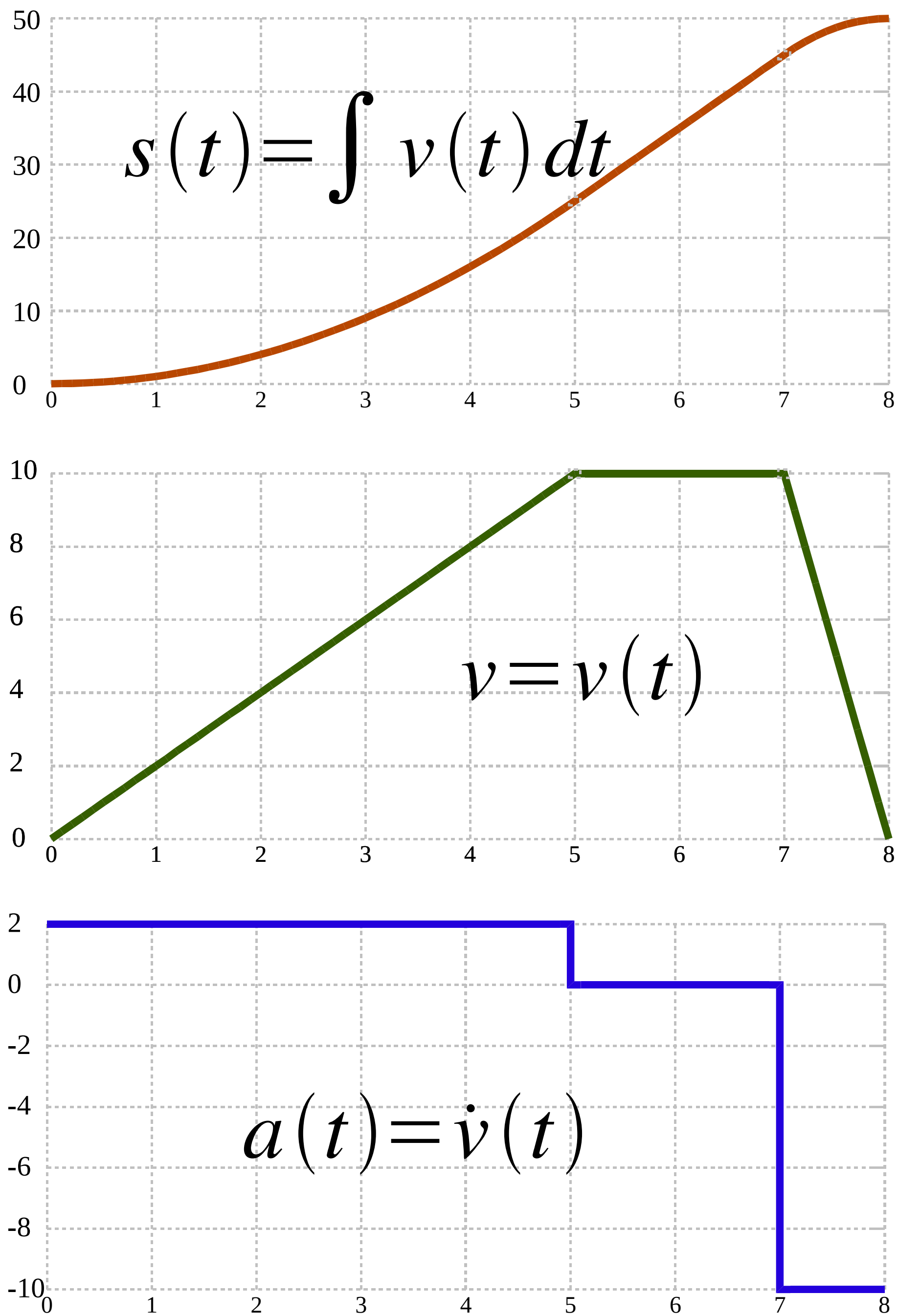
$$s(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} v(\tau)\, d\tau$$

$$s(t) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} a \cdot \tau\, d\tau$$

$$s(t) = \left[\frac{1}{2} a \cdot \tau^2 \right]_0^t$$

$$s(4) = \left[\frac{1}{2} a \cdot \tau^2 \right]_0^4 = 16\,m$$





Shrnutí: na našem UFO modelu nyní:

Měříme rychlost $v=v(t)$

Počítáme dráhu $s(t)$ jako její **integrál** a zrychlení $a(t)$ jako její **derivaci**.

Parametry stejně:

$0<t<5: a_1=2\ ms^{-2}$

$5<t<7: a_2=0\ ms^{-2}$
$v_2=10\ ms^{-1}$

$7<t<8: a_1=-10\ ms^{-2}$

Dynamika

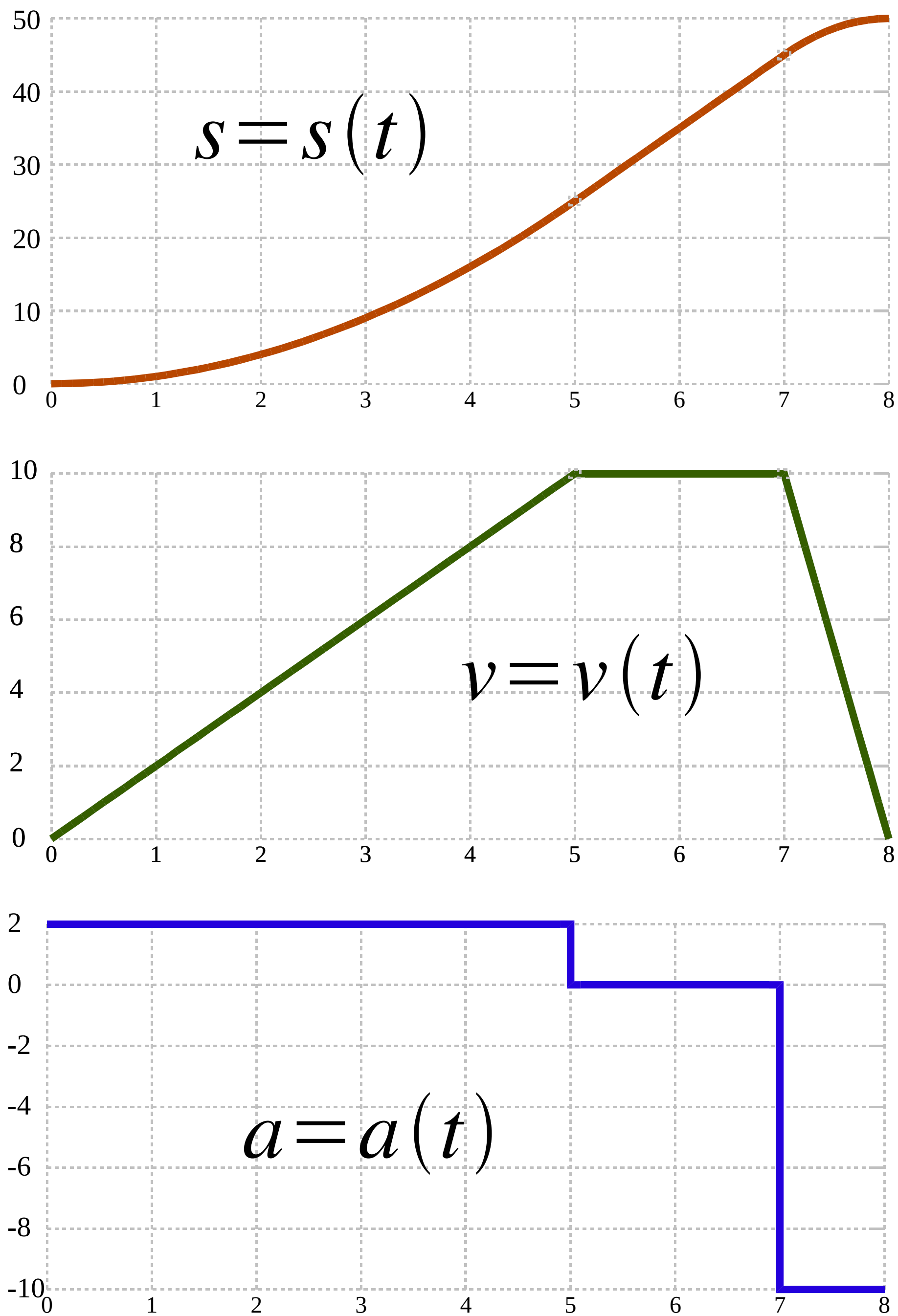
„2. Newtonův zákon“ [1687] = „zákon síly“:

$$\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t) = m \cdot \ddot{\vec{r}}(t) = m \cdot \dot{\vec{v}}(t)$$

Hybnost: $\vec{p}(t) = m \cdot \vec{v}(t)$, tudíž:

$$\boxed{\vec{F}(t) = \dot{\vec{p}}(t)} \qquad [N] = [kg \cdot ms^{-1}/s]$$

Ke kinematickým veličinám, rychlosti a zrychlení, jsme přibrali hmotnost, a dostali jsme dvě nové, **dynamické** veličiny: **hybnost** a **sílu**, svázané **opět derivací**.

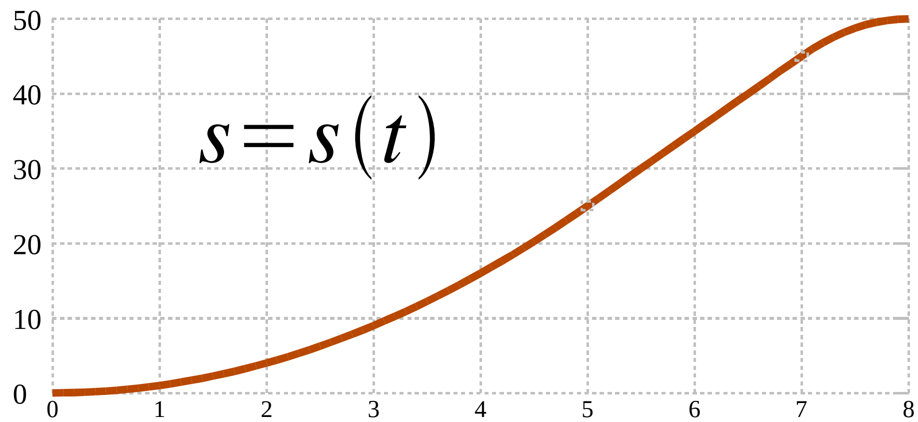


Připomeneme si kinematiku našeho UFO.

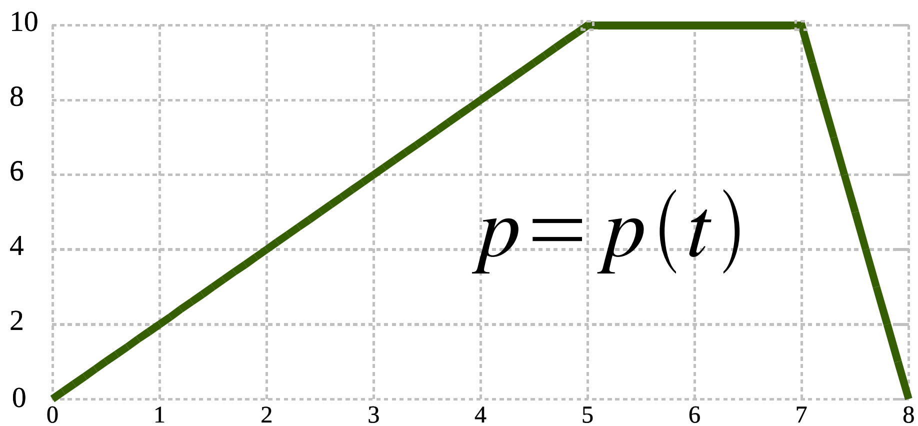
?? Jaká bude jeho **dynamika** ??

... miniaturizují se, celý talíř má jen 1kg.

??Jak bude vypadat průběh **hybnosti** a tažné **síly** UFOních motorů??



...



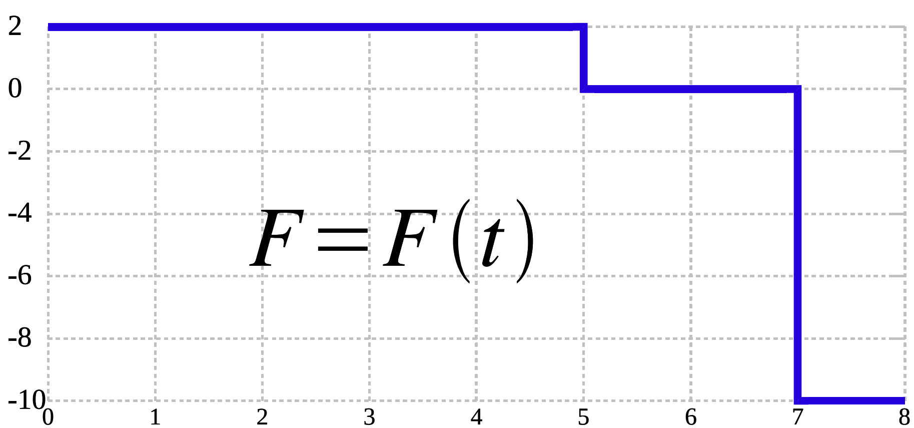
$$p(t)=m\cdot v(t)$$

$$[kg\cdot ms^{-1}]=[kg]\cdot[ms^{-1}]$$

$$1\ kg\cdot ms^{-1}=1\ Ns=1\ L$$

$$1\ L=1\ Leibniz$$

G.W.Leibniz [1646 - 1716]

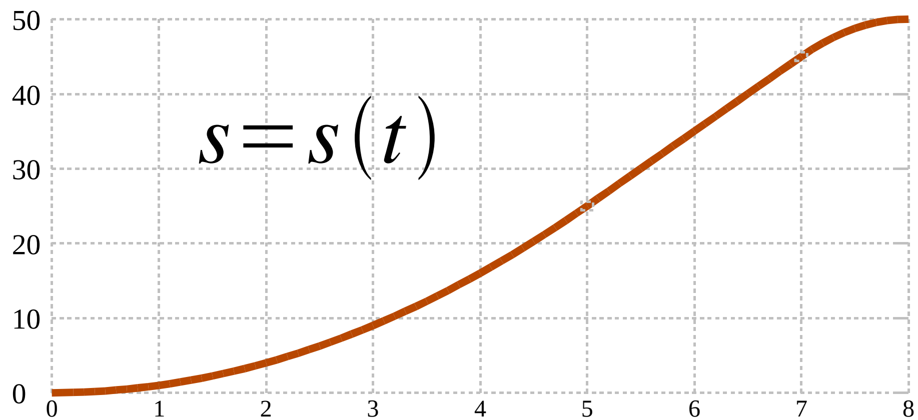


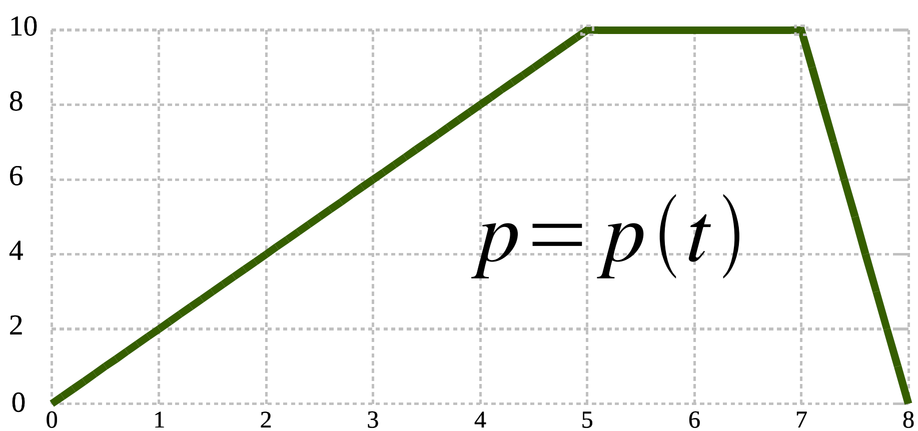
$$F(t)=m\cdot a(t)$$

$$[N]=[kg]\cdot[ms^{-2}]$$

Fázový prostor

UFO – pohyb v čase:

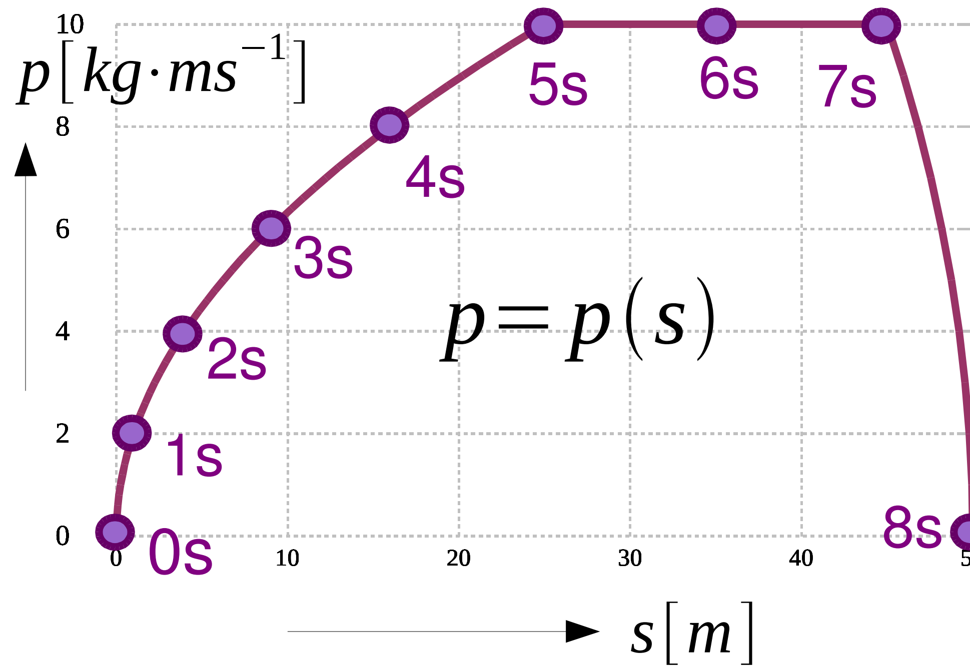




- **stavový prostor** klasické (ale i kvantové) fyziky

Souřadnice:

- **polohový** vektor
- vektor **hybnosti**



Věta impulsová (účinková):

Když je síla $\vec{F}(t) = konst$

pak je **impuls síly**: $\vec{I} = \vec{F} \cdot t$

Jinak ale: $\boxed{\vec{I} = \int \vec{F}(t) \cdot dt}$

Už víme, že: $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = d\vec{p}/dt$, tudíž:

$$\boxed{\vec{I} =} \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot dt = \int d\vec{p} = \boxed{\Delta \vec{p}}$$

(Impuls síly působí změnu hybnosti.
Je to **integrální tvar** 2. Newtonova zákona.)

Práce a kinetická energie

Když je síla $\vec{F}(s) = konst$, pak koná **práci**:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$ (skalární součin)

Jinak ale: $$\boxed{W = \int_s \vec{F} \cdot \vec{ds}}$$

Víme, že urychlující síla: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\vec{dv}}{dt}$

Pak: $W = \int m \cdot \frac{\vec{dv}}{dt} \cdot \vec{ds} = m \int \frac{\vec{ds}}{dt} \cdot \vec{dv} = m \int \vec{v} \cdot \vec{dv}$

$$\boxed{W = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = W_k \geq 0}$$ **Kinetická energie**

Kinetická energie v prostoru

Vektor rychlosti má v kartézském prostoru složky:

$$\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$$

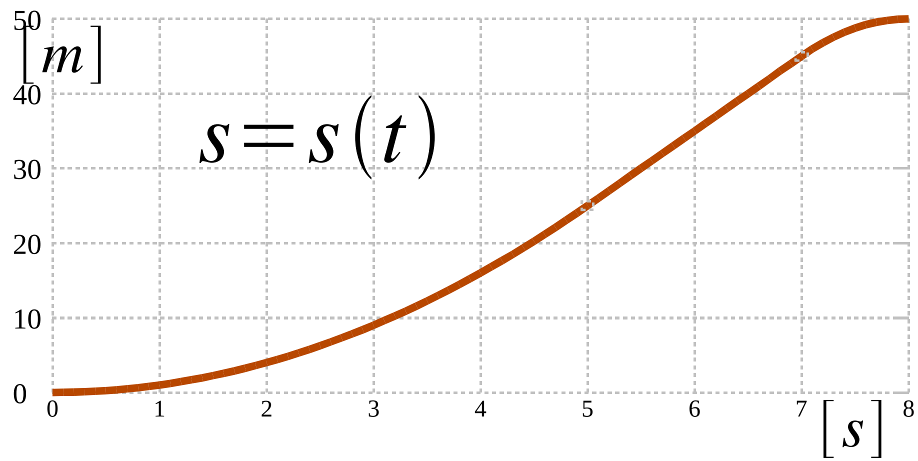
Jeho druhá mocnina je jeho skalárním součinem s ním samým. Podle Pythagorovy věty:

$$\vec{v}^2=\vec{v}\cdot\vec{v}=v^2=(v_x, v_y, v_z)^2=(v_x^2+v_y^2+v_z^2)$$

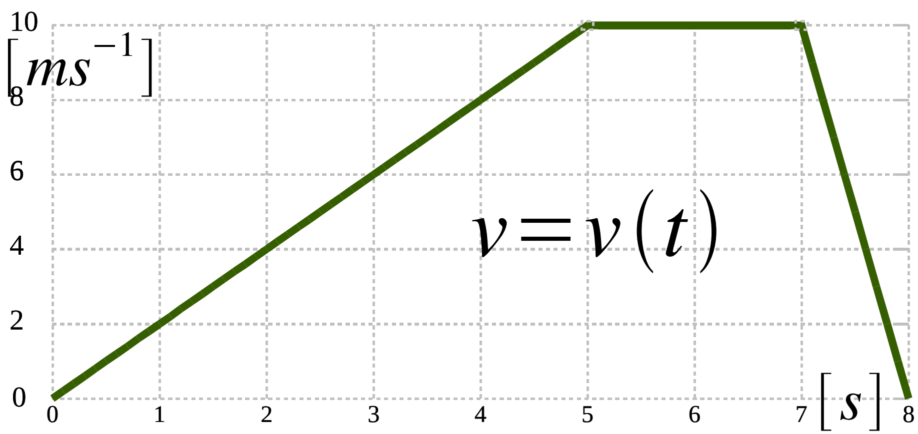
Proto celkovou kinetickou energii můžeme chápat jako **součet** kinetických energií souřadných **složek**:

$$W_k=W_{kx}+W_{ky}+W_{kz}$$

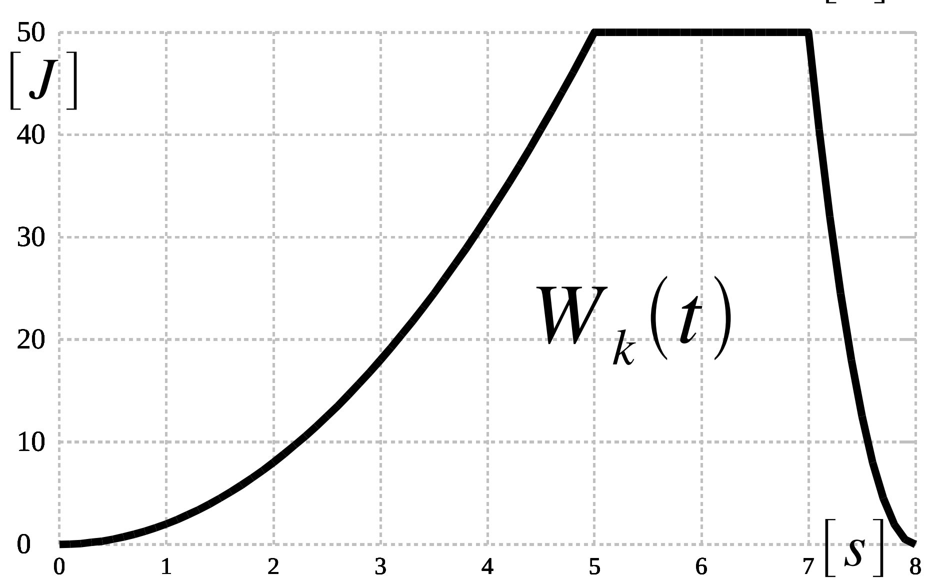
UFO:



dráha



rychlost



kinetická energie

$$W_k(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$$

Síla, rychlost a **výkon**

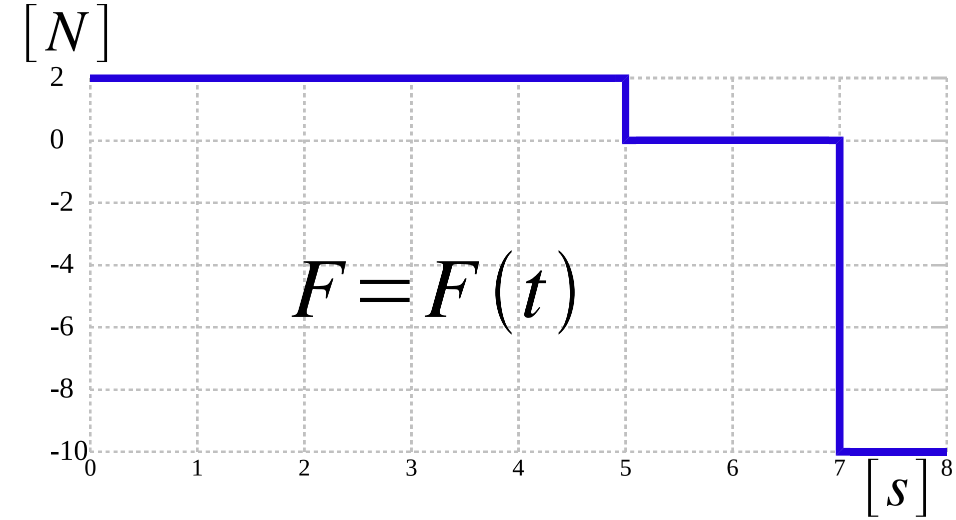
Čím je urychlované těleso rychlejší, tím delší dráha, po které musí urychlující síla působit za jednotku času, a tím také roste potřebný **výkon**:

$$P(t)=\vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t) \qquad [W]=[N]\cdot[ms^{-1}]$$

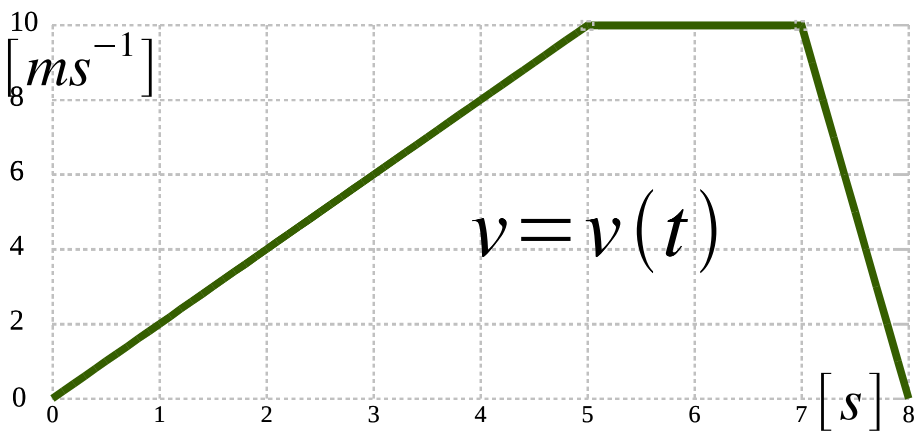
?? Co když jsou vektory $\vec{F}(t),\vec{v}(t)$ vzájemně kolmé ??

(Nápověda: skalární součin ...)

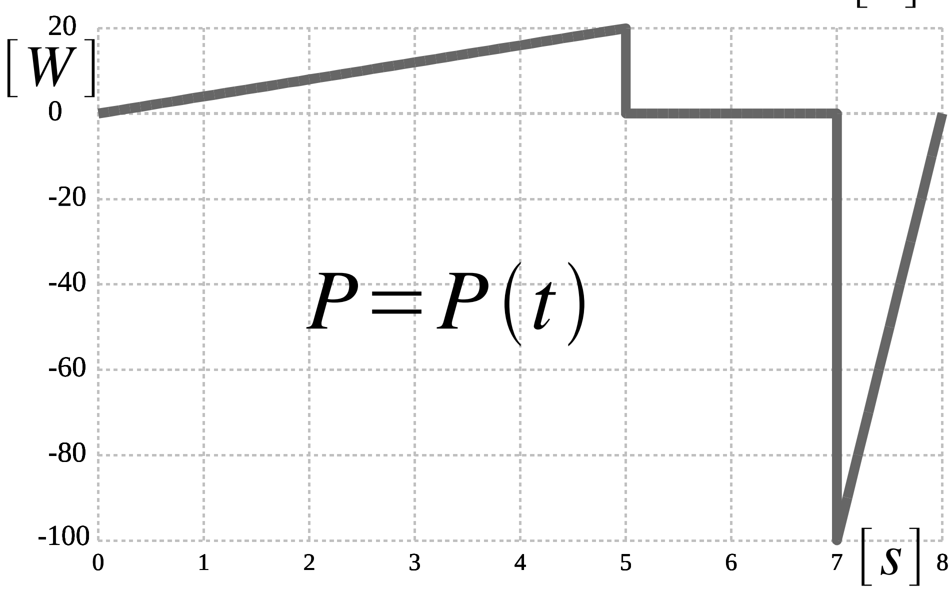
UFO:



dráha



rychlost



výkon

$$P(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

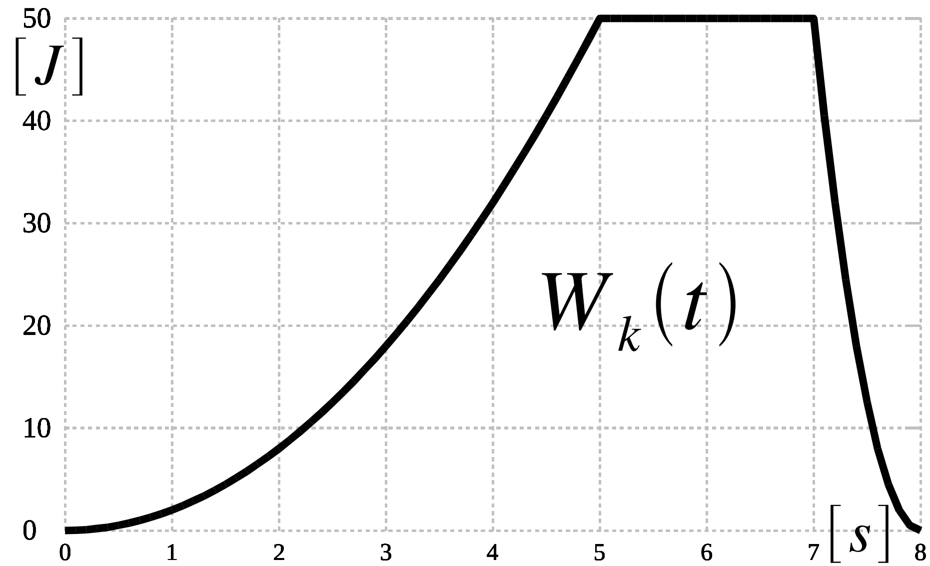
Práce a výkon

Urychlující síla vykonává práci v průběhu času. Čím více práce vykoná a v čím kratším čase, tím je vyšší výkon. Výkon je tedy derivací energie podle času:

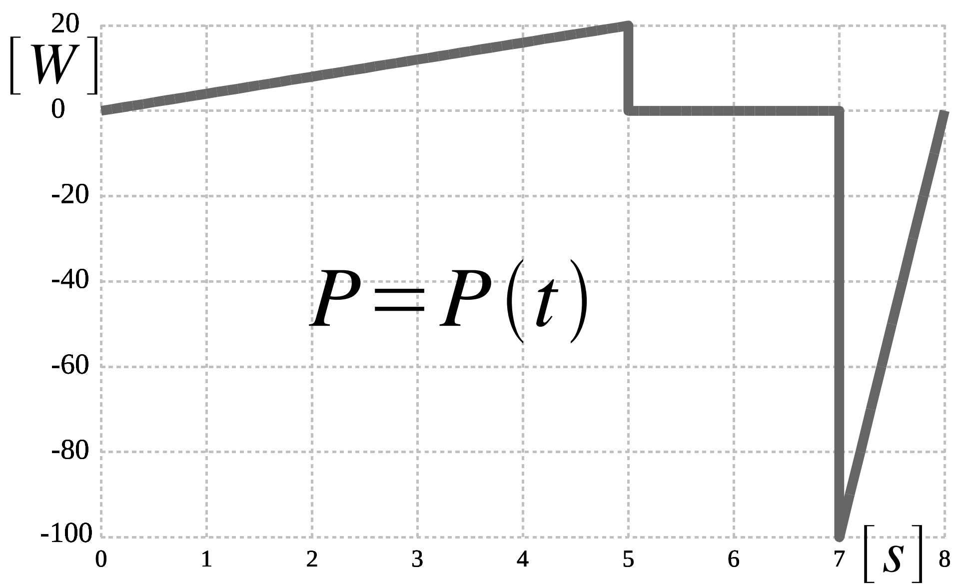
$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \dot{W} \qquad [W] = \frac{[J]}{[s]}$$

Tento vztah mezi energií a výkonem se neomezuje jen na mechaniku, ale má obecnou platnost.

UFO 1kg:



kinetická energie



výkon:

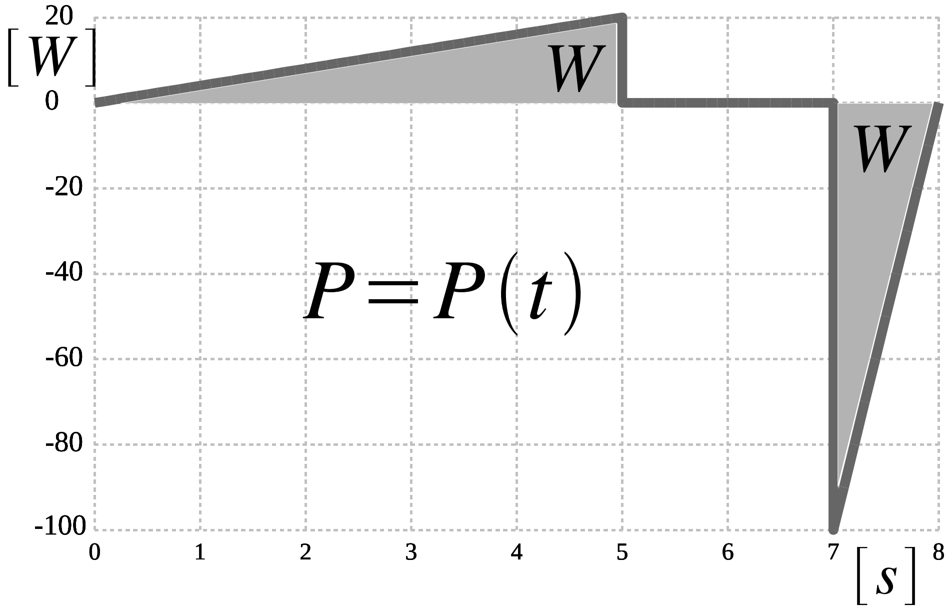
$$P(t)=\frac{dW}{dt}=\dot{W}$$

Výkon a práce

A zřejmě naopak platí, že výkon, byť kolísavý, vykonávaný po nějakou dobu, odvádí práci. Práce je tedy časovým integrálem výkonu:

$$W = \int P(t)\,dt \qquad [J] = [W] \cdot [s]$$

1 joule = 1 wattsekunda

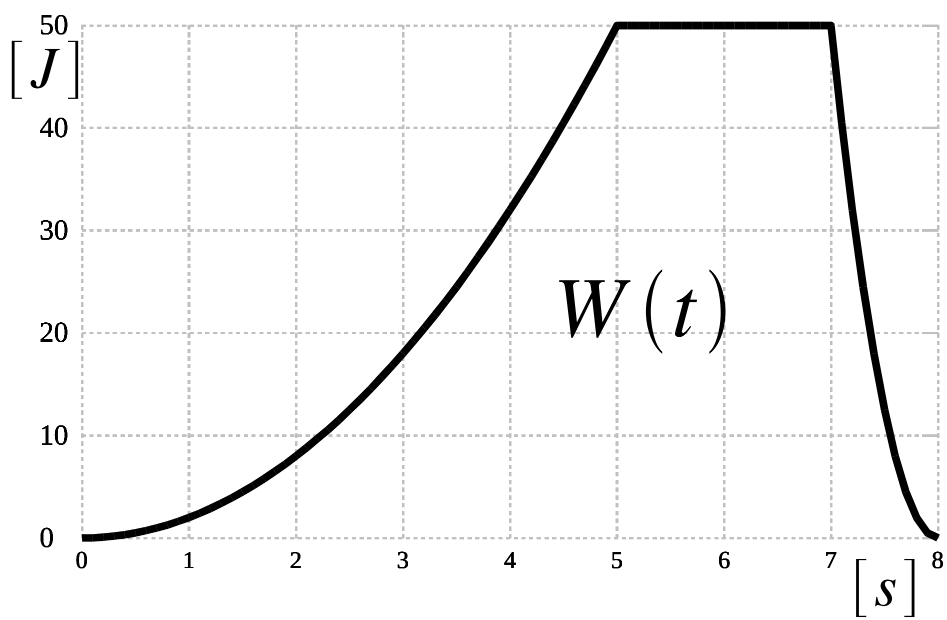


UFO 1 kg:

výkon $P = P(t)$

$$\int P(t)\,dt = W$$

… **energie**



Potenciální energie, potenciál

V tíhovém poli Země je tíha $\vec{G} = m \cdot \vec{g} \, [N]$

Pak práce zdvihající břemeno W = pot. energie U:

$$W = -\int \vec{G} \cdot \vec{ds} = -m \int \vec{g} \cdot \vec{ds} = m \cdot g \int dh = m \cdot g \cdot \Delta h = U \, [J]$$

Intenzita (gravitačního) pole = síla na jednotkovou hmotnost: $\vec{E} = \frac{\vec{G}}{m} = \frac{m \cdot \vec{g}}{m} = \vec{g} \, [N \cdot kg^{-1}]$

Potenciál (grav.) pole = pot. energie / jednot. hmotnost:

$$V = \frac{U}{m} = -\int \vec{g} \cdot \vec{ds} = g \cdot \Delta h \, [J \cdot kg^{-1}]$$

(skalár!)

Často klademe: $U_\infty = 0, \; V_\infty = 0$ Pak: $U \leq 0, \; V \leq 0$

Gradient

Viděli jsme, že potenciál
je integrální veličina:

$$V = -\int_s \vec{E} \cdot \vec{d}s$$

?? Lze naopak spočítat intenzitu pole
z potenciálu? Jak??

Asi nějakou derivací, protože víme,
že derivování je opačnou operací k integrování.

Ale jak spočítat vektorovou veličinu ze skaláru ??

Na rozdíl od časových derivací a integrálů tady jde o integrování a derivování v prostoru.

$$\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)=(-\frac{\partial V}{\partial x},-\frac{\partial V}{\partial y},-\frac{\partial V}{\partial z})$$

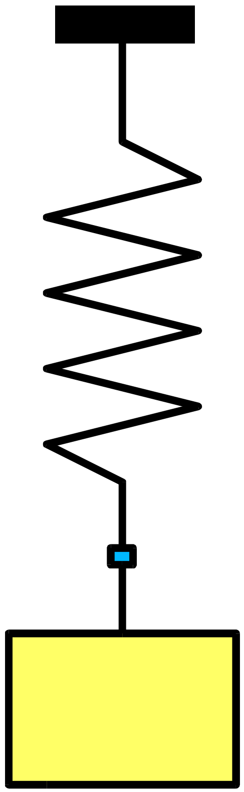
$\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}$ ... parciální derivace

diferenciální operátor $grad=\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$

$$\boxed{\vec{E}=-grad\,V}$$

Gradient „graduje“, míří „nahoru“, směrem k vyššímu potenciálu.

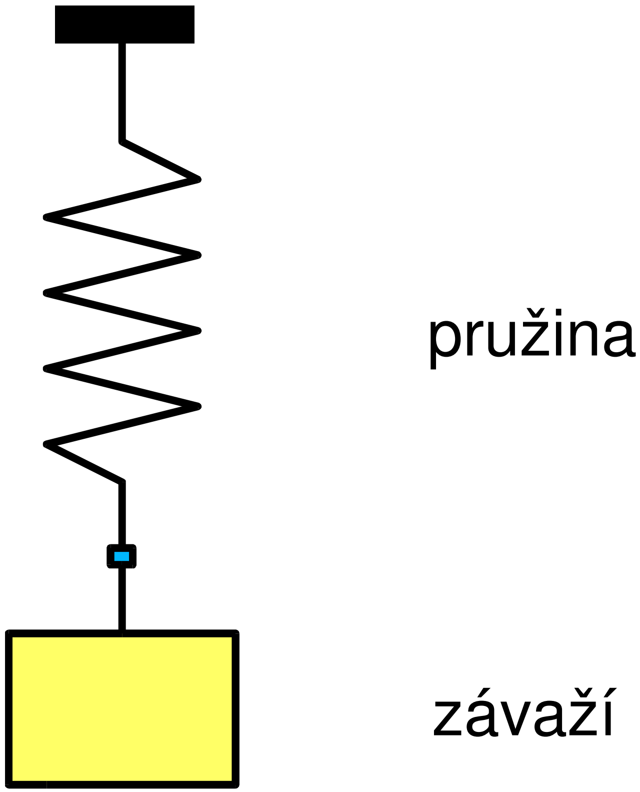
Intenzita táhne, kam to „padá“, směr k nižšímu potenciálu, tj. **proti** gradientu, po jeho **spádu**.



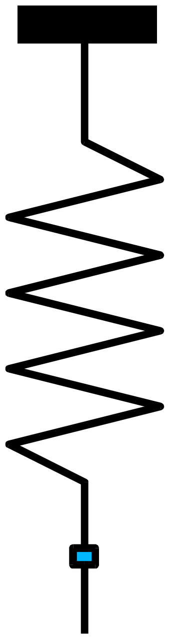
Harmonický oscilátor

jako příklad fyzikálního systému

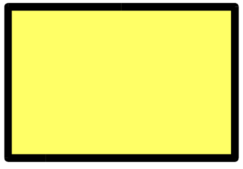
a jeho modelu



Identifikace částí

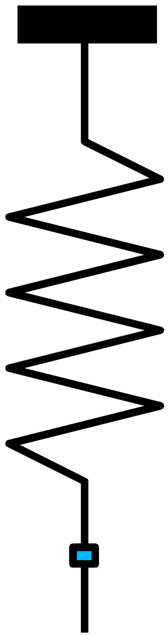


pružina



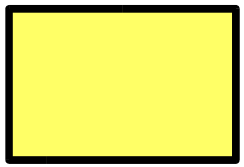
závaží

Dekomposice (analýza)



pružina

materiál, tvar, rozměry, technologie výroby, stáří, ...

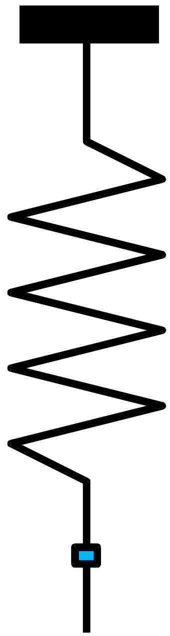


závaží

dtto

Vlastnosti částí systému

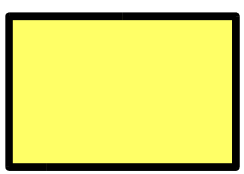
pružina



závislost síly na prodloužení pružiny:

$$F_k = F(x)$$

závaží

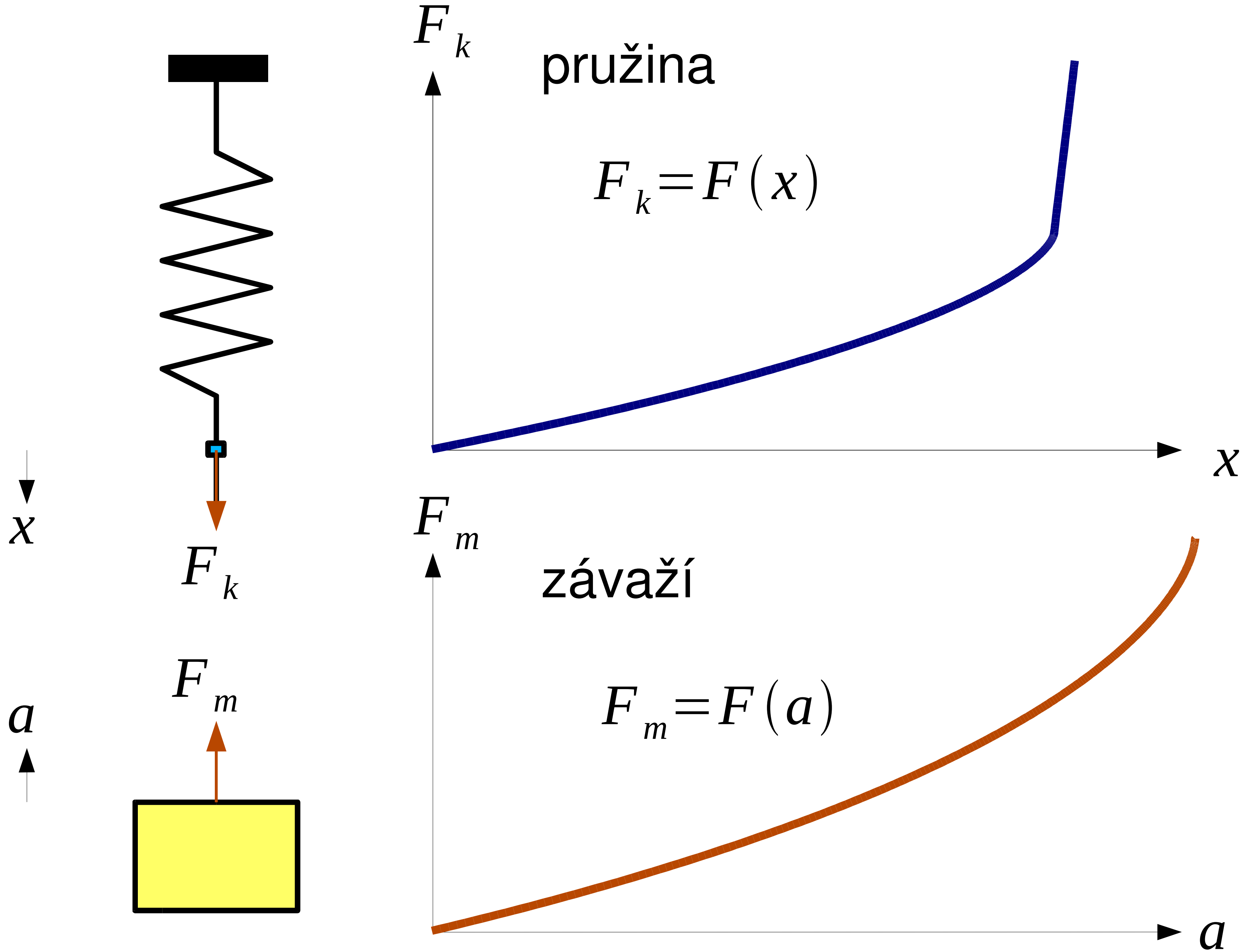


závislost síly na zrychlení závaží:

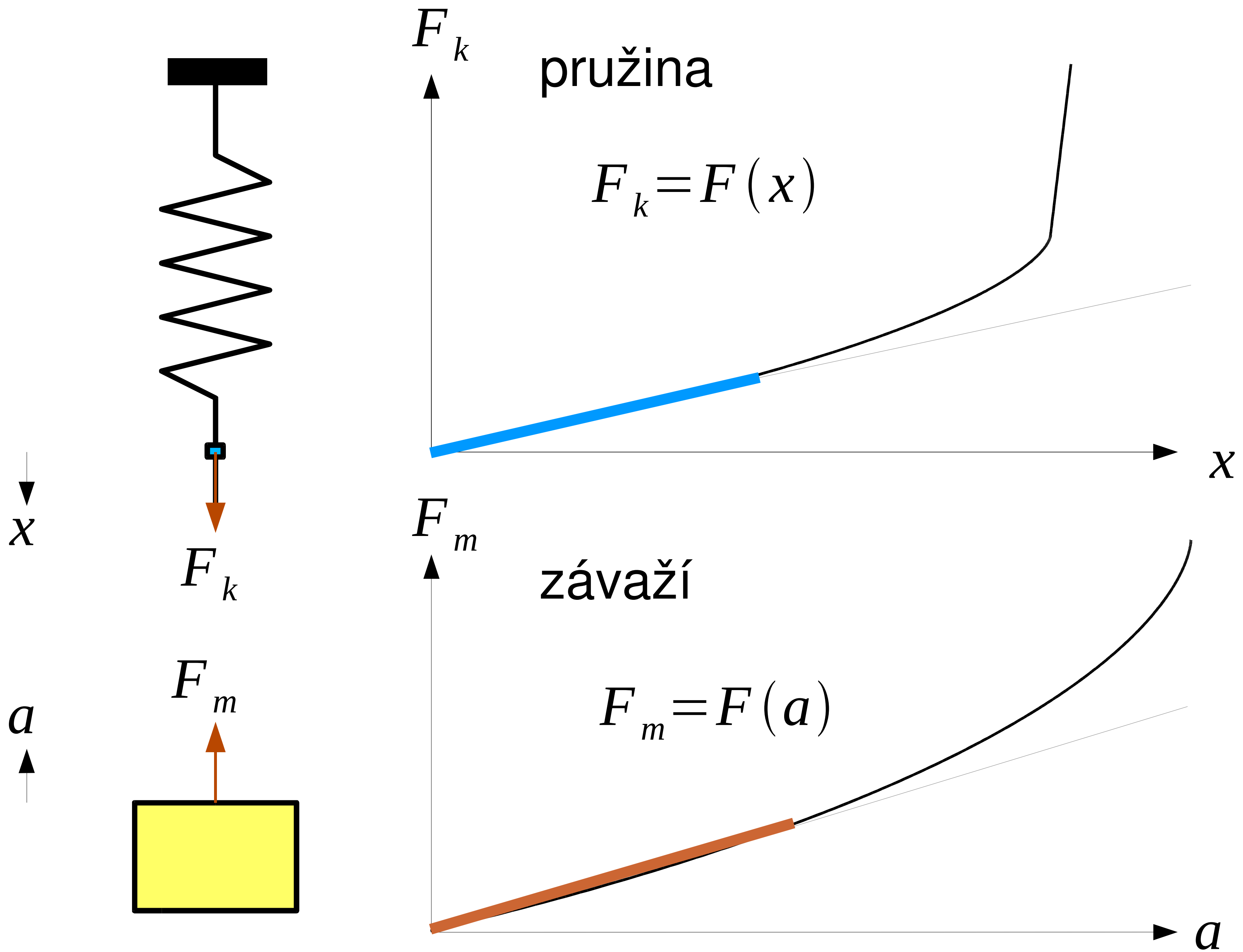
$$F_m = F(a)$$

Charakterisace částí

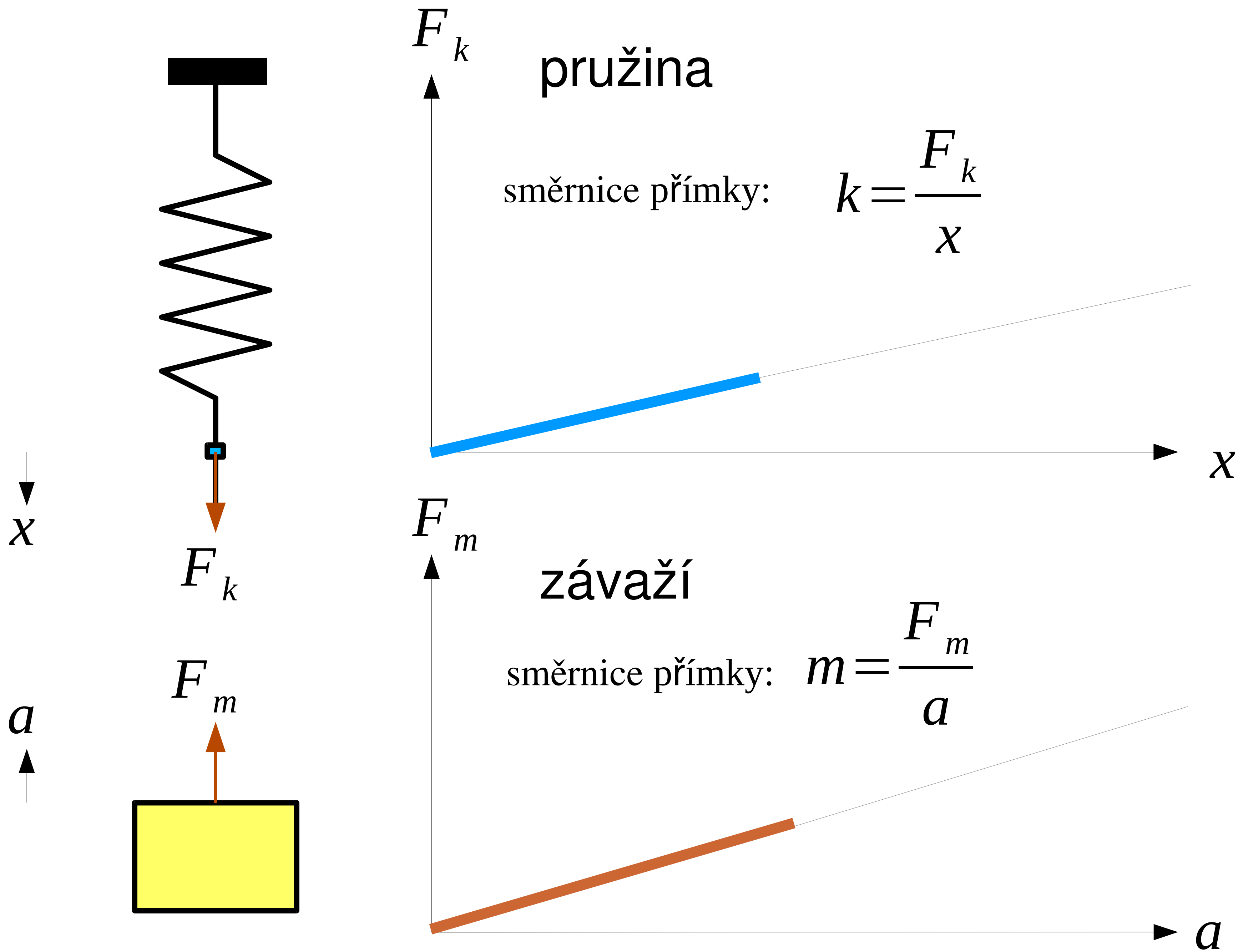
(výběr charakteristických vlastností)



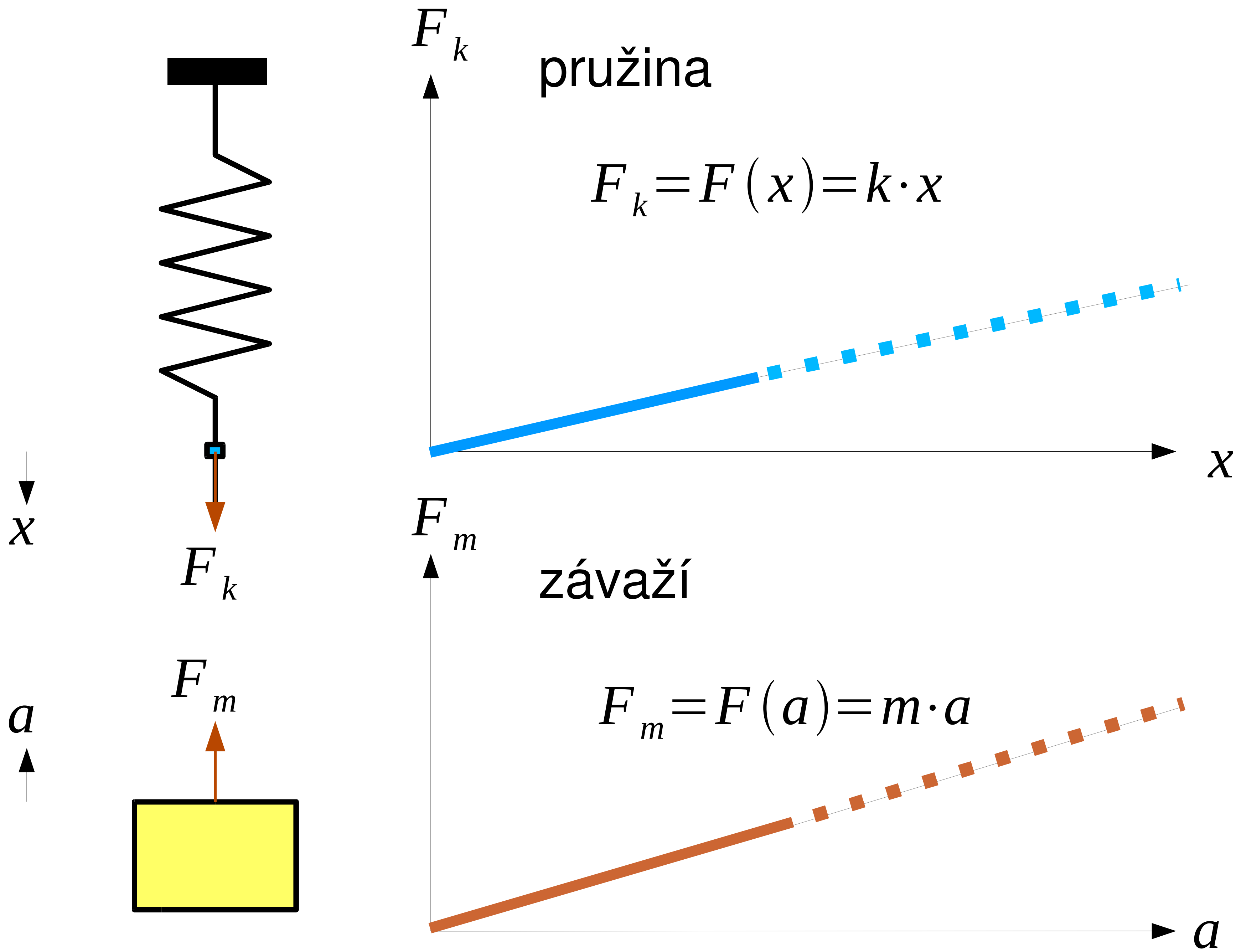
Charakteristiky ve trvaru grafů



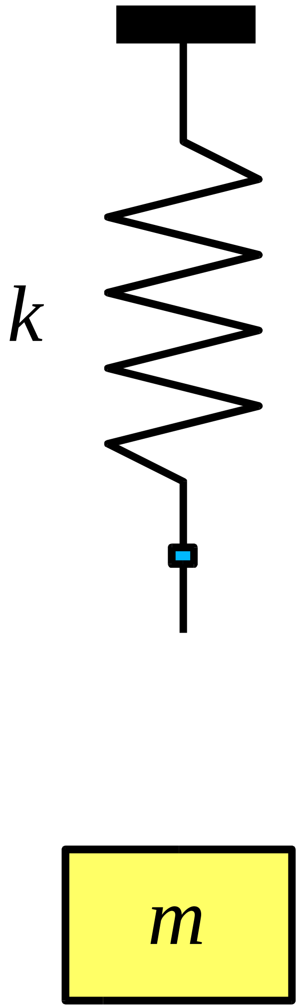
Linearisace



Parametrisace – identifikace parametrů



Parametrické vyjádření závislostí

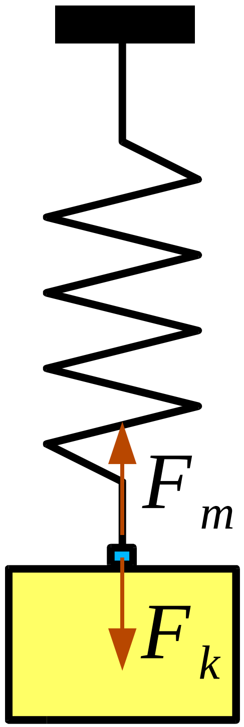


I když každý fyzikální objekt můžeme charakterisovat řadou parametrů jako je hmotnost, pružnost, objem atd., u modelu se soustředěnými parametry jsou tyto vlastnosti soustředěny do jednotlivých diskrétních součástek.

(V našem příkladu u pružiny uvažujeme jen pružnost a zanedbáváme hmotnost, u závaží zase uvažujeme jen hmotnost a zanedbáváme pružnost.)

Model se soustředěnými parametry

Dvě rovnice popisují dvě součásti.
Třetí jejich vzájemné spojení:



$$\left.\begin{aligned} F_k &= k \cdot x \\ F_m &= m \cdot a \end{aligned}\right\} \quad F_k + F_m = 0$$

$$m \cdot a + k \cdot x = 0$$

Jejich sloučením dostáváme rovnici popisující chování systému.

Syntéza modelu

V rovnici $$m \cdot a + k \cdot x = 0$$

to vypadá, že máme dva konstantní parametry *m* a *k* a dvě proměnné *a* a *x*.
Ve skutečnosti je zrychlení *a* druhou derivací polohy *x* podle času *t*:

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$$

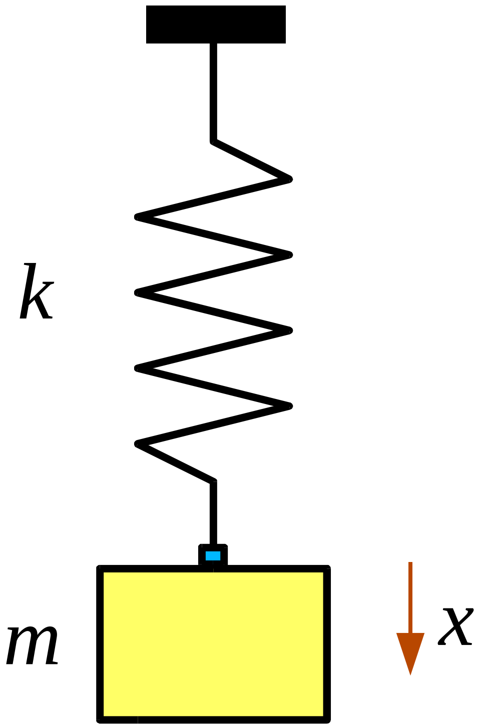
Použitím tohoto vztahu dostáváme:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

a po úpravě konečně hledanou rovnici harmonického oscilátoru:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu



$$\ddot{x}+\frac{k}{m}\cdot x=0$$

Označíme si poměr $\dfrac{k}{m}=\omega^2$ čili že $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

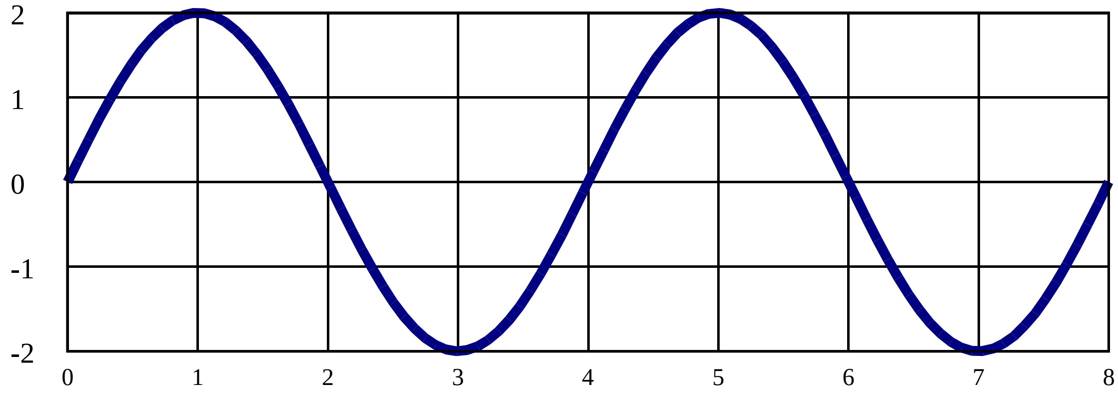
a dostáváme rovnici: $$\ddot{x}+\omega^2\cdot x=0$$

která má obecné řešení: $$x(t)=A\sin(\omega t+\phi)$$

představující harmonické kmity o amplitudě A s úhlovou frekvencí ω a fázovým posunem ϕ .

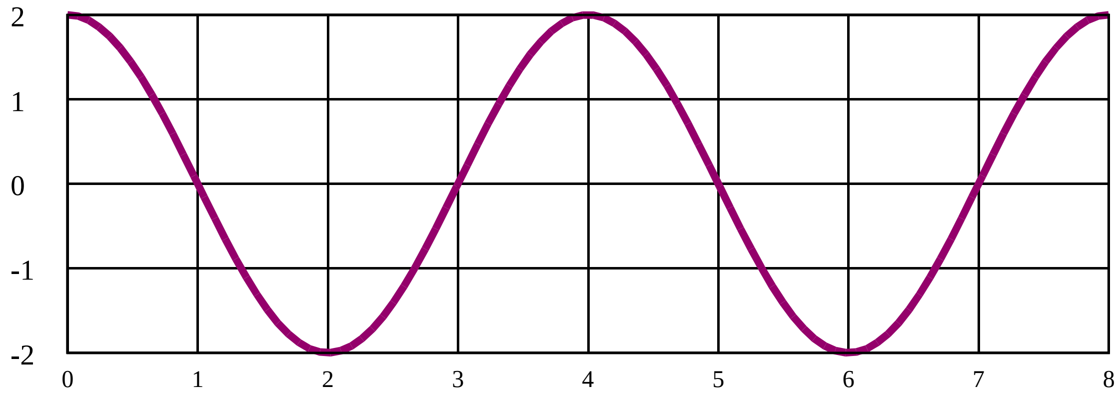
Řešení diferenciální rovnice

Kinematika harmonického oscilátoru



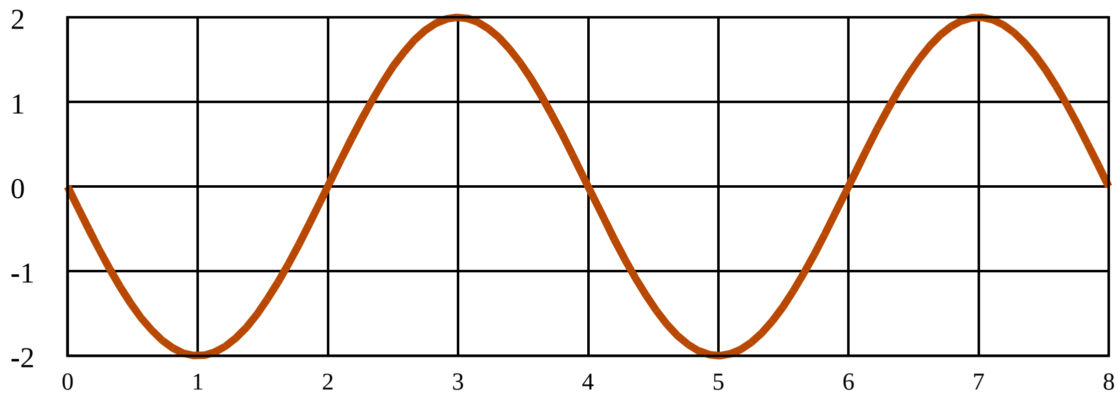
výchylka:

$$x(t) = x_{max} \cdot \sin(\omega t)$$



rychlost:

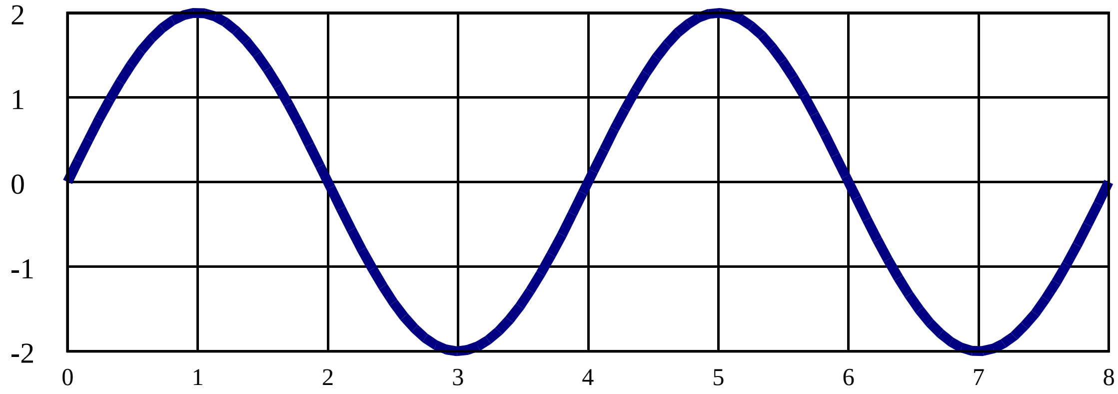
$$v(t) = v_{max} \cdot \cos(\omega t)$$



zrychlení:

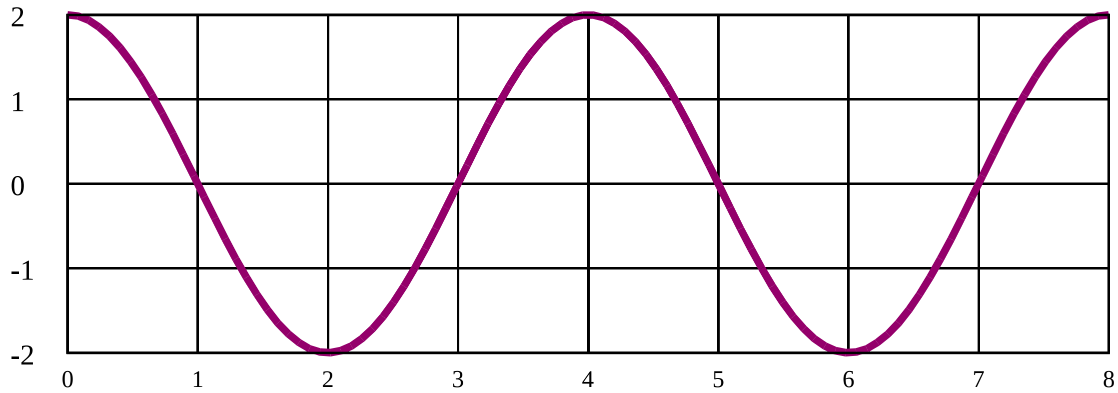
$$a(t) = -a_{max} \cdot \sin(\omega t)$$

Dynamika harmonického oscilátoru



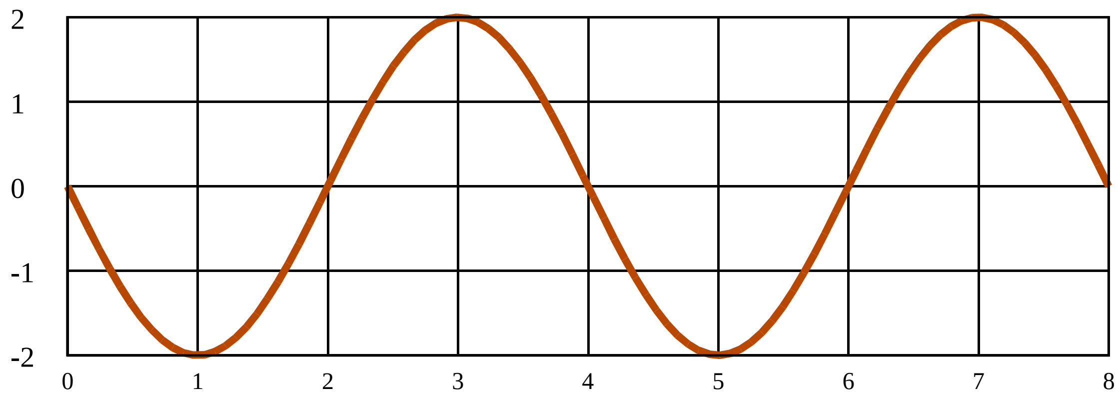
síla pružiny:

$$F_k(t) \sim x(t)$$



hybnost závaží:

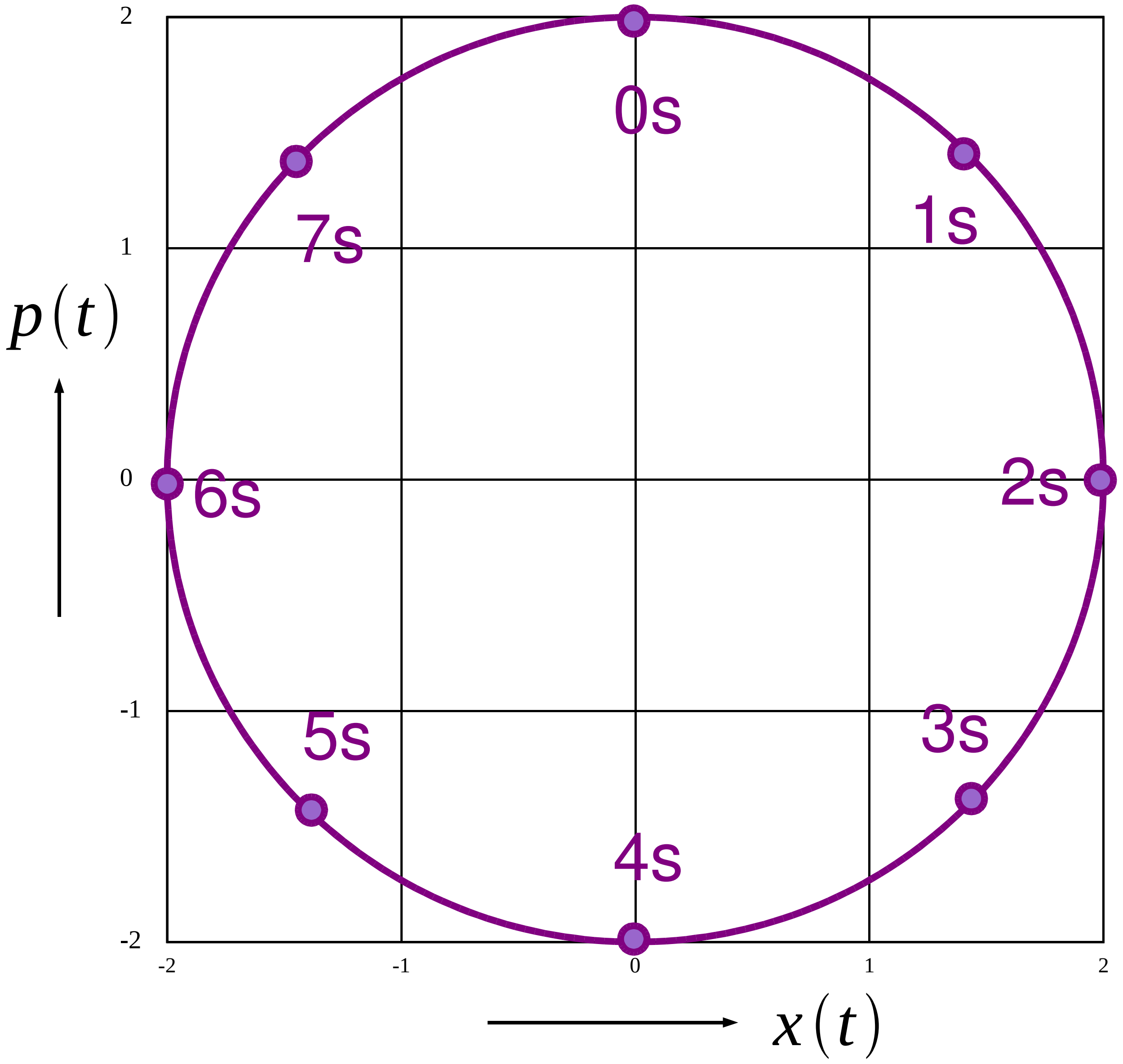
$$p(t) \sim v(t)$$



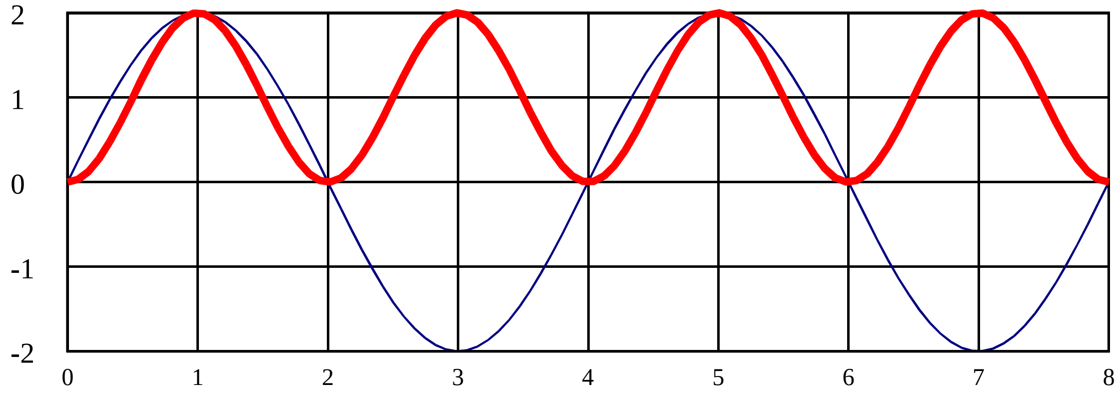
setrvačná síla závaží:

$$F_m(t) \sim a(t)$$

Fázový prostor harmonického oscilátoru

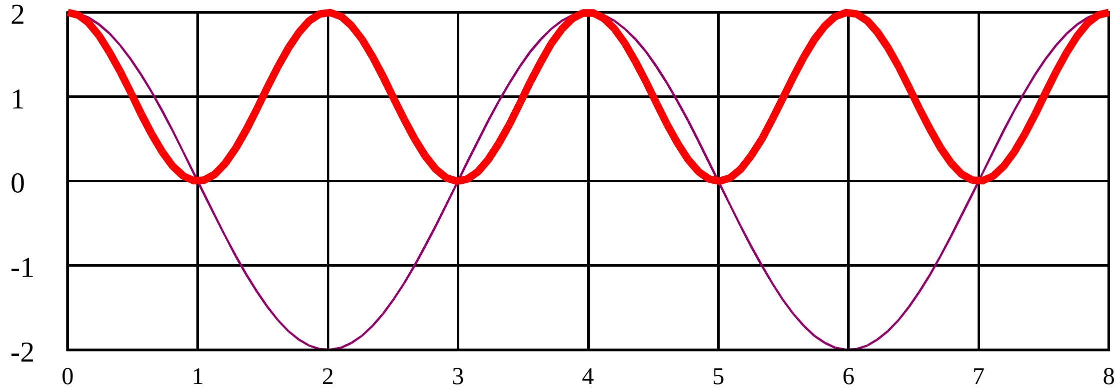


Energie harmonického oscilátoru



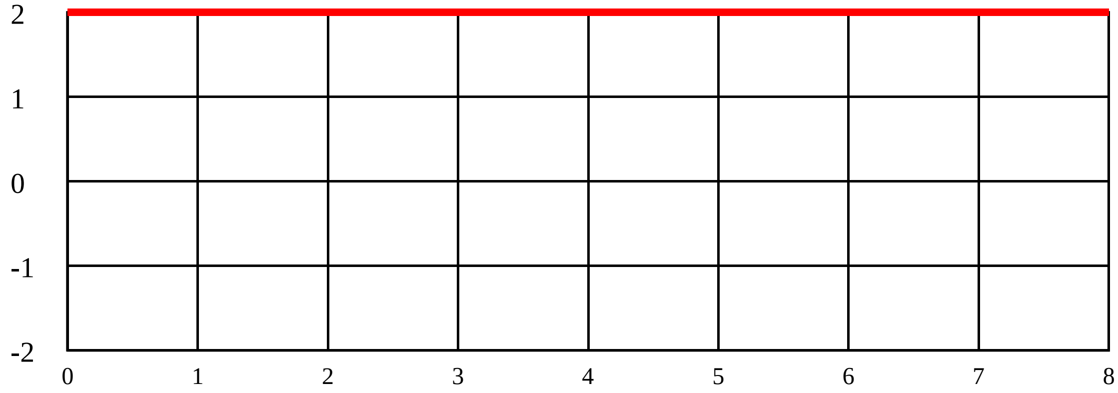
potenciální energie:

$$U(t) \sim x^2(t)$$



kinetická energie:

$$W_k(t) \sim v^2(t)$$



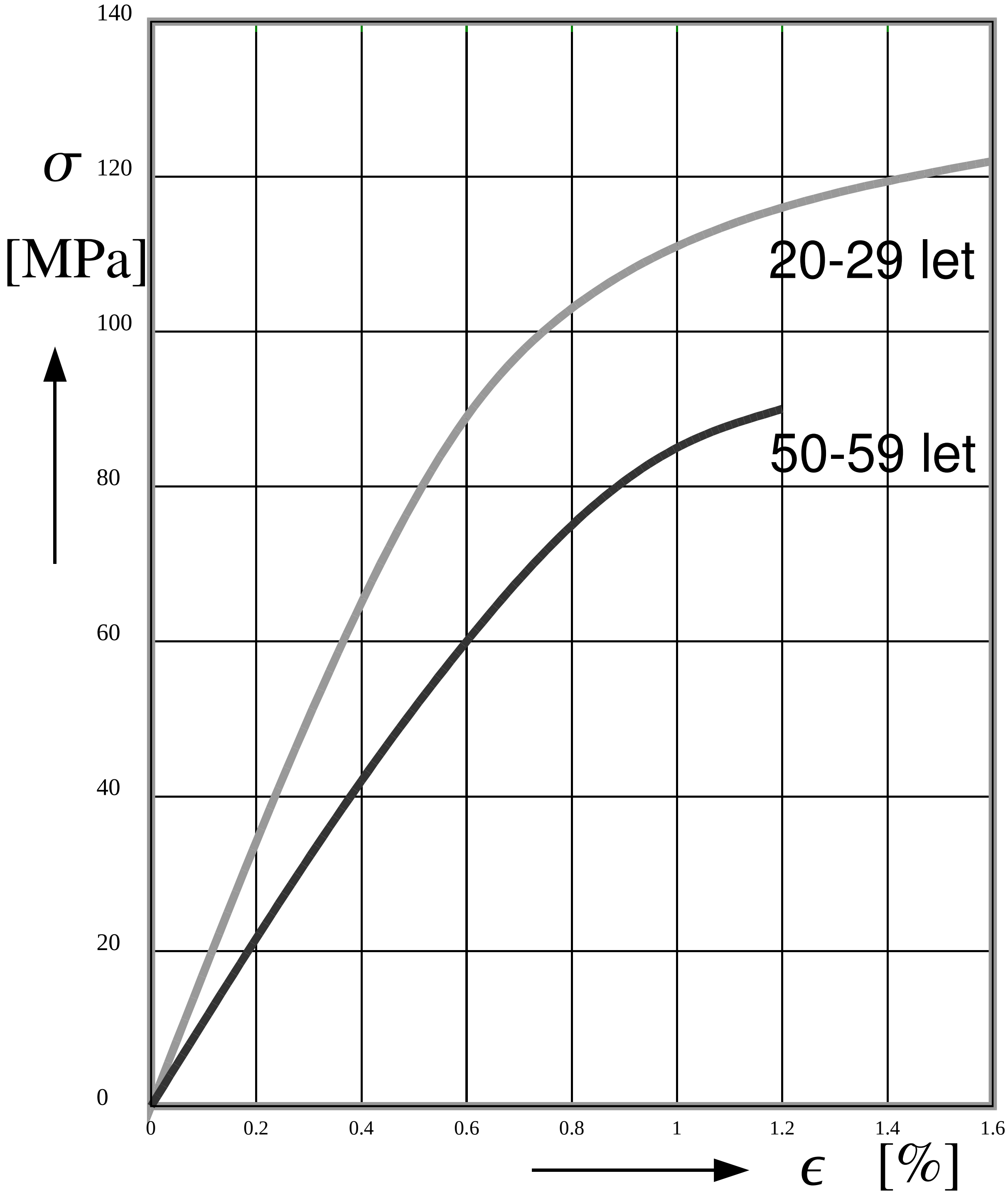
celková energie:

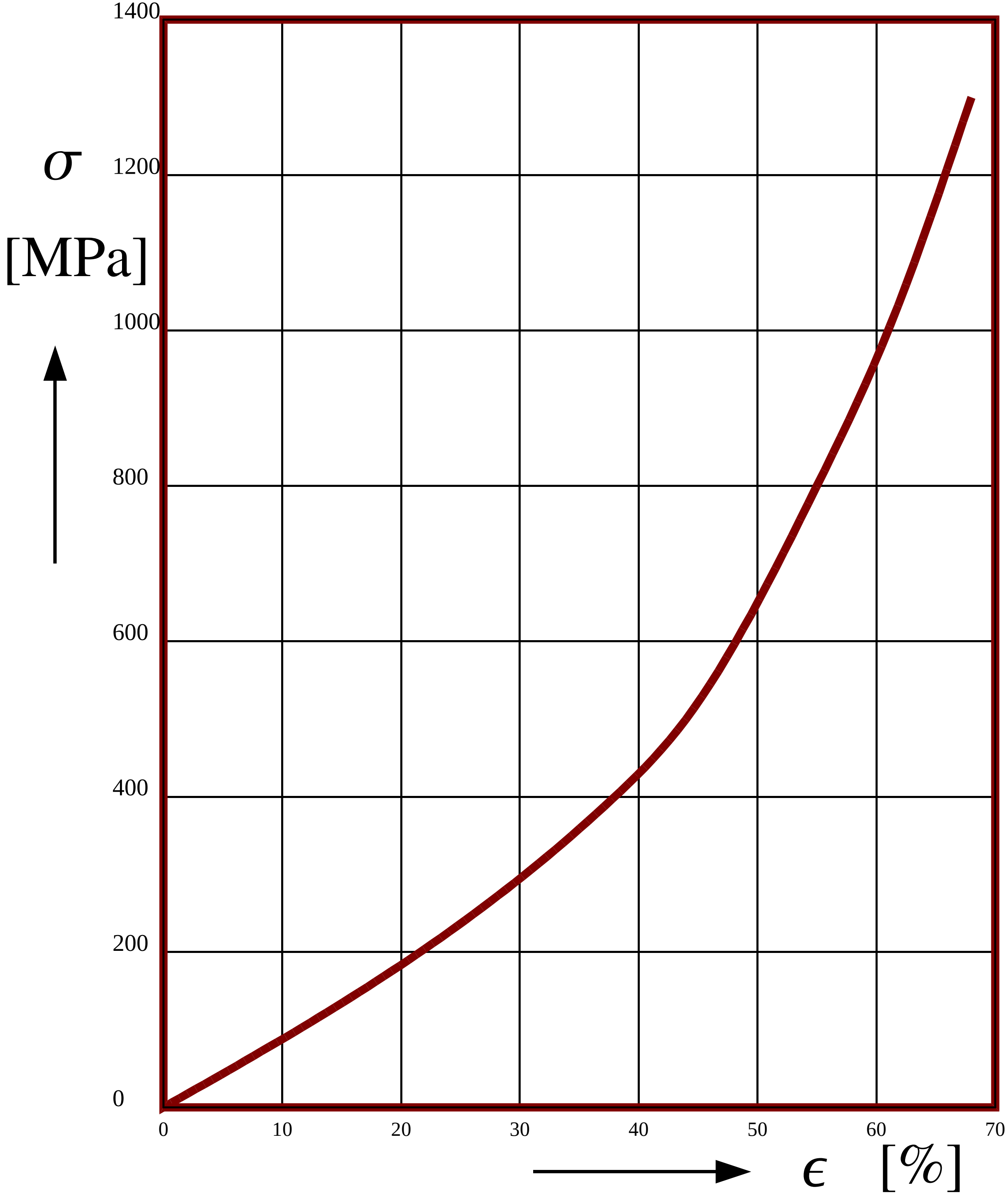
$$U + W_k(t) = konst$$

Mechanika pevných těles

Kost

(kompaktní oblast femuru)

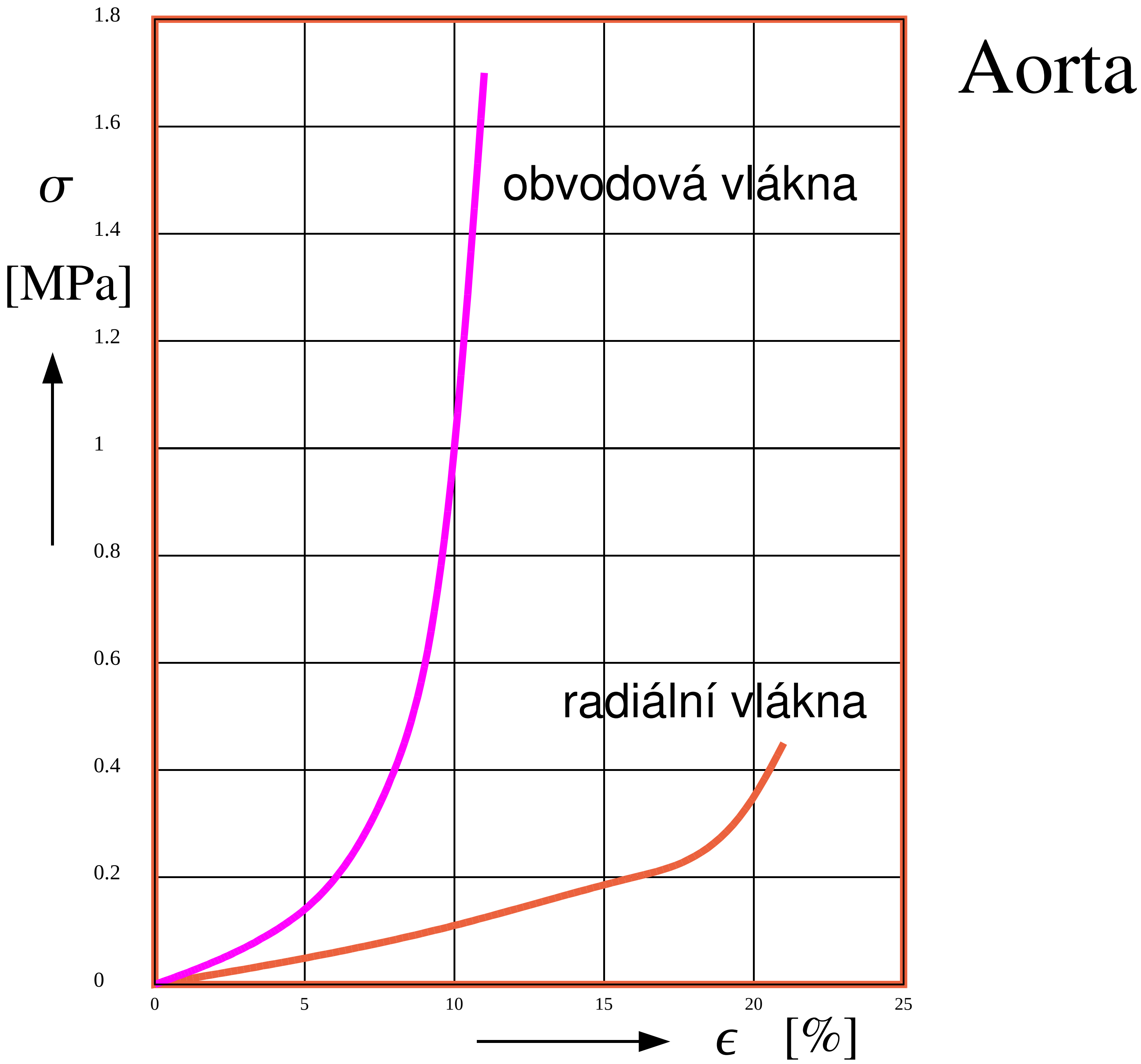




Sval

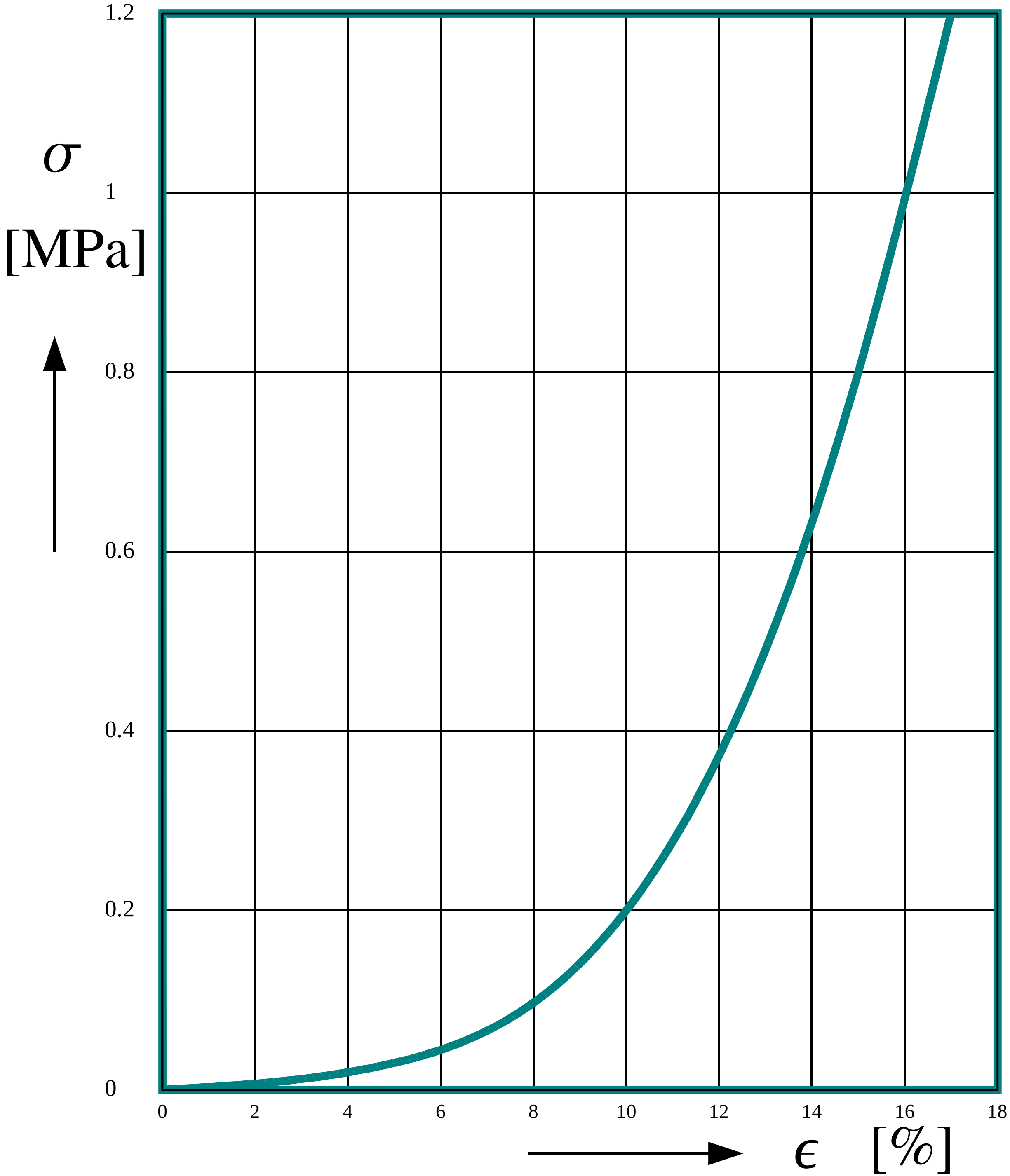
(svalové vlákno levé srdeční komory)

napětí v tahu

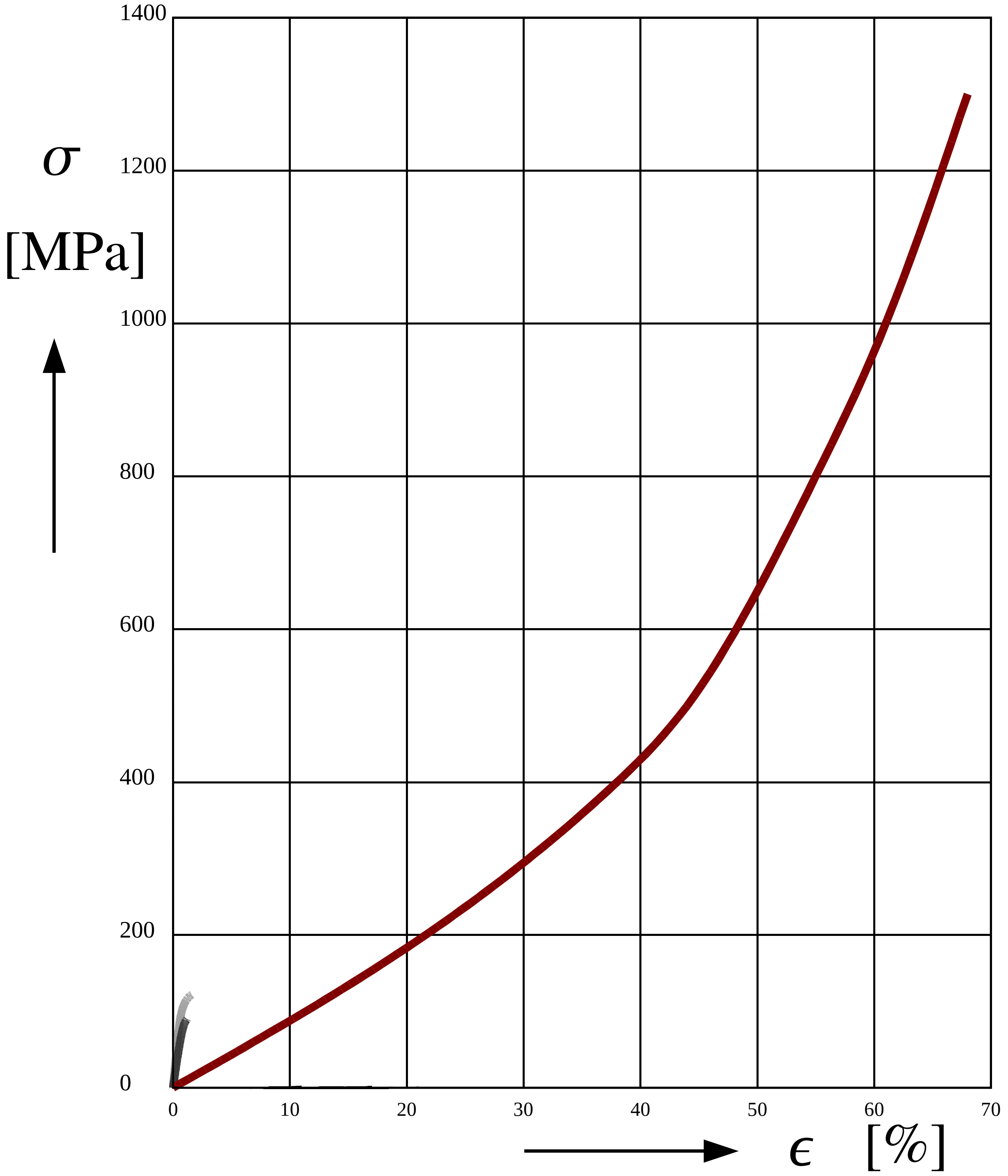

Aorta
σ
[MPa]
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
obvodová vlákna
radiální vlákna
0
5
10
15
20
25
ϵ [%]

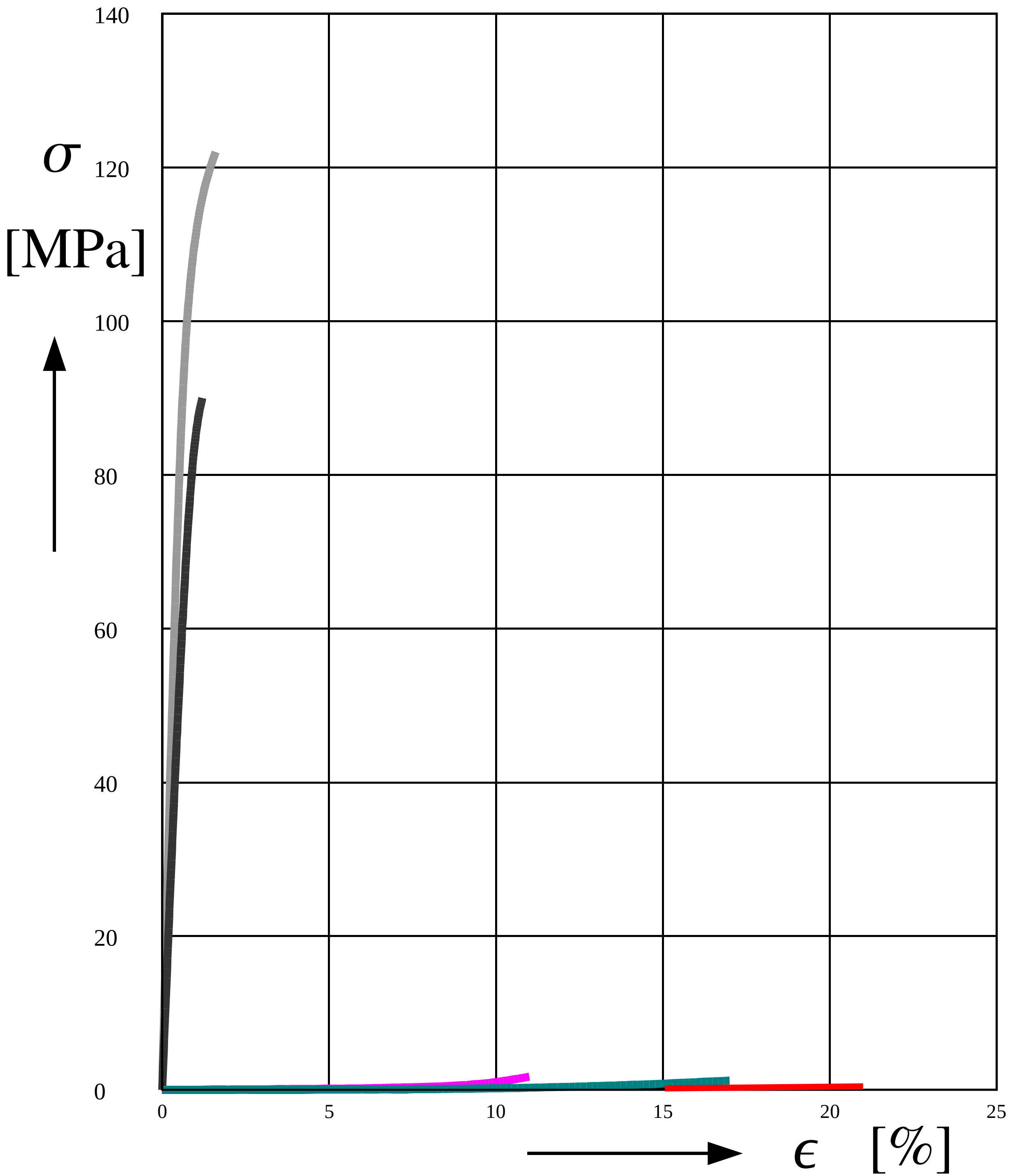
Nervové vlákno

(nervus femoralis)



Všechny tkáně





Všechny tkáně

(kromě srdeční)